

# 高斯线调频小波变换及参数优化

尉宇\*\*\* 孙德宝\* 岑翼刚\*

\*(华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074)

\*\* (武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430070)

**摘要:** 线调频小波变换(CT)作为小波变换(WT)的一种推广,成了信号处理中的研究热点。该文推导出高斯线调频小波变换(GCT)的短时 Fourier 变换(STFT)计算形式。并利用分数阶 Fourier 变换和广义的时宽-带宽积来优化 GCT 的参数。与 Wigner-rille 分布(WVD)、短时 Fourier 变换(STFT)进行比较分析。仿真结果表明优化的 GCT 有很好的时频聚集性。

**关键词:** 高斯线调频小波变换, 短时 Fourier 变换, 广义的时宽-带宽积

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009-5896(2005)09-1398-06

## Gaussian Chirplet Transform and the Optimization of its Parameters

Wei Yu\*\*\* Sun De-bao\* Cen Yi-gang\*

\*(Dept. of Control Science & Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

\*\* (The Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430070, China)

**Abstract** The Chirplet Transform(CT) have being become one of the most popular field in signal processing. which is extend from the Wavelet Transform(WT). This paper calculate the Gaussian Chirplet Transform(GCT) by the Short-Time Fourier Transform(STFT). At the same time, its parameters is optimized by making use of FRFT and Generalized Time-Bandwidth Product(GTBP). Compared with WVD and STFT, GCT has been show excellent performance for the time-frequency concentration.

**Key words** Gaussian chirplet transform, Short-time Fourier transform, Generalized time-bandwidth product

### 1 引言

线调频小波变换源于 19 世纪 20 年代光学研究<sup>[1]</sup>。近年来,作为小波变换的推广成了信号处理中的研究热点。变尺度高斯线调频小波变换(Gaussian Chirplet Transform, GCT)<sup>[2,3]</sup>是时间-频率-尺度-频率倾斜变换四维空间的变换。而 GCT 的参数的优化在时间-频率域难以实现。因此,我们推导出与 GCT 等价的短时 Fourier 变换(STFT)计算形式,提供 GCT 的一种计算方法。并利用分数阶 Fourier 变换和广义的时宽-带宽积来优化 GCT 的参数。

### 2 高斯线调频小波变换

线调频小波是“用一段基波对线调频振荡调制后得到的信号波”或“一小段被窄窗函数抽取的线性调频波”。小波变换是二维的时间-尺度变换,而线调频小波变换具有五维的时间-频率-尺度-时间倾斜-频率倾斜变换特征。引入合成算子  $M_{t_c, f_c, \alpha, p, q}$ , 则合成算子与窗函数  $g(t)$  的时间平移、频率平移、

时频拉伸、时间倾斜、频率倾斜的变换对应关系为

$$\left. \begin{aligned} M_{t_c, 0, 0, 0, 0} g(t) &= g(t - t_c) \\ M_{0, f_c, 0, 0, 0} g(t) &= e^{j2\pi f_c t} g(t) \\ M_{0, 0, \alpha, 0, 0} g(t) &= e^{-\alpha/2} g[e^{-\alpha}(t - \alpha)] \\ M_{0, 0, 0, p, 0} g(t) &= (-jp)^{-\frac{1}{2}} e^{j\pi \frac{1}{p} t^2} g(t) \\ M_{0, 0, 0, 0, q} g(t) &= e^{j2\pi \frac{q}{2} t^2} g(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

因此可得分析函数  $g_{t_c, f_c, \alpha, p, q}(t) = M_{t_c, f_c, \alpha, p, q} g(t)$ 。利用分析函数和合成算子, STFT 可写为

$$\text{STFT}(t, f) = \langle s(u), g_{t_c, f_c, \alpha, p, q}(u) \rangle \quad (2)$$

小波变换可写成:

$$\text{WT}(t, \alpha) = \langle s(u), g(u) \rangle \quad (3)$$

将高斯调频小波加以推广,得到高斯线调频小波:

$$\begin{aligned} g_{t_c, f_c, \lambda, 0, q}(t) &= \exp \left[ -\frac{2\pi\lambda}{2} (t - t_c)^2 + j\phi_1 \right] \\ &\quad \cdot \exp j2\pi \left[ f_c(t - t_c) + \frac{q}{2} (t - t_c)^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

