

# 预报对流层距离误差的新方法

韩文峻 郑怡嘉 张武良

(中国科学院北京天文台,北京 100080) (中国电波传播研究所,河南新乡 453003)

**摘要** 基于对流层折射的准实测值,讨论了指数大气模型的合理性。根据 9km 高空折射率值的稳定性,总结出一种预报距离误差的简易方法;并从理论和实测上,讨论并验证了该法的精度。此外,还给出了统计回归折射误差的新参量并验证了它的有效性,特别是对距离误差的改进。

**关键词** 电波传播;对流层折射;距离误差预报;指数模型

## 一、引言

致力于对流层折射误差(包括角度误差和距离误差)的研究,在于取得良好的大气模型和简易的计算方法。此课题到 70 年代末期已有一定的结果:(1)根据地面折射率统计折射误差的线性回归式进行预测<sup>[1]</sup>。(2)对流层模型取为干湿项分别处理<sup>[1-3]</sup>。欲取得最精确的湿项模型,可采用水汽辐射计<sup>[4-6]</sup>,随测量系统实时实地测量。(3)为了避开计算低仰角折射误差的困难,采用垂直入射的折射误差与所谓的成图函数的乘积作为折射误差的预测公式。此成图函数是以初始仰角为参数的连分式型经验公式<sup>[7,8]</sup>。应当说若不考虑实用上的不便(包括计算和测量),采用地面折射率和实时实地水汽辐射计的测量,进行数值积分计算,可得到最精确的折射误差。然而考虑实用方便,到 80 年代仍有人在经验公式方面做工作<sup>[9-11]</sup>,但这些工作需要大量历史资料。本文首先从折射误差的准实测值,讨论了指数大气模型的合理性;又考虑到某些实际应用,如射电天文,低仰角观测并非一定需要,从而总结出一种简便易行的预测折射误差的新方法,同时提出了一些预测折射误差的线性回归的新参量。

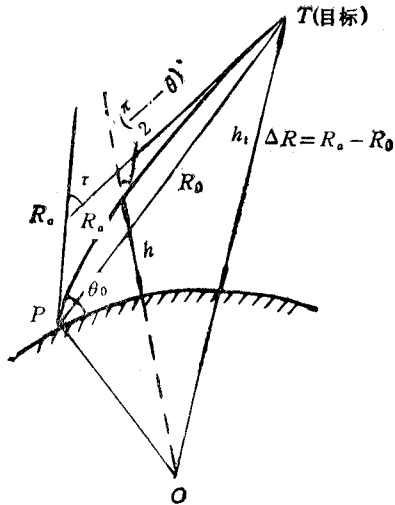
## 二、理论分析

用指数大气模型表征对流层的平均状态已被采用<sup>[1,12-14]</sup>。基于折射误差的准实测值,现在进一步说明它的合理性。折射率  $N \equiv (n - 1) \times 10^6$  随离地面高  $h$  (km) 变化的指数模型为

$$N(h) = N_0 \exp(-\Gamma h) \quad (1)$$

其中  $n$  为折射指数;  $N_0$  为地面折射率;  $\Gamma$  为折射率随高递减率 ( $\text{km}^{-1}$ ), 其倒数即标高。

当视在仰角  $\theta_0$  不是太小时,可合理地认为<sup>[1]</sup>,距离误差主要来自传播速度不同于光速.参  
照图 1,在指数模型下,距离误差  $\Delta R$  和全部  
弯曲角  $\tau$  可表示为



$$\left. \begin{aligned} \Delta R &\approx \int N \times 10^{-6} ds \\ \tau &= - \int_{n_s}^1 \cot \theta dn/n \\ &\approx \Gamma \cos \theta_0 \{ 1 - (157 - 2 \Gamma N_s) \times 10^{-6} \bar{h} \\ &\quad - N_s \times 10^{-6} \} \int N \times 10^{-6} ds \\ &\approx \Gamma \cos \theta_0 \int N \times 10^{-6} ds \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $h_i$  为目标高度,  $R_a$  为视在距离,  $R_0$  为  
真正距离,  $ds$  为射线元,  $\bar{h}$  为平均高度,从而  
得到

$$\tau / (\Delta R \cdot \cos \theta_0) = \Gamma = \text{const} \quad (3)$$

从文献[15,16]的推导中也可得到上式.直到现在历史悠久可资利用的对流层大气数据,  
还是气象探空资料.取探空数据的特性层作为大气模型,按线性分层计算折射误差,该误

