

用谱域导抗法计算铁氧体加载 鳍线的传输特性

顾长青

(南京航空学院电子工程系, 南京 210016)

摘要 本文从 Maxwell 方程出发, 经过 Fourier 变换和坐标旋转, 将铁氧体中的非寻常波分解成 TE 和 TM 波, 并给出它们的波导纳。利用边界条件, 忽略 TE 和 TM 波间耦合的影响后, 将鳍线用一等效网络表示。本文方法与 T. Itoh 提出的谱域导抗法比较, 在等效网络中引入了理想变压器元件。最后对铁氧体加载单侧鳍线的正反向传播常数进行了数值计算, 其结果与有关文献中数据吻合得很好。

关键词 电波传播; 铁氧体; 鳍线; 谱域导抗法

一、引言

鳍线由于具有单模频带宽、色散低、损耗小、易于与其它元件集成等优点, 已经在毫米波集成电路中得到广泛应用。近年来, 特别对磁性介质材料加载鳍线构成的非互易器件(如隔离器、环形器^[1])的研究, 开始引起人们的极大兴趣。目前分析方法主要有模匹配法^[2]和谱域法^[3,4], 因存在当介质层数增多时, 推导特征方程的复杂程度大大增加以及当介质层数改变时, 推导过程要重新进行的缺点, 它们只适宜于简单的类微带结构。另一方面, 谱域导抗法^[5]已广泛应用于多层各向同性介质构成的各种类微带传输线的特性分析。本文对经过 Fourier 变换和坐标旋转的铁氧体中电磁场方程进行分析, 将铁氧体中的非寻常波分解成 TE 和 TM 波, 并定义它们的波导纳。根据边界条件, 忽略 TE 和 TM 波的耦合, 鳍线可用一含理想变压器的等效网络表示, 网络分析与 T. Itoh 提出的谱域导抗法相同。最后, 本文给出铁氧体加载单侧鳍线的正反向传播常数的数值解。

二、铁氧体介质的波导纳

鳍线结构及其坐标系如图 1 所示, 在导带与无耗铁氧体间夹一层非磁性介质层。设外加直流磁场方向与介质分界面平行, 它的单位矢量可表示为

$$\hat{b}_z = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \quad (1)$$

1991.11.14 收到, 1992.10.19 定稿。

顾长青 男, 1958 年生, 讲师, 从事电磁场与微波技术的教学和研究工作。主要研究方向为电磁散射、平面天线以及毫米波集成技术等。

其中 \hat{x} 和 \hat{y} 分别为 x 和 y 方向的单位矢量, φ 表示外加直流磁场与 x 轴的夹角。

设时间依赖因子为 $\exp(j\omega t)$, 铁氧体的相对磁导率张量形式在主坐标系(它与结构坐标系重合)中有

$$\begin{aligned} \bar{\mu}' &= \mu_{\perp} \bar{I} + (\mu_{\parallel} - \mu_{\perp}) \hat{b}_c \hat{b}_c \\ &\quad - j\mu_x (\hat{b}_c \times \bar{I}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\perp} &= 1 + \omega_m \omega_c / (\omega_c^2 - \omega^2) \\ \mu_{\parallel} &= 1, \quad \mu_x = \omega \omega_m / (\omega_c^2 - \omega^2) \end{aligned}$$

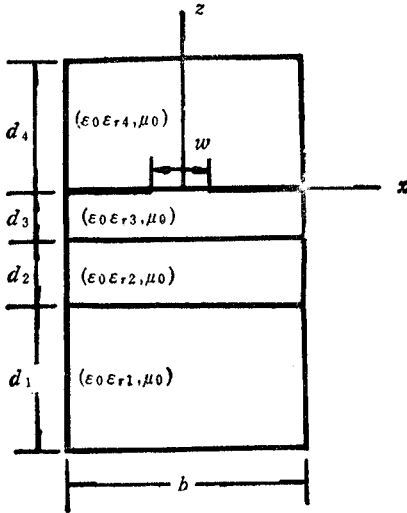


图1 锯线结构

注: 图中 d_1 层的 μ_0' 应为 $\bar{\mu}'$

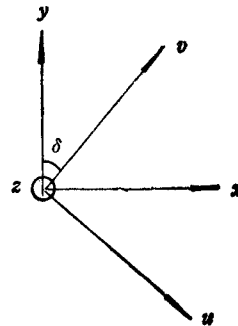


图2 坐标系间关系

$$\omega_m = 4\pi M, \gamma, \quad \omega_c = \gamma H_0$$

\bar{I} 为单位并矢, $\omega, H_0, 4\pi M,$ 和 γ 分别是工作频率, 外加直流磁场, 铁氧体的磁化强度和旋磁比。

1. 色散方程

在特征坐标系 (u, v, z) 中, 铁氧体的电磁场方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (3)$$