则高斯线调频小波变换可定义为

$$\begin{aligned}
 \text{GCT}(t, f) &= \langle s(u), g_{t, f, \lambda, 0, q}(u) \rangle = \langle s_{-t, 0, 0, 0, 0}(u), g_{0, f, \lambda, 0, q}(u) \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \exp \left[ -\frac{2\pi\lambda}{2}(u-t)^2 + j\varphi \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ -j2\pi \left[ f(u-t) + \frac{q}{2}(u-t)^2 \right] \right\} du \\
 &= e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(u+t) \exp \left[ -\frac{2\pi\lambda}{2}u^2 \right] \\
 &\quad \cdot \exp \left[ -j2\pi \left( fu + \frac{q}{2}u^2 \right) \right] du \quad (5)
 \end{aligned}$$

由于它是利用高斯线调频小波包得到的变换, 故称作高斯线调频小波变换。核函数  $g_{t, f, \lambda, 0, q}(t)$  可视为 3 个核函数的综合; 函数  $\exp[-(2\pi\lambda/2)u^2]$  相当于小波变换中的高斯小波核函数;  $\lambda > 0$  是控制高斯信号的展形, 尺度参数; 是小波的相移,  $\varphi \in R$  为常数; 相当于 Fourier 变换;  $\exp(j2\pi(q/2)u^2)$  相当于解线调中的核函数。GCT 可以表示成 STFT 的形式计算:

$$\begin{aligned}
 \text{GCT}(t, f) &= e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(u+t) \exp \left[ -2\pi \left( \frac{\lambda}{2}u^2 + j\frac{q}{2}u^2 \right) \right] \exp(j2\pi fu) du \\
 &= e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(u+t) g_{\text{opt}}(u) \exp(-j2\pi fu) du
 \end{aligned}$$

这里

$$g_{\text{opt}}(u) = \exp \left[ -2\pi \left( \frac{\lambda}{2}u^2 + j\frac{q}{2}u^2 \right) \right] \quad (6)$$

则高斯线调频小波变换的谱分布形式为

$$\text{SPEC}_{\text{GCT}}(t, f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(u+t) g_{\text{opt}}(u) \exp(-j2\pi fu) du \right|^2 \quad (7)$$

这样将 GCT 四维空间参数的搜索转化为对 SFTF 窗函数  $g_{\text{opt}}(u)$  的优化。  $g_{\text{opt}}(u)$  有两个重要的参数  $\lambda$ 、 $q$ 。  $q$  参数控制解线调核函数的频率倾斜率。若信号在短时间可视为线调频信号, 则  $\exp(j2\pi qu^2)$  可实现对信号的解线调, 从而提供信号良好的频域聚集性。参数  $\lambda$  是尺度参数, 其实质是使得信号  $s(t) + g(t)$  的时宽-带宽积(TBP)最小, 为信号提供更佳时频聚集性。因此参数  $\lambda$  的选择应为

$$\lambda = \arg \min_{T_x \cdot B_x \cdot T_g \cdot B_g \geq 1/(4\pi)} \text{TBP} = \{(T_x^2 + T_g^2)^{1/2} (B_x^2 + B_g^2)^{1/2}\} \quad (8)$$

对高斯信号  $T_g \cdot B_g = 1/(4\pi)$ , 可得

$$T_g = \sqrt{\frac{T_x}{4\pi B_x}}, \quad \lambda = B_{x0} / T_{x0} \quad (9)$$

但在大都情况下 TBP 不能满足信号的最小支撑如图 1(a)。而广义的 TBP(GTBP)图 1(b)能满足信号的最小支撑, 因此参数  $\lambda$  的选择应为

$$\lambda = \arg \min_{T_{x0} \cdot B_{x0} \cdot T_{g0} \cdot B_{g0} \geq 1/(4\pi)} \text{GTBP}\{x(t)\}$$

$$= \min_{0 < \alpha < 2} \text{TBP}\{x_\alpha(u)\} \quad (10)$$

因此参数  $\lambda$  的选择应是调线调后信号的时宽-带宽积参数(GTBP)<sup>[4]</sup> 如图 1(c)。这样, 参数  $\lambda$  的选择与  $q$  参数有关, 且难以计算。而分数阶 Fourier 变换提供了有力的手段。