表1  $\Gamma$  值计算表

月份	日期	$N_s$	项目	$\theta_0^{(0)}$						
				1	3	5	10	30	60	90
1	1	306	$\tau(\text{mrad})$	8.00	4.59	3.13	1.68	0.528	0.176	0
			$\Delta R(\text{m})$	64.9	37.0	25.1	13.6	4.86	2.81	2.44
			$\Gamma_1(\text{km}^{-1})$	0.123	0.124	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
	15	311	$\tau$	8.22	4.64	3.16	1.70	0.536	0.179	0
			$\Delta R$	67.6	39.2	26.9	14.8	5.30	3.07	2.66
			$\Gamma_1$	0.122	0.119	0.118	0.117	0.117	0.117	0.117
	30	317	$\tau$	8.57	4.81	3.25	1.74	0.547	0.183	0
			$\Delta R$	65.9	37.3	25.3	13.7	4.90	2.84	2.46
			$\Gamma_1$	0.130	0.129	0.129	0.129	0.129	0.129	0.129
7	1	350	$\tau$	9.71	5.39	3.62	1.93	0.604	0.202	0
			$\Delta R$	70.8	39.4	26.5	14.3	5.08	2.94	2.55
			$\Gamma_1$	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137
	15	355	$\tau$	10.2	5.49	3.68	1.95	0.612	0.205	0
			$\Delta R$	71.2	39.6	26.7	14.4	5.13	2.97	2.57
			$\Gamma_1$	0.143	0.139	0.138	0.138	0.138	0.138	0.138
	30	383	$\tau$	11.1	5.96	3.98	2.11	0.661	0.221	0
			$\Delta R$	76.0	41.8	28.1	15.1	5.37	3.11	2.69
			$\Gamma_1$	0.146	0.143	0.142	0.142	0.142	0.142	0.142

注: 当  $\theta_0 = 90^\circ$  时,  $\Gamma_1 = N_s \times 10^{-6} / \Delta R$

差值作为准实测值将是合理的。利用北京和乌鲁木齐的 1972 年 1 月和 7 月 07 时的探空数据计算了  $\tau$  和  $\Delta R$  (公式见附录)。据此, 根据 (3) 式计算了  $\Gamma$  值, 称为  $\Gamma_1$ , 则  $\Gamma_1$  可理解为实测的折射率随高递减率。现将北京的部分计算结果列于表 1。

从上表可知,  $\Gamma_1$  基本上为一常数, 特别是  $\theta_0 \geq 5^\circ$  时更是如此, 并且此常数符合实际统计值, 这也就是对 (3) 式的实际验证。从而可以说, 当考虑整个对流层的折射误差时, 大气模型可用指数式代表, 同时, (3) 式可作为从实测折射误差中反演大气模型参数的依据。

在指数模型下, 引入整个对流层的平均等效地球半径的概念, 把弯曲的射线化为直线, 从而可得到折射误差的解析解<sup>[16]</sup>, 据此引出两点结论:

$$(1) \left. \begin{aligned} \Delta R &\propto N_s / \sqrt{\Gamma} \\ \tau &\propto N_s \sqrt{\Gamma} \end{aligned} \right\}, (\theta_0 < 5^\circ \text{ 时}) \quad (4)$$

$$(2) \left. \begin{aligned} \Delta R &\propto N_s / \Gamma \\ \tau &\propto N_s \end{aligned} \right\}, (\theta_0 \geq 5^\circ \text{ 时}) \quad (5)$$

