第 18 卷 第 4 期
1996 年 7 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.18 No.4
July 1996

电磁逆散射非相关照射法的普遍公式 [1]

王卫延　　张守融

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘要　由第一类 Fredholm 积分方程所描述的电磁逆散射问题是非适定问题。通过一系列非相关照射，有可能获得散射体的更多信息，从而改善解的非适定性。本文基于求解逆散射问题的非相关原理，推导了适于散射体在各种正交基下展开，求解电磁逆散射的普遍公式，并对所建立的参数反演公式解的唯一性进行了证明。

关键词　电磁逆散射，非相关照射，矩量法

中图号　O441

1 前　言

电磁逆散射的核心问题是求解第一类 Fredholm 积分方程，但从本质上讲这是一个非适定问题 (ill-posed problem), 方程的解异常敏感，系统的任何微小扰动都可能使解发生极大偏差，这是导致电磁逆散射问题困难的根本原因。即使把问题离散化，人们也不可能采用经典的数值方法得到有意义的结果。正因为这样，不少人一直探索各种在正则化基础上建立的迭代方法 [1,2] 以得到收敛的结果。从另一个角度来看，电磁逆散射的困难或许是由于未能充分地获得待求散射体信息而造成的。当我们把散射体视为一个黑箱，把描述散射体的结构参数看作黑箱内部的未知量，那么相应的入射场和散射场就成为与黑箱相联系的输入和输出量。显然，作为输出量的体外散射场不仅与入射场有关，而且还被印上了黑箱内部未知量的标记。为了充分地获取黑箱内部的信息，减少问题的非适定性，人们可以通过向黑箱施加一系列不同的输入，再从输出中“换取”更多的信息来实现。正是基于这样的思想，作者提出了求解电磁逆散射的非相关照射法 [3,4] 为了使这种方法更具普遍意义，便于求解不同类型的散射体，本文进一步给出适合在各种基函数展开下，不均匀损耗介质体电磁逆散射的普遍公式。文章详细地推导了有关的数学公式，并对所建立的反演公式解的唯一性做了必要的证明。

2 数学公式

考虑自由空间中的损耗介质体 (可以是一维，二维或三维的), 在入射场的作用下，介质体内的总电场和介质体外的散射场可分别由电场积分方程表示出来：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\int_{v}\overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')\tau(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v'+\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{x}),\tag{1}$$

[1] 1994-05-15 收到， 1995-11-29 定稿
国家自然科学基金资助项目

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{x}) = \int_v \overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')\tau(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v'. \tag{2}$$

以上两式中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}^i$ 分别是介质体内部总电场和入射场；$\boldsymbol{E}^s$ 是介质体外部散射电场；$\overline{\boldsymbol{G}}$ 是并矢 Green 函数；而 τ 是表示介质体参数分布的变量，它定义为

$$\tau(\boldsymbol{x}) = k_0^2[\epsilon_r(\boldsymbol{x}) - 1 + i\sigma(\boldsymbol{x})/(\omega\epsilon_0)], \tag{3}$$

其中 ϵ_r 和 σ 分别代表介质体的相对介电常数和电导率；ϵ_0 是自由空间的介电常数；ω 是工作角频率；k_0 是自由空间的波数。

2.1 介质体内的总电场

选择两组基函数 $f_m(\boldsymbol{x}), g_l(\boldsymbol{x})$, 其中 $g_l(\boldsymbol{x})$ 是在适当的内积形式 $<,>$ 下正交归一的。把 (1) 式右边的 $\boldsymbol{E}$ 和 τ 分别在这两组基下展开：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L} \boldsymbol{e}_l g_l(\boldsymbol{x}), \tag{4a}$$

$$\tau(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{M} t_m f_m(\boldsymbol{x}). \tag{4b}$$

(1) 式可写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} t_m \Big(\int_v \overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')g_l(\boldsymbol{x}')f_m(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v'\Big) \cdot \boldsymbol{e}_l + \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

按 Galerkin 作法，选择 $g_n(\boldsymbol{x})$ 作为权函数，并用 $g_n(\boldsymbol{x})$ 对 (5) 式两端取内积，我们得到

$$\boldsymbol{e}_n = \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} t_m \Big(\int_v < \overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'), g_n(\boldsymbol{x}) > g_l(\boldsymbol{x}')\ f_m(\boldsymbol{x}')dv'\Big) \cdot \boldsymbol{e}_l + \boldsymbol{e}_n^i, \quad n = 1,2,\cdots,L, \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_n^i = < \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x}), g_n(\boldsymbol{x}) > . \tag{7}$$