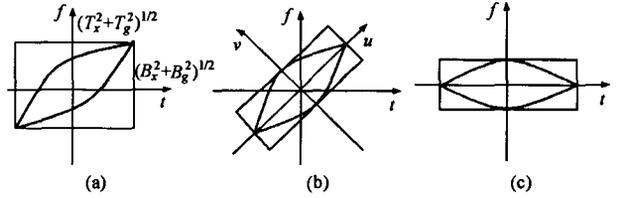


图 1

- (a) 使用窗  $g(t)$  的信号支撑由边长分别为  $(T_x^2 + T_g^2)^{1/2}$ ,  $(B_x^2 + B_g^2)^{1/2}$  矩形区域(TBP)限定
- (b) 当信号支撑与  $\alpha_0^{\text{th}}$  对应轴平行时的 GTBP
- (c) 旋转后的 GTBP

### 3 $g_{\text{out}}(u)$ 分数阶 Fourier 域的实现及其性质

$g_{\text{opt}}(u)$  可以用分数阶 Fourier 变换来实现。下面来推导其实现形式。设  $x(t)$  在分数阶  $\alpha$  的分数阶 Fourier 变换为<sup>[5-7]</sup>

$$x_\alpha(u) = R^\alpha[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t, u) x(t) dt$$

式中

$$K_\alpha(t, u) = \frac{\exp(j\epsilon/2)}{\sqrt{j \sin \phi}} \times \exp \left( j\pi \frac{(t^2 + u^2) \cos \phi - 2tu}{\sin \phi} \right) \quad (11)$$

$K_p(t, u)$  称为 FRFT 的核函数。当旋转到如图 1(b)的  $u$  域时 LFM 信号得到解线调。计算此时  $x_\alpha(u)$  的 TBP 即为 GTBP。

令分数阶域  $\alpha_0^{\text{th}}$  高斯窗为  $g(\tau) = e^{-2\pi\gamma\tau^2/2}$ , 由式(9)和式(10)

$$\text{有 } \gamma = B_{x\alpha_0} / T_{x\alpha_0}, \quad T_{g\alpha_0} = \sqrt{\frac{T_{x\alpha_0}}{4\pi B_{x\alpha_0}}} \text{。对 } g(\tau) \text{ 进行 } -\alpha_0^{\text{th}} \text{ 反旋转}$$

到时频域, 有

$$[R_g^\alpha(\tau)]^* = R_g^{\alpha^*}(\tau) = K e^{-\frac{j\pi\gamma^2 \cot \phi_0 (\gamma^2 - 1)}{\gamma^2 + \cot^2 \phi_0} \tau^2 - \frac{\pi\gamma^2 \gamma \csc^2 \phi_0}{\gamma^2 + \cot^2 \phi_0} \tau}$$

式中

$$K = \sqrt{\frac{1 + j \cot \phi_0}{\gamma + j \cot \phi_0}} \quad (12)$$

这时  $[R_g^\alpha(\tau)]^*$  对  $x(t)$  既具有最佳的 GTBP, 且有解线调的作用。令  $g_{\text{opt}}(u) = [R_g^\alpha(\tau)]^* = R_g^{\alpha^*}(\tau)$ , 对应式(6)和式(12), 可设

$$\gamma = \frac{\cot \phi_0 (\gamma^2 - 1)}{\gamma^2 + \cot^2 \phi_0}, \quad \lambda = \frac{\gamma \csc^2 \phi_0}{\gamma^2 + \cot^2 \phi_0} \quad (13)$$

由上分析可知, 具有  $g_{\text{opt}}(u)$  优化窗的 GCT 对 LFM 信号有很

好的时频聚集性。由于以 STFT 的方式实现，因此对多分量信号没有交叉项。对多分量信号且调频斜率相同的信号具有良好的分辨率。但对多分量信号且调频斜率不同的信号具有“偏向性”，即只对匹配的线调频信号具有很高的时频聚集性。下面简单进行分析。