$\bar{\mu}$ 为特征坐标系中铁氧体的相对磁导率张量。它与 $\bar{\mu}'$ 关系由图 2 给出

$$\bar{\mu} = \bar{S} \cdot \bar{\mu}' \cdot \bar{S}^T \quad (4)$$

式中

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \delta = k_y/k_v; \quad \sin \delta = k_x/k_v; \quad k_v = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

由 Fourier 逆变换定义式

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(k_x, k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (5)$$

(3)式变为

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega\mu_0 \bar{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{H}}; \quad \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} = -\omega\epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathbf{E}} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{k} = k_v \hat{\rho} + j(\partial \hat{x} / \partial z)$, $\hat{\rho}$ 和 \hat{x} 分别是 v 和 x 方向的单位矢量, k_v 是 v 方向的传播常数。消去(6)式中电场 $\tilde{\mathbf{E}}$, 得到色散方程

$$\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0 \quad (7)$$

波矩阵 $\bar{W}(k)$ 为

$$\bar{W}(k) = k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I} + k k \quad (8)$$

式中 $k'^2 = k_0^2 \varepsilon_{r2}$, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, (7) 式是一齐次方程, 若存在非零解, 当且仅当波矩阵的行列式为零。根据下列公式

$$\begin{aligned} \det(\bar{W}) &= \det(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) + k \cdot \text{adj}(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) \cdot k \\ \det(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) &= k \cdot [(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) \cdot \text{adj}(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I})] \cdot k \\ \text{adj}(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) &= k^4 \bar{I} + k'^2 k^2 (\bar{\mu} - \bar{\mu}_s) \bar{I} + k'^4 \text{adj} \bar{\mu} \end{aligned}$$

其中 $\det(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 的行列式, $\text{adj}(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 伴随矩阵, 下标 s 表示矩阵的迹。最后色散方程为

$$(k \cdot \bar{\mu} \cdot k) k^2 + k'^2 k \cdot [\text{adj} \bar{\mu} - (\text{adj} \bar{\mu}) \bar{I}] \cdot k + k'^4 \det \bar{\mu} = 0 \quad (9)$$

将波矢 k 的表达式代入, 得到 Booker 四次方程

$$a q^4 + b q^2 + c = 0 \quad (10)$$

式中 q 是方程的根, 系数 a, b, c 为

$$\begin{aligned} a &= \mu_{\perp} \\ b &= [\mu_{\perp} + \mu_{\perp} \cos^2(\delta + \varphi) + \mu_{\parallel} \sin^2(\delta + \varphi)] k_v^2 - k'^2 \mu_{\perp} (\mu_e + \mu_{\parallel}) \\ c &= [\mu_{\perp} \cos^2(\delta + \varphi) + \mu_{\parallel} \sin^2(\delta + \varphi)] k_s^4 + k'^4 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \mu_e \\ &\quad - k'^2 k_v^2 [\mu_{\perp} \mu_e \cos^2(\delta + \varphi) + \mu_{\perp} \mu_{\parallel} (1 + \sin^2(\delta + \varphi))] \end{aligned}$$

其中 $\mu_e = \mu_{\perp} - \mu_s^2 / \mu_{\perp}$ 为标量有效磁导率。(10) 式是双二次方程, 由一元二次方程求根公式得

$$q_{\pm} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a) \quad (11)$$

下标“+”、“-”表示铁氧体中存在两个非寻常波, 它们沿 $k_{\pm} = k_v \hat{v} + q_{\pm} \hat{s}$ 方向传播。(说明: 在下文中不致混淆时, 略去上下标。)

2. 场矢量方向的确定

分两种情况讨论:

(1) 若 $\det(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) \neq 0$, 根据矩阵理论^[6]

$$\tilde{H} = \text{adj} \bar{W}(k) \cdot m \quad (12)$$

是齐次方程(7)式的解, 其中 m 是任意矢量。展开 \bar{W} 的伴随矩阵, 并选取 $m = k$, 可得 \tilde{H} 的方向为

$$\tilde{h} = [k^4 \bar{I} - k'^2 k^2 (\bar{\mu}_s \bar{I} - \bar{\mu}) + k'^4 \text{adj} \bar{\mu}] \cdot k \quad (13)$$

\tilde{E} 的方向由 Maxwell 方程直接给出

$$\tilde{e} = (-k \times \tilde{I}) \cdot \tilde{h} / (\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}) \quad (14)$$

(13)和(14)式中电磁场方向用分量形式可表示为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}_x &= [(\mu_{\parallel} - \mu_{\perp}) k^2 + \mu_{\perp} (\mu_e - \mu_{\parallel}) k'^2] k'^2 \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) k_x \\ &\quad - j \mu_s k'^2 (k^2 - \mu_{\parallel} k'^2) \sin(\delta + \varphi) q \\ \tilde{h}_y &= (k^2 - \mu_{\parallel} k'^2) [(k^2 - \mu_{\perp} k'^2) k_y + j \mu_s k'^2 \cos(\delta + \varphi) q] \\ &\quad + [(\mu_{\parallel} - \mu_{\perp}) k^2 + \mu_{\perp} (\mu_e - \mu_{\parallel}) k'^2] k'^2 \sin(\delta + \varphi) k_x \\ \tilde{h}_z &= (k^2 - \mu_{\parallel} k'^2) [(k^2 - \mu_{\perp} k'^2) q - j \mu_s k'^2 \cos(\delta + \varphi) k_x] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_u &= -\eta[-q\tilde{h}_v + k_v\tilde{h}_z]/(k_0\epsilon_{r2}) \\ \tilde{e}_v &= -\eta q\tilde{h}_u/(k_0\epsilon_{r2}) \\ \tilde{e}_z &= \eta k_v\tilde{h}_u/(k_0\epsilon_{r2}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16)式中 η 为自由空间波阻抗,上述式子表明,铁氧体中的电磁场是复数,这不同于各向同性介质。

(2) 若 $\det(k'^2\bar{\mu} - k^2\bar{I}) = 0$, 意味着 k^2 是 $\bar{\mu}k'^2$ 的本征值, 因此上述方法失效, 令 f 是本征值 k^2 对应的本征矢量, 由矩阵理论^[6]知道, 它的伴随矩阵一定是单个并矢, 且 f 由下式表示

$$f = \text{adj}(k'^2\bar{\mu} - k^2\bar{I}) \cdot m \quad (17)$$

在本文中只涉及 $k_+^2 = \mu_{11}k'^2$ 情况, 取 $m = \hat{e}_z$, 则

$$f = \hat{e}_z \quad (18)$$

且 f 满足

$$k \cdot f = 0 \quad (19)$$

限制条件。因此 $\tilde{h}_{v+} = 0$, \tilde{h}_{u+} 为

$$\tilde{h}_{u+} = C\hat{u} \quad (20)$$

其中 C 是任意常数, 电场方向仍由(14)式给出。因全部场矢量均垂直于波的传播方向, 非寻常波退化为横电磁波 (TEM 波)。

3. 波导纳

(1) 若 $\det(k'^2\bar{\mu} - k^2\bar{I}) \neq 0$, 从(13), (14)式得到 TE 和 TM 波的波导纳如下:

$$Y^h = \tilde{h}_v/\tilde{e}_u = k_0\epsilon_{r2}/[\eta(q - k_v\tilde{h}_z/\tilde{h}_v)]; \quad Y^e = -\tilde{h}_u/\tilde{e}_v = k_0\epsilon_{r2}/(\eta q) \quad (21)$$