大家知道, 距离误差来源于传播速度不同于光速, 则  $\Delta R \propto N_s$ ; 射线的弯曲来源于折射指数随高度的变化, 则  $\tau \propto N_s \Gamma$ ; 再考虑到折射率随高度的分布, 高低仰角时分别与标高和标高的平方根成比例, 从而解释了 (4), (5) 式的物理含义。

### 三、简易预报法和线性回归的新参量

射电天文的观测在于把射电源的强度在天球上的分布绘制成图, 因而了解观测信号的相程误差是主要的。实际上在一些精密测量系统中也是如此。因此关键是要能简便地求得  $\Delta R$ 。天文折射公式是一个简单且精确(仰角不是太低时)的预测公式, 在此还要以它为出发点。

$$\tau = - \int_{n_s}^1 \cot \theta \frac{dn}{n} = N_s \cot \theta_0 \times 10^{-6} - O[(n-1)^2] \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} O[(n-1)^2] &< \frac{\cot \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \left\{ \int_{n_s}^1 \ln n \frac{dn}{n} + \int_{r_s}^{\infty} \ln n \frac{dr}{r} \right\} \\ &\approx \frac{N_s \cot \theta_0 \times 10^{-6}}{\sin^2 \theta_0} \left( \frac{1}{r_0 \Gamma} - \frac{N_s}{2} \times 10^{-6} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

在指数模型下, 上式可用来估算天文折射公式的误差, 其中  $r_0$  为地球半径。

从实测的  $N_s$  值可简便地求得  $\tau$ , 再参照 (3) 式, 如果  $\Gamma$  值可预测, 则  $\Delta R$  即可求得。大家知道<sup>[17]</sup>, 在海拔 9km 的高空, 大气层是稳定的, 这就提供了预测  $\Gamma$  值的基础。令  $\Gamma_i$  为预测值, 以  $\Gamma_1$  (实测值) 为标准, 把预报误差表为  $\sigma_i$ , 则

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{1}{(9-h_i)} \ln \frac{N_s}{N_{19}} \\ \sigma_i &= \sqrt{\sum_{m=1}^M (\Gamma_{1m} - \Gamma_{im})^2 / M} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

表 2 折射率随高度减率预测值:  $\Gamma_2(100)$  和  $\Gamma_3(105)$

地点	月份	$\bar{\Gamma}_1$	$\bar{\Gamma}_2$	$\sigma_2$	$\bar{\Gamma}_3$	$\sigma_3$
北京	1	0.128	0.127	$3.81 \times 10^{-3}$	0.122	$6.95 \times 10^{-3}$
	7	0.138	0.142	$6.96 \times 10^{-3}$	0.136	$6.50 \times 10^{-3}$
乌鲁木齐	1	0.132	0.130	$3.84 \times 10^{-3}$	0.124	$8.76 \times 10^{-3}$
	7	0.126	0.132	$8.81 \times 10^{-3}$	0.126	$7.24 \times 10^{-3}$

其中  $h_i$  为观测站的海拔高度.  $N_{i9}$  为海拔 9 km 高空的折射率值. 一般说来,  $N_{i9}$  应为 105, 但统计结果表明, 冬季 ( $i = 2$ ) 取为 100, 夏季 ( $i = 3$ ) 取为 105 较好. 现将统计结果列于表 2. 对上述简易预报法, 先从理论上考察该法预报  $\Delta R$  的误差, 根据 (3), (6), (7), (8) 式, 我们有 ( $\overline{\Delta R}$  表示  $\Delta R$  的平均值, 其余相同)

$$\left. \begin{aligned} d(\Delta R)/\overline{\Delta R} &\leq |d\tau|/\bar{\tau} + |d\Gamma_i|/\bar{\Gamma}_i \\ d\tau/\bar{\tau} &= |dN_i|/\bar{N}_i + |[1/(r_0\bar{\Gamma}_i) - (N_i/2) \times 10^{-6}]| \\ d\Gamma_i &= [1/(9 - h_i)](|dN_i|/\bar{N}_i + |dN_{i9}|/N_{i9}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

不难看出, 这里包含了  $N_i$  的测量误差,  $N_{i9}$  的取值误差和  $\tau$  的计算误差.