设有两个 LFM 信号  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{j(f_{10}t - k_1t^2/2)} + e^{j(f_{20}t - k_2t^2/2)}$ ，当  $g_{opt}(u)$  与  $x_1(t)$  匹配时的 GCT 的谱有两个信号项：

对  $x_1(t)$ ，有 
$$SPEC_{GCT}(t, f)|_{x_1} = A_{\phi_0} \delta(f - k_1t - f_{10}) \quad (14)$$

对  $x_2(t)$ ，有 
$$SPEC_{GCT}(t, f)|_{x_2} = A'_{\phi_{01}} \exp\{-(f - k_1t - f_{20})^2 / B_{\phi_{01}}^2\} \quad (15)$$

对与  $g_{opt}(u)$  匹配的  $x_1(t)$ ，其时频谱分布为一冲激函数，有很好的时频聚集性。而其它信号由于谱不匹配而扩展。多分量 LFM 信号在不同的  $\alpha_0^{th}$  有与之对应的最优  $g_{opt}(u)$  窗将它解线调。且解线调后为时域的谐波函数，其频率为初始频率  $f_{i0}$ 。因此对多分量信号且调频斜率不同的信号可采用多窗来实现。最早 Thomson 用多窗的方法进行谱估计<sup>[8]</sup>。后来用于时频分布中的窗和自适应核设计<sup>[9]</sup>。这里采用多分数阶域优化的  $g_{opt}(u)$  窗。分数阶域优化的  $g_{opt}(u)$  窗的 GCT 对应的谱为

$$SPEC_{GCT}(t, f) = \sum_{\alpha_i} \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(u+t) g_{\alpha_i, opt}(u) \exp(-j2\pi f_c u) du \right|^2 \quad (16)$$

这里  $\alpha_i$  是各分量 LFM 信号优化窗  $g_{opt}(u)$  对应的分数阶域， $\alpha_i \in [-1, 1]$ 。

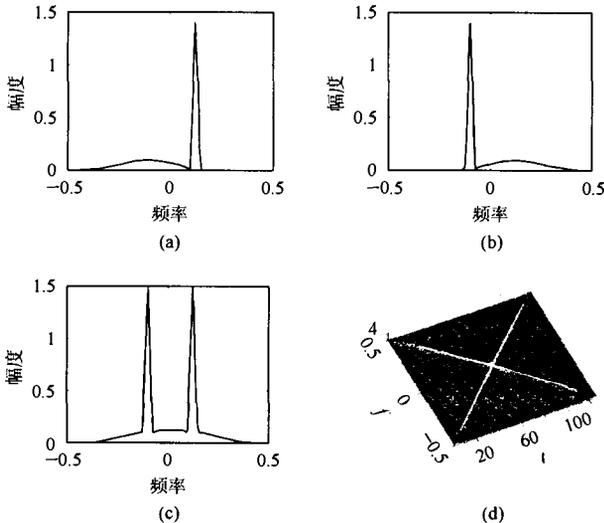


图2 两个 LFM 信号的 GCT，信号调频率分别为  $[-0.5 \ 0.5]$  和  $[0.5 \ -0.5]$

(a), (b) 分别为  $\phi_0 = 45^\circ$  和  $\phi_0 = 135^\circ$  的 GCT 某一时间切片；  
(c) 为 (a)、(b) 的叠加；(d) 为其自适应多窗 GCT

### 4 参数的优化

$g_{opt}(u)$  两个重要的参数  $\lambda, q$  与  $\gamma, \alpha_0^{th} (\phi_0 = \alpha_0 \cdot (\pi/2))$  相对应。参数  $\gamma$  使信号在  $\alpha_0^{th}$  域  $(u-v)$  具有最佳的 TBP， $\alpha_0^{th}$  使线调频信号解线调。参数  $\lambda$  和参数  $q$  是时间-频率域  $(t-f)$  与之“对应”的参数。从而使得  $g_{opt}(u)$  既具有解线调的作用，又使信号变换具有最佳的 GTBP。在时间-频率域的  $T_x, B_x$  定义为

$$T_x = \frac{\left[ \int (f - \eta_f)^2 |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}}{\|x\|}, \quad B_x = \frac{\left[ \int (f - \eta_f)^2 |X(f)|^2 df \right]^{\frac{1}{2}}}{\|x\|}$$