上标 h, e 分别代表 TE 波和 TM 波。

(2) 若 $k_+^2 = \mu_{11}k'^2$, 由(18)和(14)式得到 TE 和 TM 波的波导纳如下:

$$Y_+^h = 0, \quad Y_+^e = k_0\epsilon_{r2}/(\eta q_+) \quad (22)$$

三、谱域导抗法

根据分界面上的边界条件, 注意到铁氧体中切向电场表达式

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{u+} & e_{u-} \\ e_{v+} & e_{v-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+ \\ C_- \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中 e_u, e_v 在(16)式中给出 C_+, C_- 是非寻常波的振幅。在 TE 和 TM 波间耦合很弱的条件下, 忽略 TE 和 TM 波间耦合, 可以得到下列矩阵方程

$$\begin{bmatrix} Y_{xx} & Y_{xy} \\ Y_{yx} & Y_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中 \tilde{J}_x 和 \tilde{J}_y 是导体上电流密度的 Fourier 变换。系数矩阵的元素为

$$\begin{aligned} Y_{xx} &= \tilde{Y}^e \cos^2 \delta + \tilde{Y}^h \sin^2 \delta \\ Y_{xy} &= Y_{yx} = \sin \delta \cos \delta (\tilde{Y}^e - \tilde{Y}^h) \\ Y_{yy} &= \tilde{Y}^h \cos^2 \delta + \tilde{Y}^e \sin^2 \delta \end{aligned}$$

$\tilde{Y}^{(i)}$ ($i=h, e$) 是 $z=0$ 处总的输入导纳。等于向上和向下看过去的输入导纳之和, 见图 1

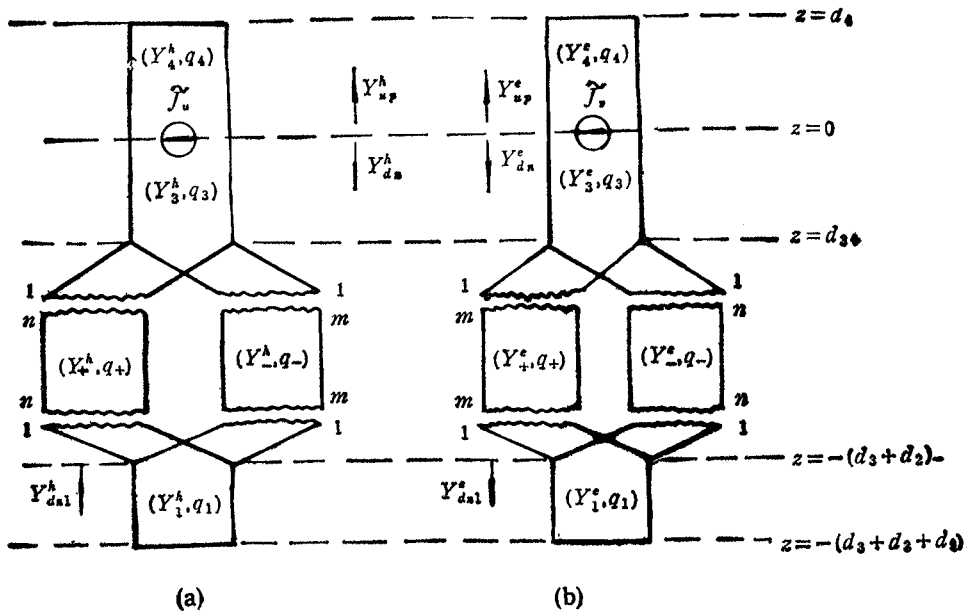


图3 鳍线结构的等效网络

结构的等效网络(图3)。在图中 n, m 表示理想变压器的匝数比, 它们之间有 $n^2 + m^2 = 1$ 关系, 匝数比对不同模式是不一样的。若 $\det(k'^2 \bar{\mu} - k^2 \bar{I}) \neq 0$, 匝数比分别表示为

$$n = \sqrt{e_{u+} e_{v-} / \Delta}, \quad m = \sqrt{-e_{u-} e_{v+} / \Delta} \tag{25}$$

其中 $\Delta = e_{u+} e_{v-} - e_{u-} e_{v+}$ 。若 $k_+^2 = \mu_{||} k'^2$ 时, 匝数比分别为

$$n = 1, \quad m = 0 \tag{26}$$

对(24)式使用谱域 Galerkin 法, \tilde{E}_x 和 \tilde{E}_y 需用一组基函数展开, 即

$$\tilde{E}_x = \sum_{i=1}^I c_i \xi_i(k_x), \quad \tilde{E}_y = \sum_{j=1}^J d_j \eta_j k_x \tag{27}$$