如果记

$$\phi_{ij}(m,n,l) = \int_v < G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'), g_n(\boldsymbol{x}) > g_l(\boldsymbol{x}')f_m(\boldsymbol{x}')dv', \quad i,j = 1,2,\cdots,\alpha, \tag{8a}$$

$$a_{ij}(n,l) = \sum_{m=1}^{M} t_m \phi_{ij}(m,n,l), \tag{8b}$$

$$\overline{\boldsymbol{a}}(n,l) = \sum_{i,j=1}^{\alpha} a_{ij}(n,l)\hat{\boldsymbol{x}}_i\hat{\boldsymbol{x}}_j, \tag{8c}$$

式中 α 表示所要解决问题的维数，G_{ij} 表示并矢 Green 函数的不同分量，那么 (6) 式可被简化为

$$e_n = \sum_{l=1}^{L} \overline{a}(n,l) \cdot e_l + e_n^i, \quad n = 1, 2, \cdots, L. \tag{9}$$

进一步，(9) 式可写成矩阵方程的形式：

$$([A] - [I])(e) = -(e^i), \tag{10}$$

式中 $[A]$ 是 $\alpha L \times \alpha L$ 的方阵，其元素 $A(n,l)$ 来自 (8b) 式

$$A(n,l) = a_{n^* l^*}(n', l'), \tag{11}$$

其中序号 n^*, l^*, n', l' 分别定义为

$$n^* = \mathrm{int}(n/L+1), \quad l^* = \mathrm{int}(l/L+1), \quad n' = \mathrm{mod}(n, L), \quad l' = \mathrm{mod}(l, L); \tag{11}$$

$[I]$ 是同阶的单位阵；而 (e) 和 (e^i) 则是包含了 αL 个元素的总电场列矢量和入射电场列矢量，它们分别来自 e_l 和 e_n^i 的不同分量。事实上，作为正散射问题，矩阵 $([A] - [I])$ 始终是可求逆的，因此

$$(e) = -\big([A] - [I]\big)^{-1}(e^i). \tag{12}$$

(12) 式给出了散射体内总电场与入射电场间一一对应的关系。当我们用 αL 个各不相同的入射波照射同一散射体 (包括改变波源的位置, 照射方向, 波束形状和极化方向等),(12) 式可以被扩展为

$$[e] = -\big([A] - [I]\big)^{-1}[e^i], \tag{13}$$

式中 $[e]$ 和 $[e^i]$ 都是由 αL 个列矢量构成的方阵，每个列矢量对应于在一种入射波照射下的总电场和入射电场列矢量。

2.2 介质体外的散射电场

利用 (4) 式的展开式，在介质体外 $\boldsymbol{x}_p$ 点的散射场可以写为

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{x}_p) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} t_m \int_v \overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}') g_l(\boldsymbol{x}') f_m(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}v', \quad p = 1, 2, \cdots, P. \tag{14}$$

如果记

$$\psi_{ij}(m,p,l) = \int_v G_{ij}(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}') g_l(\boldsymbol{x}') f_m(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}v', \quad i,j = 1, 2, \cdots, \alpha, \tag{15a}$$

$$b_{ij}(p,l) = \sum_{m=1}^{M} t_m \psi_{ij}(m,p,l), \tag{15b}$$

$$\overline{b}(p,l) = \sum_{i,j=1}^{\alpha} b_{ij}(p,l) \hat{x}_i \hat{x}_j, \tag{15c}$$

(14) 式可简化为

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{x}_p)=\sum_{l=1}^{L}\bar{\boldsymbol{b}}(p,l)\cdot\boldsymbol{e}_l,\quad p=1,2,\cdots,P. \tag{16}$$