取  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $dN_i = \pm 1$ ,  $dN_{2,9} = \pm 3$ ,  $dN_{3,9} = \pm 5$ , 估算北京的预报误差. 据统计, 1 月:  $\bar{\Gamma}_1 = 0.128$ ,  $\bar{\Gamma}_2 = 0.127$ ,  $\bar{N}_i = 313$ , 7 月:  $\bar{\Gamma}_1 = 0.138$ ,  $\bar{\Gamma}_3 = 0.136$ ,  $\bar{N}_i = 356$ , 从而得到  $d(\Delta R)/\overline{\Delta R}$  的值, 1 月和 7 月分别不大于 6.77% 和 7.58%. 再从实测结果统计北京的预报误差, 则  $d(\Delta R)/\overline{\Delta R}$  的值, 1 月和 7 月分别为 4.62% 和 6.36%.

下面讨论线性回归的新参量. 用地面折射率作折射误差的回归参量<sup>[4]</sup>, 但  $\Delta R$  与  $N_i$  的相关性极差, 据 (4), (5) 式, 按初始仰角的大小, 提出 3 个新参量, 即  $P \equiv N_i \sqrt{\Gamma_1}$ ,

表 3 相关系数 ( $r$ ) 统计表

地点	$\theta_0(0)$	$r$	$(N_i - \bar{N}_i)$	$(\tau - P)$	$(\Delta R - N_i)$	$(\Delta R - Q)$	$(\Delta R - T)$
			$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
北京	1	0.9533	0.9962	0.9299	0.9601	—	
	3	0.9957	0.9957	0.7786	0.9498	—	
	5	0.9989	—	0.7013	—	0.9857	
	10	0.9996	—	0.6447	—	0.9963	
	60	0.9998	—	0.6039	—	0.9988	
乌鲁木齐	1	0.9508	0.9885	0.7388	0.9607	—	
	3	0.9866	0.9721	0.5006	0.9329	—	
	5	0.9927	—	0.4201	—	0.9923	
	10	0.9972	—	0.3890	—	0.9962	
	60	0.9983	—	0.3540	—	0.9984	