其中 c_i, d_j 是待定常数, 基函数 ξ_i 和 η_j 是

$$\begin{aligned} \xi_i(x) &= \cos [(i-1)\pi(2x/w+1)] / \sqrt{1-(2x/w)^2} \\ \eta_j(x) &= \sin [j\pi(2x/w+1)] / \sqrt{1-(2x/w)^2} \end{aligned}$$

的 Fourier 变换, 将(27)式代入(24)式, 两边用 ξ_i 和 η_j 进行内积, 运用 Parseval 定理, 得到关于待定常数 c_i, d_j 的齐次方程

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^I K_{pi}^{xz} c_i + \sum_{j=1}^J K_{pj}^{xy} d_j &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, I \\ \sum_{i=1}^I K_{qi}^{yz} c_i + \sum_{j=1}^J K_{qj}^{yx} d_j &= 0, \quad q = 1, 2, \dots, J \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

其中

$$K_{pi}^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_p(k_{xn}) Y_{xx}(k_{xn}, k_y) \xi_i(k_{xn})$$

$$K_{pi}^{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_p(k_{xn}) Y_{xy}(k_{xn}, k_y) \bar{\eta}_{ij}(k_{xn})$$

$$K_{qi}^{yz} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}_q(k_{xn}) Y_{yx}(k_{xn}, k_y) \xi_i(k_{xn})$$

$$K_{ji}^{zy} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}_q(k_{xn}) Y_{yy}(k_{xn}, k_y) \bar{\eta}_{ij}(k_{xn})$$

$$k_{xn} = n\pi/b$$

由(28)式就能求得铁氧体加载鳍线传播常数的数值解。

为了求出 $z = 0$ 处总的输入导纳,关键是求出 $Y_{dn}^{(i)}(i = h, e)$ 。由于篇幅限制,我们仅以图 3(a) 为例讨论 Y_{dn}^h 的计算。根据文献[7],图 3(a) 中 $z < 0$ 的等效网络可简单地用图 4 所示的框图形式表示,其中网络 $a(b)$ 由理想变压器 $a_1(b_1)$, 传输线单元 $a_2(b_2)$, 理想变压器 $a_3(b_3)$ 级联组成。网络 c 是传输线单元。网络 $a(b)$ 的转移矩阵 $\bar{A}_a(\bar{A}_b)$ 等于

$$\bar{A}_a = \prod_{i=1}^3 \bar{A}_{ai} = \begin{bmatrix} \cos(q-d_2) & j \sin(q-d_2)/(m^2 Y_a^h) \\ jm^2 Y_a^h \sin(q-d_2) & \cos(q-d_2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{A}_b = \prod_{i=1}^3 \bar{A}_{bi} = \begin{bmatrix} \cos(q+d_2) & j \sin(q+d_2)/(n^2 Y_b^h) \\ jn^2 Y_b^h \sin(q+d_2) & \cos(q+d_2) \end{bmatrix} \quad (30)$$

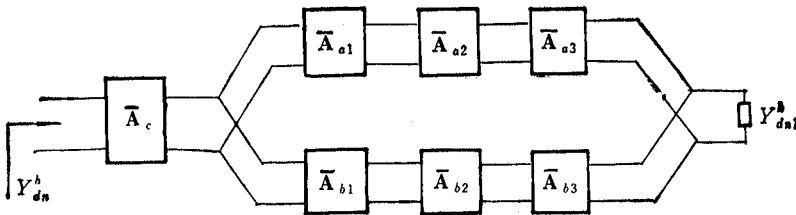


图 4 图 3(a) 中 $z < 0$ 网络的另一种表示

由上两式不难得到网络 $a(b)$ 的导纳矩阵 $\bar{Y}_a(\bar{Y}_b)$ 为

$$\bar{Y}_a = \begin{bmatrix} -jm^2 Y_a^h \text{ctg}(q-d_2) & jm^2 Y_a^h / \sin(q-d_2) \\ jm^2 Y_a^h / \sin(q-d_2) & -jm^2 Y_a^h \text{ctg}(q-d_2) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\bar{Y}_b = \begin{bmatrix} -jn^2 Y_b^h \text{ctg}(q+d_2) & jn^2 Y_b^h / \sin(q+d_2) \\ jn^2 Y_b^h / \sin(q+d_2) & -jn^2 Y_b^h \text{ctg}(q+d_2) \end{bmatrix} \quad (32)$$