(16) 式也可以写为矩阵方程：

$$(E^s)=[B](e), \tag{17}$$

式中 $[B]$ 是 $\alpha P\times\alpha L$ 的矩阵，其元素来自 (15b) 式，

$$B(p,l)=b_{p^*l^*}(p',l'), \tag{17a}$$

序号 p^*,l^*,p',l' 的定义与 (11) 式相同；(E^s) 是包含 αP 个元素的散射电场列矢量，其元素来自 P 个场点 α 个不同分量的散射电场。同样，在多次照射下，(17) 式也可扩展为

$$[E^s]=[B][e]. \tag{18}$$

$[E^s]$ 由 αL 个列矢量构成，每个列矢量对应于一种入射波照射下的散射电场列矢量。把 (13) 式代入 (18) 式，我们得到

$$[E^s]=-[B]\big([A]-[I]\big)^{-1}[e^i]. \tag{19}$$

2.3 非相关照射原理

(19) 式给出了由入射场矩阵直接表达散射场矩阵的关系式。很明显，散射场不仅依赖于入射场，而且还依赖于这个系统的传输函数或传输矩阵 $-[B]\big([A]-[I]\big)^{-1}$。在每一个入射场列矢量的作用下，相应的散射场列矢量包含着介质体参数分布的一组信息；如果施加于散射体的所有入射场列矢量相互都不能线性表达，即入射场矩阵是一个满秩的矩阵，那么在散射场中将充分包含介质体参数分布的信息。利用这些信息必能大大减少问题的非适定性，从而克服电磁逆散射求解的困难。这样一系列照射被称为非相关照射。在非相关照射的条件下，入射矩阵 $[e^i]$ 是非奇异阵，$[e^i]^{-1}$ 存在，因此 (19) 式可以写为

$$[EE][A]+[B]=[EE], \tag{20}$$

其中 $[EE]$ 是系统的传输矩阵，它由下式给出：

$$[EE]=[E^s][e^i]^{-1}. \tag{20a}$$

2.4 介质体复参数反演

借助于非相关照射，可以建立一个求解介质体复参数的良态线性方程组。通过对比 (20) 式两边第 p 行的元素，我们得到

$$\sum_{q=1}^{L}EE(p,q)A(q,l)+B(p,l)=EE(p,l),\quad l=1,2,\cdots,\alpha L \tag{21}$$

由于

$$A(q,l)=a_{q^*l^*}(q',l')=\sum_{m=1}^{M}t_m\phi_{q^*l^*}(m,q',l'),$$

$$B(p,l)=b_{p^*l^*}(p',l')=\sum_{m=1}^{M}t_m\psi_{p^*l^*}(m,p',l'),$$

(21) 式可进一步写为未知量 t_m 的表达式：

$$\sum_{m=1}^{M}t_mD_p(l,m)=EE(p,l),\quad l=1,2,\cdots,\alpha L \tag{22}$$

其中

$$D_p(l,m)=\sum_{q=1}^{L}EE(p,q)\phi_{q^*l^*}(m,q',l')+\psi_{p^*l^*}(m,p',l'). \tag{22a}$$

(22) 式构成了一个求解 t_m 的线性方程组，用矩阵方程表达更为简洁

$$[D_p](T)=(EE_p), \tag{23}$$

$[D_p]$ 是 $\alpha L\times M$ 矩阵，其元素由 (22a) 式给出；(T) 是由 t_m 构成的 M 元素的列矢量；而 (EE_p) 则是由 $[EE]$ 矩阵第 p 行元素构成的列矢量。借助于基函数的正交性，可以证明 $[D_p]$ 是一个满秩矩阵 (见附录) 。当 $\alpha L\geq M$ 时， (23) 式的解 (T) 是被唯一地确定的。再利用 (4b) 和 (3) 式就可以得到介质体的复参数 $\tau(\boldsymbol{x})$, 以及相应的介电常数和电导率的分布。

3 结　论

非相关照射可以尽可能多地获取目标的信息，这是一个普遍的原则。事实上其它领域成功的目标成象技术，无论是 CT 还是 NMR, 都采用了这一手段。通过施加一系列不同的照射，取得目标在各个方向的“投影”，再经一些特殊的数学变换最终得到清晰的目标图象。

对电磁逆散来说，非相关照射同样是一种充分获取目标信息的重要手段。不论被反演的目标是介质体还是导体，处于全空间或半空间，描述目标特性的结构参数或复介电常数是被包含在其传输函数中，直接的想法是在获得系统的传输函数后再求解目标的参数。从 (19), (20) 两式可以看出，恰恰是一组非相关照射，使我们能得到入射场与散射场之间的传输矩阵 $[EE]$, 并由此求解散射体的参数。