$Q \equiv N_i/\sqrt{\Gamma_1}$  和  $T \equiv N_i/\Gamma_1$ . 线性回归式写为

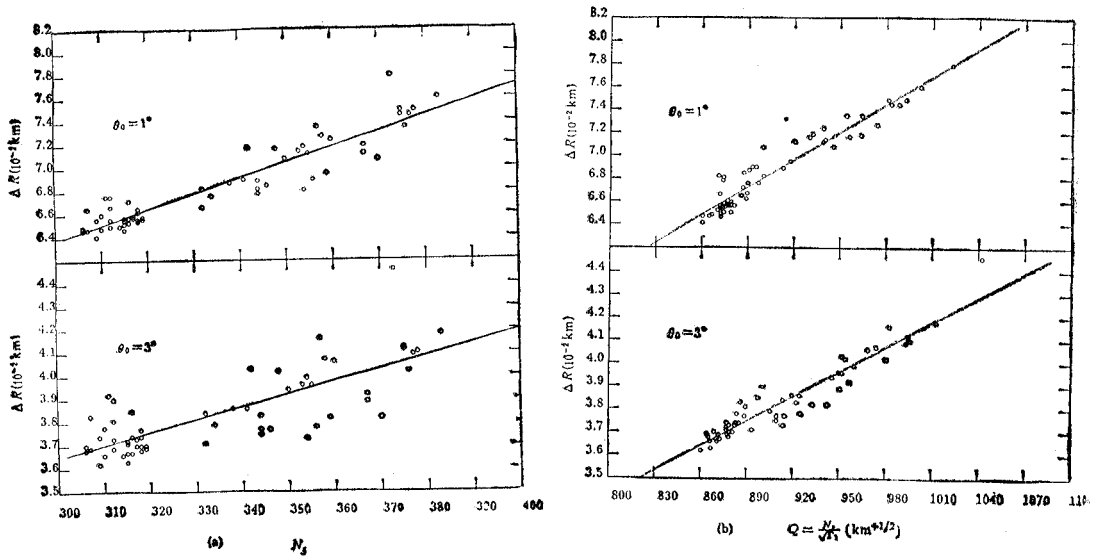


图 2 (a)  $\Delta R-N_s(\theta_0:1^\circ,3^\circ)$  (b)  $\Delta R-Q(\theta_0:1^\circ,3^\circ)$