一旦网络 a, b 并联后的转移矩阵 \bar{A}_{ab} 由 $\bar{Y}_a + \bar{Y}_b$ 求出,则整个网络的转移矩阵 \bar{A} 为

$$\bar{A} = \bar{A}_c \cdot \bar{A}_{ab} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

最后输入导纳 Y_{dn}^h 由公式

$$Y_{dn}^h = (A_{21} + A_{22} Y_{dn1}^h) / (A_{11} + A_{12} Y_{dn1}^h) \quad (34)$$

计算得到。

四、数值结果

在数值计算中, 取铁氧体加载单侧鳍线(图1)的参数为 $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r4} = 1$, $\epsilon_{r2} = \epsilon_{r3} = 12.5$, $b = 2.35\text{mm}$, $d_1 = d_4 = 2.1\text{mm}$, $d_2 = d_3 = 0.25\text{mm}$, $w = 1.0\text{mm}$, $4\pi M_s = 5000\text{G}$, $H_0 = 500\text{Oe}$, $\varphi = 0$, 并且取(27)式中 ξ_i, η_j 前两项, $K_{\rho i}^{\rho i}, K_{\rho i}^{\rho j}, K_{\rho j}^{\rho i}, K_{\rho j}^{\rho j}$ 表达式中求和项

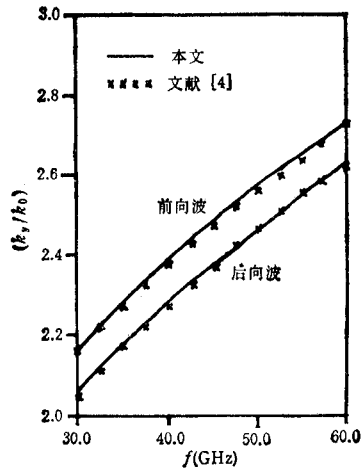


图5 铁氧体加载单侧鳍线的色散特性

为 250。数值解有 4 位数字的精度。在图 5 中我们给出了铁氧体加载单侧鳍线的正反向传播常数随频率变化曲线, 图中同时给出文献[4]的数值结果, 比较可以看出两者吻合得很好。

五、结 论

本文详细分析了铁氧体加载单侧鳍线的谱域导抗法, 它与 T. Itoh 提出的谱域导抗法一样具有特征方程推导简单的特点, 差别在于铁氧体与非磁性介质分界面处引入了理想变压器元件。数值结果表明, 本文近似是合理的, 有较高精度的数值解。

参 考 文 献

- [1] A. Beyer, I. Wolff, Finline Circulator and Isolator on the R-Band, presented at 11th Eur. Microwave Conf., Amsterdam, (1981), pp. 321—326.
- [2] G. Bock, *Electron. Lett.*, 18(1982)12, 536—537.
- [3] Y. Hayashi, R. Mittra, *IEEE Trans. on MTT*, MTT-31(1983)6, 495—498.
- [4] M. Geshiro, T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, MTT-35(1987)12, 1377—1381.
- [5] T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, MTT-20(1980)7, 733—736.
- [6] C. R. Wylie, *Advance Engineering Mathematics*, McGraw-Hill Book Co., New York, (1975), Chaps. 10 and 11.
- [7] 高保薪等编, 微波电路计算机辅助设计, 上册, 清华大学出版社, 北京, 1984年, 第 31—39 页。

A SPECTRAL-DOMAIN IMMITTANCE APPROACH FOR PROPAGATION CHARACTERISTICS OF FINLINE LOADED WITH FERRITE MEDIUM

Gu Changqing

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing 210016*)

Abstract The extraordinary waves of the ferrite medium are decomposed into TE and TM modes, through the Fourier transformation and a coordinate rotation of Maxwell's equations. The wave admittances of TE and TM modes is neglected, the finline with magnetized ferrite substrate can equally be represented by a network. Comparing this approach with T. Itoh's spectral domain immittance approach, the ideal transformers are used in the network. Finally, the forward and backward propagation constants for the unilateral finline loaded with magnetized ferrite have been calculated numerically. Numerical results agree well with that given by Geshiro and Itoh (1987).

Key words Wave propagation; Ferrite; Finline; Spectral domain immittance approach