这里

$$\eta_t = \frac{\left[ \int |tx(t)|^2 df \right]}{\|x\|^2}, \quad \eta_f = \frac{\left[ \int |fX(f)|^2 df \right]}{\|x\|^2} \quad (17)$$

同理可以计算  $\alpha_0^{th}$  的  $T_{x\alpha}, B_{x\alpha}$ 。

$\gamma$  的选择依赖于  $\alpha_0^{th}$ ，因此如何选择  $\alpha_0^{th}$  这个参数成为关键。参数  $\alpha_0^{th}$  控制解线调核函数的频率倾斜率。若信号在短时间可视为线调频信号，搜索与线调频信号匹配的  $\alpha_0^{th}$  域可实现对信号的解线调。可以用能量聚集性判据来进行搜索。能量聚集性判据最早由 Jones 用来进行最优核设计。Jones<sup>[10]</sup> 提出模的高次方之比  $L_p/L_q (p>q)$  来评估时-频分布的聚集性，并发展为一大类聚集性判据。其基本思想是寻找一最佳窗使时频的每一点具有最小的时-频支撑。当窗完全与最小的时-频支撑匹配时能量最聚集。在分数阶 Fourier 域，对于线性调频信号，通过选择合适的角度就可以得到一个冲击信号。其能量在  $V$  轴的对应点聚集。因此可用分数阶 Fourier 域的能量聚集性来进行搜索。聚集性准则定义为

$$M_\alpha = \frac{\int |X_\alpha(u)|^2 du}{\left| \int X_\alpha(u) du \right|^{3/2}} \quad (18)$$

此定义近似于“峰度”的定义，即判断信号的能量在 Fourier 域上聚集性。很明显，能量聚集性判据在整个分数阶 Fourier 域只有一个最大值点，即最小的时频支撑只有一个。当  $u$  轴与最小的时频支撑的中心线平行时取得最大值。假设噪声是白噪声，其能量均匀分布在时频面，从而能量聚集性检测对噪声不是很敏感，能有效地抑制噪声的影响。当信号为单一的 LFM 信号时，很明显能量聚集性判据十分有效如图 3(a)。在多分量的情况下，若各分量能量相当，除一最大值点外，可形成一些局部极大值点如图 3(b)；当各分量能量不相当时，则只有一个最大值点，弱分量无法检测。主要原因

是聚集性准则要求在整个时-频域内具有很好的聚集性, 这很难做到多分量检测。

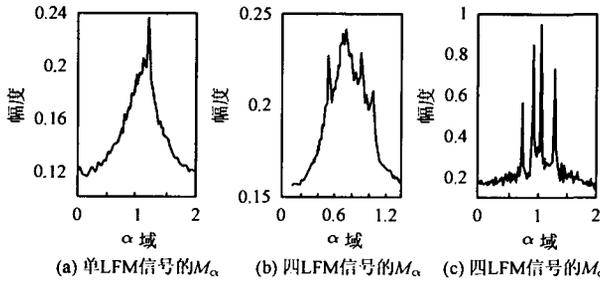


图 3 (SAR=-2.2789dB,  $\alpha=[12]$ )

为解决这个问题, Jones 和 Parks 提出了一种局域化聚集性准则。其思想是在时-频面上进行局部加时-频窗, 在时-频窗内计算其聚集性, 其具有优良的性能。但它是二维窗, 要控制的参数太多, 计算复杂。这里只需要对 FRFT 切片进行局部加窗即可。为解决这个问题, 这里提出一自适应窗对  $P_\alpha(u) = |X_\alpha(u)|$  按最大值局部加权, 其自适应窗函数定义为

$$H_\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2W(\alpha)+1} \left( 1 + \cos \frac{2\pi\tau}{2W(\alpha)+1} \right), & \tau \in [-W(\alpha), W(\alpha)] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$W(\alpha) = \frac{A}{\max(P_\alpha(u))} + B$$