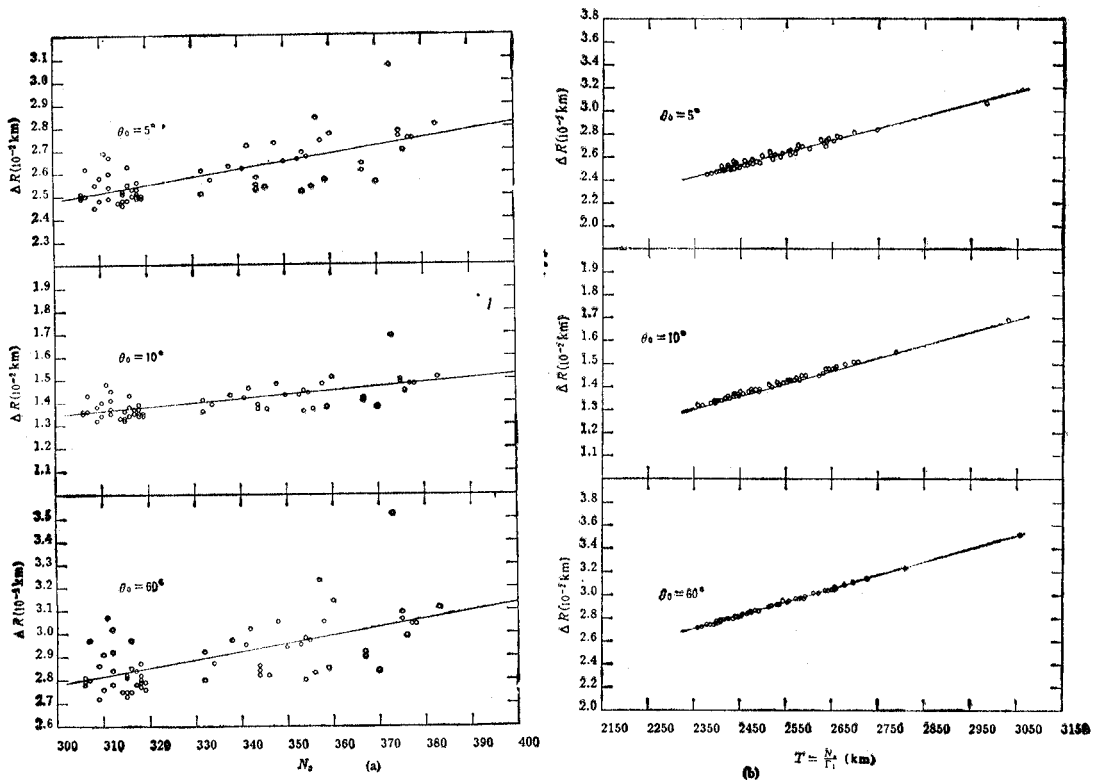


图 3 (a)  $\Delta R-N_s(\theta_0:5^\circ, 10^\circ,60^\circ)$ , (b)  $\Delta R-T(\theta_0:5^\circ, 10^\circ,60^\circ)$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= A_1 N_s + B_1, (r_1); \tau = A_2 P + B_2, (r_2) \\ \Delta R &= A_3 N_s + B_3, (r_3); \Delta R = A_4 Q + B_4, (r_4); \Delta R = A_5 T + B_5, (r_5) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中,  $A, B$  为回归系数;  $r$  为相关系数. 现将北京的  $\Delta R$  的统计结果示于图 2 和图 3, 并将相关系数的统计结果列于表 3. 据此可知, 当  $\theta_0 < 5^\circ$  时, 应取  $P$  和  $Q$  分别作为  $\tau$  和  $\Delta R$  的预报参量; 当  $\theta_0 \geq 5^\circ$  时, 应取  $N_i$  和  $T$  分别作为  $\tau$  和  $\Delta R$  的预报参量. 采用新参量后, 对  $\Delta R$  的预报有明显改进.

#### 四、结 论

(1) 基于对流层折射误差的准测量值, 讨论了指数大气模型的合理性, 从而指出 (3) 式可作为从实测折射误差中反演大气模型参数的依据. 表 1 所示的计算数据, 说明了此观点是正确的.

(2) 在海拔 9 km 的高空, 折射率值基本上是稳定的, 选取两个易于记忆的数值, 100 和 105 分别代表干季和湿季 9 km 高空的折射率值, 再根据地面实测的折射率值, 即可预报指数模型下折射率的随高递减率. 这就排除了统计历史资料的烦杂工作. 再根据天文折射公式和 (3) 式, 即可简便地求得距离误差. 从理论和实测上讨论并检验了该法的精度. 取北京地区,  $\theta_0 = 10^\circ$  的统计数据来看, 该预报方法的误差, 干、湿季分别为 5% 和 6%.

(3) 根据理论分析, 提出了对弯曲角和距离误差进行统计回归时的新参量: 当  $\theta_0 < 5^\circ$  时, 取  $\tau - N_i \sqrt{\Gamma}$  和  $\Delta R - N_i / \sqrt{\Gamma}$  进行回归; 当  $\theta_0 \geq 5^\circ$  时, 取  $\tau - N_i$  和  $\Delta R - N_i / \Gamma$  进行回归. 并以北京和乌鲁木齐的探空数据所计算的折射误差, 进行了回归分析, 结果说明, 所提的新参量是有效的, 特别是采用  $N_i / \sqrt{\Gamma}$  和  $N_i / \Gamma$  作为  $\Delta R$  的回归参量时, 较之于用  $N_i$  有明显改进. 以北京、 $\theta_0 = 10^\circ$  的统计数据为例, 相关系数增大了 55%.

#### 附 录

线性分层模型下, 折射误差的计算式.

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \sum \tau_i \\ \Delta R &= \sum \Delta R_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1})$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= \cos \theta_i \frac{\nabla_n N_i}{1 - \nabla_n N_i \cdot \Delta h_i / 2} G_i(c_i) \\ \Delta R_i &= \{N_i \times 10^{-6} - [n_i \nabla_n N_i - N_i \times 10^{-6} [1 / (r_0 + h_i) \\ &\quad - \nabla_n N_i]] \Delta h_i / 2\} G_i(c_i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