针对不同的目标选取适当的正交基函数，有可能使求解的过程变得很简单。选取脉冲基函数来展开介质体的参数分布，文献 [3,4] 的参数反演公式大大地被减化，但是待求未知量的数目大，要求的非相关照射也多；而选用全域基函数虽然会使计算复杂，但有时却可减少待求未知量的数目，并只要求较少的非相关照射次数。究竟选择哪种基函数为宜，应根据具体问题来定。

4 附 录

利用 (22a), (8a) 和 (15a) 式，正文中的矩阵 $[D_p]$ 可以归纳为以下形式：

$$[D_p]=\begin{bmatrix}\int_v a(x,x_p)f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x, & \cdots\cdots & \int_v a(x,x_p)f_1(x)g_L(x)\mathrm{d}x\\ \int_v a(x,x_p)f_2(x)g_1(x)\mathrm{d}x, & \cdots\cdots & \int_v a(x,x_p)f_2(x)g_L(x)\mathrm{d}x\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \int_v a(x,x_p)f_M(x)g_1(x)\mathrm{d}x, & \cdots\cdots & \int_v a(x,x_p)f_M(x)g_L(x)\mathrm{d}x\end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

其中 $\{f_m(x)|_{m=1,2,\cdots,M}\}$, $\{g_l(x)|_{l=1,2,\cdots,L}\}$ 分别是两组正交基函数， $a(x,x_p)$ 是一非零函数，v 是所涉及到的积分域。

首先假设 $[D_p]$ 是一个不满秩的矩阵，因此至少有一列 (行) 元素可以由其余列 (行) 元素的线性组合表达。不妨设第一列向量可以由第 2 至第 L 列向量线性表达，那么

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \int_v a(x,x_p)f_m(x)g_1(x)\mathrm{d}x\\ \cdots\\ \cdots\end{pmatrix}=\sum_{l=2}^{L}\gamma_l\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \int_v a(x,x_p)f_m(x)g_l(x)\mathrm{d}x\\ \cdots\\ \cdots\end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

这样我们得到

$$\int_v a(x,x_p)f_m(x)\Big(g_1(x)-\sum_{l=2}^{L}\gamma_l g_l(x)\Big)\mathrm{d}x=0. \tag{A.3}$$

考察 (A.3) 式积分号下的函数，由于 $a(x,x_p)$ 是非零函数， $f_m(x)$ 是基函数，为使积分在任意涉及的区域为零，只有

$$g_1(x)=\sum_{l=2}^{L}\gamma_l g_l(x). \tag{A.4}$$

显然 (A.4) 式与前提中 $\{g_l(x)\,|_{l=1,2,\cdots,L}\}$ 是一组正交基函数相矛盾，假设不成立。所以矩阵 $[D_p]$ 是满秩矩阵. 由此可以得到这样的结论：两组正交基的外积与任意非零函数的乘积作为被积函数，所构成的积分矩阵是满秩矩阵。

参 考 文 献

[1] Chiu C C, Kiang Y W. Inverse Problems, 1991, 7(1): 187–202.:

[2] Hansen P C. Inverse Problems, 1992, 8(3): 849–872.

[3] Wang Weiyan, Zhang Shourong. IEEE Trans. on AP, 1992, AP-40(11): 1292–1296.

[4] 王卫延，张守融. 电子科学学刊， 1992, 14(3): 240–246.

A GENERAL FORMULA OF UNRELATED ILLUMINATION METHOD FOR THE EM INVERSE SCATTERING PROBLEM

Wang Weiyan Zhang Shourong

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract The electromagnetic inverse scattering problem governed by the first kind of Fredholm integral equation is an ill-posed problem. By the aid of a series of unrelated illuminations, more information about the considered object can be obtained and then a stable moment solution is achieved. On the basis of the unrelated illumination method(UIM), the paper derived a general formula that is suitable for solving the electromagnetic inverse problem, for which the object to be reconstructed may be expanded in various sets of orthogonal bases. The uniqueness of the solution has been proved.

Key words Electromagnetic inverse scattering, Unrelated illumination, Moment method

王卫延： 男， 1947 年生，副研究员，从事电磁散射、逆散射及微波成象的研究.
张守融： 男， 1942 年生，副研究员，从事电磁散射、逆散射及微波成象的研究.