$A, B$  是控制窗函数频率的常数;  $\max(P_\alpha(u))$  是  $P_\alpha(u)$  的最大值。聚集性准则可重写为

$$P'_\alpha(u) = \int P_\alpha(\tau) H_\alpha(u-\tau) d\tau, \quad M'_\alpha = \frac{\int |P'_\alpha(u)|^2 du}{\left| \int P'_\alpha(u) du \right|^{3/2}} \quad (20)$$

$W(\alpha)$  实际上是控制窗长的自适应函数。当  $\max(P_\alpha(u))$  增大时, 它减小;  $\max(P_\alpha(u))$  减小时, 它增大。当峰值  $\max(P_\alpha(u))$  增大时而窗长反而减小, 从而使局部“峰度”更加增大; 当峰值  $\max(P_\alpha(u))$  减小时而窗长反而增大, 从而使局部“峰度”更加减小。从而一方面突出多分量信号的某一分量在分数阶 Fourier 域的聚集性, 另一方面又有效地抑制噪声的干扰, 结果如图 3(c)。因此  $\alpha_0^{\text{th}}$  域的选择准则为

$$\alpha_{L\max} = \arg\{\text{Local max } M'_\alpha > \eta\}_{\alpha \in [1,2]} \quad (21)$$

即  $\alpha_{L\max}$  域的选择为  $M'_\alpha$  对应的局部极大值大于某一阈值  $\eta$  时所有  $\alpha$  值。转化到解线调  $u$  域:  $\alpha_0^{\text{th}} = \alpha_{\max} - 1$ 。另外, 对  $\alpha$  的搜索可以确定一大致范围:  $|\alpha| \leq \frac{B_{x0}}{T_{x0}}$ 。

### 5 算法的实现

设离散化的信号为

$$x(nT) = s(nT) + \varepsilon(nT) = Ae^{j\varphi(nT)} + \varepsilon(nT) \quad (22)$$

$A = a_0 e^{a\pi(nT)^2/2}$  为信号幅度调制;  $\varphi(nT)$  为非线性相位;  $\varepsilon(nT)$  设为零均值的复高斯白噪声, 方差为  $\delta_\varepsilon^2$ 。 $x(nT)$  高斯线调频小波变换以 STFT 计算的离散形式为

$$\text{GCT}_x(k, f) = e^{j\varphi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(kT+mT) g_{\text{opt}}(mT) e^{-j2\pi f m T} \quad (23)$$

高斯线调频小波变换以谱实现的分布为  $\text{SPEC}_{\text{GCT}}(t, f) = |\text{GCT}_x(k, f)|^2 =$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(kT+mT) x^*(kT+nT) g_{\text{opt}}(mT) g_{\text{opt}}^*(nT) e^{-j2\pi f(m-n)T} \quad (24)$$

对于线性调频信号最佳  $\alpha_0^{\text{th}}$  域搜索可一次求得。而非线性调频信号需要自适应  $g_{\text{opt}}(u)$  的参数。高斯线调频小波变换的算法如下:

- (1) 采样数据  $x(nT), n=[1, N]$ 。
- (2) 对于时刻  $t = t_0$ , 用传统的矩形窗  $g(\tau)$  取一小段数据,  $g(\tau)=0$ , 当  $|\tau| < L, L \ll T$ 。
- (3) 计算  $t_0$  时的 FRFT, 搜索最佳的  $\alpha_{\max}$ 。 $\alpha_0 = \alpha_{\max} - 1$ 。在多分量的情况下, 设置一阈值  $\eta$ ,  $\alpha_{L\max} = \arg\{\text{Local max } M'_\alpha > \eta\}_{\alpha \in [1,2]}$ 。
- (4) 计算  $\lambda = B_{x_{\alpha 0}}/T_{x_{\alpha 0}}$ ,  $g(\tau) = e^{-\lambda|\tau|^2}$ 。计算  $g_{\text{opt}}(u) = R_g^\alpha(\tau)$ 。
- (5) 计算  $\text{GCT}_x(k, f)$  (可用快速的 FFT 实现)。计算  $\text{SPEC}_{\text{GCT}}(t, f)$ 。
- (6)  $t = t+1$ , 转到(2)。