$$\left. \begin{aligned} G_i(c_i > 0) &= \frac{1}{\sqrt{c_i}} \ln \frac{c_i \Delta h_i + b_i + \sqrt{c_i} \sqrt{a_i + 2b_i \Delta h_i + c_i \Delta h_i^2}}{b_i + \sqrt{a_i c_i}} \\ G_i(c_i = 0) &= (1/b_i) (\sqrt{a_i + 2b_i \Delta h_i} - \sqrt{a_i}) \\ G_i(c_i < 0) &= \frac{1}{\sqrt{-c_i}} \arcsin \left\{ \frac{\sqrt{-c_i} [\sqrt{a_i + 2b_i \Delta h_i + c_i \Delta h_i^2} - \sqrt{a_i} (b_i + c_i \Delta h_i)]}{b_i^2 - a_i c_i} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3})$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_i &= \frac{1 + (N_i - N_i) \times 10^{-6}}{1 + h_i/r_0} (1 + h_i/r_0) \cos \theta_0 \\ \Delta h_i &= h_{i+1} - h_i \\ \nabla_n N_i &= \left[ \frac{[(N_i - N_{i+1})]}{\Delta h_i} \right] \frac{10^{-6}}{(1 + N_i \times 10^{-6})} \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \sin^2 \theta_i = 1 - \cos^2 \theta_i \\ b_i &= 1/(r_0 + h_i) - \nabla_n N_i \\ c_i &= [1/(r_0 + h_i)][1/(r_0 + h_i) - 4\nabla_n N_i] + (\nabla_n N_i)^2 \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

## 参 考 文 献

- [1] B. R. Bean, Tropospheric refraction, in *Advance in Radio Research*, Ed. J. A. Saxton, Vol. 1, (1964), pp. 53—120.
- [2] H. S. Hopfield, *J. Geophys. Res.*, 74(1969)18, 4487—4499.
- [3] J. Saastamoinen, Atmospheric correction for the troposphere and stratosphere in ranging of satellites, in *The Use of Artificial Satellites for Geodesy and Geophysics*, Geophys. Monograph Series, Vol. 15, (1972), Ed. S. W. Henriksen pp. 247—251.
- [4] J. I. H. Askne, E. R. Westwater, *IEEE Trans. on GE*, GE-24(1986)3, 340—352.
- [5] M. T. Decker et al., *J. Appl. Metro.*, 17(1978)12, 1788—1795.
- [6] E. R. Westwater, *Radio Sci.*, 13(1978)4, 677—685.
- [7] C. C. Chao, A model for tropospheric calibration from daily surface and radiosonde ballon measurements, Tech. Memo. Calif. Inst. Technol. Jet Propulsion Lab., Vol. 17, (1972), pp. 350—391.
- [8] J. W. Marini, *Radio Sci.*, 7(1972)2, 223—231.
- [9] D. C. Hogg et al., *Astron. Astrophys.*, 95(1981)2, 304—307.
- [10] J. L. Davis et al., *Radio Sci.*, 20(1985)6, 1593—1607.
- [11] J. Askne et al., *Radio Sci.*, 22(1987)3, 379—386.
- [12] CCIR, Recommendation 369-3, p. 107, Report 563-3, p. 108, Recommendations and Reports of the CCIR, Vol. 5, (1986).
- [13] J. J. Freeman, *J. Research of NBS*, 66D(1962)6, 695—697.
- [14] G. D. Thayer, *J. Research of NBS*, 65D(1961)2, 181—182.
- [15] L. Rowlandson et al., *Radio Sci.*, 4(1969)10, 927—933.
- [16] 韩文俊, “对流层折射与雷达定位”, 中国科学院电子学研究所内部报告, 北京, 1964年.
- [17] B. R. Bean et al., *Proc. IRE*, 47(1959)4, 740—755

## A NEW METHOD TO PREDICT TROPOSPHERIC RANGE ERROR

Han Wenjun Zheng Yijia

(Beijing Astronomical Observatory, Academia Sinica, Beijing 100080)

Zhang Wuliang

(China Research Institute of Radiowave Propagation, Xinxiang, Henan 453003)

**Abstract** Based on the quasi-measured values of tropospheric refraction, it is discussed that the exponential atmospheric model is reasonable, and according to the stable feature of refractivity at 9 km above sea level, a simplified method to predict tropospheric range error is presented, and the accuracy of which is discussed. Besides, some new parameters for linear regression of tropospheric refraction are given, the improvement in prediction of range error is distinct.

**Key words** Radio-wave propagation; Tropospheric refraction; Prediction of tropospheric range error; Exponential model