GCT 的分布可以以谱的形式实现, 也可以以其它分布形式实现, 其伪 WVD 分布实现形式为

$$\text{PWD}_{\text{GCT}}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{GCT}(t, f + \theta/2) \text{GCT}^*(t, f - \theta/2) d\theta \quad (25)$$

可以依此推广到整个科恩类分布。

### 6 仿真分析

- (1) 信号 1 采用三阶非线性相位调频信号

$$x(t) = \exp(j(-0.0006(t-t_0)^3/3 + 0.0769(t-t_0)^2/2 - 3.1416(t-t_0)))$$

信号采样长度  $T=255$ , 高斯窗长  $N_g=127$ ,  $nT_0=128$ 。分析结果如图 4。图 4(a)为信号的 WVD 分布; 图 4(b)为信号的 STFT

的谱分布;图4(c)为信号的GCT的谱分布。WVD的时频聚集性良好,但很明显存在交叉项。STFT的谱分布不存在交叉项,但时频聚集性差。信号的GCT的谱分布不仅存在交叉项,其时频聚集性完全可以和WVD媲美。

(2) 信号2采用3分量三阶非线性相位调频信号:

$$x(t) = \exp j0.0017(t-t_0)^3/3 + \exp j(-0.3142(t-t_0)+0.0017(t-t_0)^3/3) + \exp j(-1.8850(t-t_0)+0.0017(t-t_0)^3/3)$$

信号采样长度  $T=255$ , 高斯窗长  $N_g=127$ ,  $nT_0=128$ 。第1个分量与第2个分量在归一化的频率  $[-0.5, 0.5]$  中的间距仅为0.05。用于考察GCT的分辨能力,进一步验证其时频聚集性。分析结果如图5。图5(a)为信号的WVD分布;图5(b)为信号的STFT的谱分布;图5(c)为信号的GCT的谱分布。WVD虽然有好的时频聚集性,但第1个分量与第2分量已完全淹没在交叉项之中。一些交叉项的幅值远大于自项。STFT的谱分布无法分辨第1个分量与第2分量。而GCT的谱分布形式完全可将其分辨。

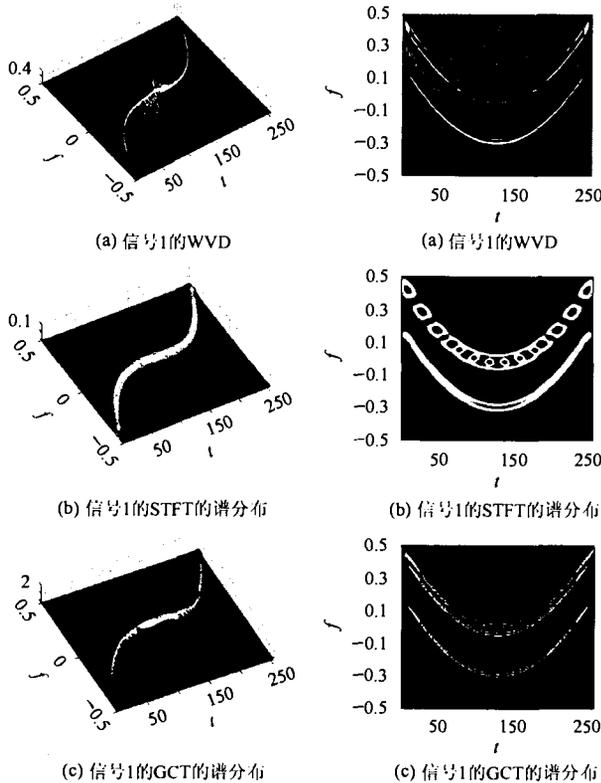


图4

图5

(3) 图6(a)是4个调频斜率不同 LFM 信号的多分数阶 Fourier 窗 GCT。可以看出,在调频斜率不同的情况下,采用多分数阶优化高斯窗的 GCT 具有良好的时频聚集性。在非线形多分量情况时,可采用自适应的方式。如图6(b)是一

非线性 LFM 信号与一 LFM 信号组成的多分量信号的 GCT。

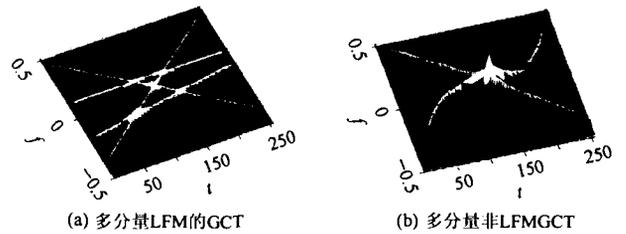


图6

(4) GCT 能有效地抑制噪声的干扰。图7(a)为3分量 LFM 有噪的 GCT 谱分布。3个分量的调频范围分别为  $[-0.2, 0.3]$ ,  $[-0.15, 0.35]$ ,  $[-0.10, 0.40]$ ,  $N=255$ ,  $SNR=-3.5218\text{dB}$ 。图(b)为信号2的第1分量的低信噪比下 GCT 的谱分布,  $SNR=-2.2789\text{dB}$ 。

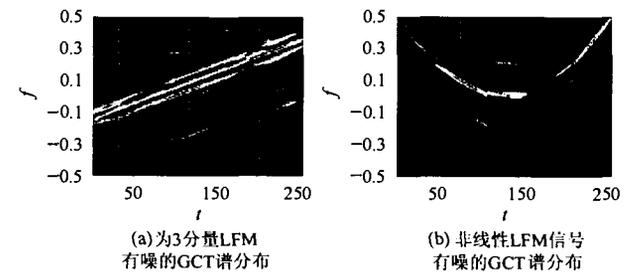


图7

### 7 结束语

线调频小波变换与其它信号分析工具一样,线调频小波变换展现出作为一种新的信号分析工具所具有的特点和吸引力。本文只是讨论了线调频小波变换的一个特例:高斯线调频小波变换。推导出高斯线调频小波变换(GCT)的短时 Fourier 变换计算形式。并利用分数阶 Fourier 变换和广义的时宽-带宽积来优化 GCT 的参数。同时,简单地讨论其多窗实现。线调频小波变换其它诸多形式与实现更有待研究与挖掘。

### 参考文献

- [1] Folland G B. Harmonic Analysis in Phase Space. Princeton, NJ: Princetin Univ. Press, 1989: 345 - 367.
- [2] Mann S, Haykin S. The Chirplet Transform: Physical Considerations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(4): 2745 - 2761.
- [3] 张贤达,保铮. 非平稳信号分析与处理. 国防工业出版社, 1999: 307 - 322.
- [4] Durak L, Arýkan O. Short-Time Fourier Transform: Two Fundamental Properties and an Optimal implementation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(5): 1231 - 1242.
- [5] Almeida L B. The Fractional Fourier Transform and Time-

- Frequency Representation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(10): 3084 – 3091.
- [6] Ozaktas H M. Digital Computation of the Fractional Fourier Transform. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44(9): 2141–2150.
- [7] Stankovic L, Alieva T. Time –Frequency Signal Analysis Based on the Windowed Fractional Fourier Transform. *Signal Processing*, 2003, 83(11): 2459 – 2468.
- [8] Thomson D J. Spectrum Estimation and Harmonic Analysis. *Proc IEEE*, 1982, 70: 1055–1096.
- [9] 邹红, 保铮. 用于多分量线性调频信号的自适应核分布分析. 电子与信息学报, 2002, 24(3): 314 – 319.
- [10] Jones D L, Parks T W A. High Resolution Data-Adaptive Time-Frequency Representation, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1990, 38(9): 2127.
- 尉宇: 男, 1970年生, 武汉科技大学副教授, 博士生, 从事信号处理的研究.
- 孙德宝: 男, 1954年生, 教授, 博士生导师, 从事人工智能、信号处理等方面的研究工作.
- 岑翼刚: 男, 1978年生, 博士生, 从事信号处理、小波分析等方面的研究.