

均匀圆阵相干信源 DOA 估计的模式平滑算法¹

马常霖 彭应宁 田立生 刘建华

(清华大学电子工程系 北京 100084)

摘要 本文提出了一种适用于均匀圆阵的相干信源空间谱估计的方法。它利用空间预处理技术,将阵元空间的均匀圆阵变换成相位模式空间内的虚拟均匀线阵。通过将均匀线阵的空间平滑技术和增强平滑技术应用到该虚拟阵,可获得文中的模式平滑算法。该算法仅利用一维搜索就可使均匀圆阵具有检测相干信源的能力,避免了将圆阵看成是一般平面阵时所必须的多维搜索,减少了计算量。计算机模拟结果证明了该算法的正确性和有效性。

关键词 模式空间,虚拟线阵,空间平滑

中图分类号 TN911.7

1 引言

在基于阵列信号处理技术的 DOA 估计中,均匀圆阵与均匀线阵相比,有着许多优点^[1],比如它可提供 360 度的方位角信息,可提供俯仰角信息。另外由于均匀圆阵的圆对称性,使得它在各个方位角上有着相同的方向特性。然而由于圆阵阵列流形矩阵非 Vandermonde 矩阵,在数学处理上比较困难,因此目前人们在处理圆阵时并没有考虑圆阵独特的几何结构,仅仅将圆阵看作是一般平面阵列处理^[2,3]。本文的模式平滑算法深入研究了圆阵的几何结构和阵列流形矩阵的特点,针对圆阵的特点首先利用预处理技术把阵元空间内的均匀圆阵变换成模式空间^[4]内的均匀线阵,然后在模式空间内使用增强空间平滑技术^[5,6]去除信源的相干性,获得相干解算能力。

2 圆阵的模式空间

当沿连续圆阵馈入的激励为 $E(\varphi)$ 时,在圆阵阵列平面上形成的远场方向图为

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\varphi) \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} r \cos(\theta - \varphi) \right] d\varphi. \quad (1)$$

由于连续圆阵具有以 2π 为周期的周期性,因此激励和方向图可以分解成傅氏级数的形式,对于激励分量 $E_m(\varphi) = C_m \exp(jm\varphi)$,对应的方向图为 $F_m(\theta) = C_m j^m J_m(\beta) \exp(jm\theta)$,其中 $J_m(\cdot)$ 为 m 阶第一类 Bessel 函数, $\beta = 2\pi r/\lambda$ 。可以看出,连续圆阵的激励和方向图均可分解成为不同频率复指数分量和的形式,每个分量被称为一个相位模式 (Phase Mode)。

离散均匀圆阵可以看成连续圆阵仅在阵元点处馈入激励获得的,因此 N 元离散均匀圆阵的激励为 $E_S(\varphi) = E(\varphi)s(\varphi)$, $s(\varphi)$ 为采样函数, $s(\varphi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta \left[\varphi - \frac{2\pi i}{N} \right] = \frac{N}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \exp(jiN\varphi)$ 。对于 $E(\varphi)$ 的复指数分量 $E_m(\varphi) = \exp(jm\varphi)$, $E_{Sm}(\varphi) = \frac{N}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \exp(j(m+iN)\varphi)$, 另外

¹ 1996-10-10 收到, 1997-04-03 定稿

再考虑 $m > \beta$ 时 $J_m(\beta) \approx 0$, 均匀圆阵可激发的最大模式为 $M = [\beta]$, 且当阵元数 $N > 2M$ 时, 由 (1) 式可以得到 $E_m(\varphi)$ 的近似方向图:

$$F_{Sm}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{Sm}(\varphi) \exp(j\beta \cos(\theta - \varphi)) d\varphi \approx \frac{N}{2\pi} j^m J_m(\beta) \exp(jm\theta). \quad (2)$$

显然, 此时的方向图对应于一个相位模式分量, 且与连续圆阵有着近似相同的方向特性.

3 相位模式空间虚拟线阵的构成及特点

现利用圆阵模式空间的概念将均匀圆阵转化成虚拟均匀线阵. 这可通过空间离散傅氏变换 (DFT) 得到. 假设一 N 元均匀圆阵, 无噪时阵元 l 上的快拍数据为

$$y_l(t) = \sum_{i=1}^d \exp\left[-j\beta \cos\left(\theta_i - \frac{2\pi}{N}l\right)\right] s_i(t), \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

对快拍数据做 DFT, 并考虑当 $N > 2\beta$ 时, 最大激发相位模式为 $M = \beta$, 可得到

$$u_m = \sum_{l=0}^{N-1} y_l \exp[j\frac{2\pi}{N}lm] \approx N \sum_{i=1}^d j^m J_m(-\beta) \exp(jm\theta_i) s_i, \quad -M \leq m \leq M. \quad (4)$$

写成向量形式

$$\mathbf{u} = [\mathbf{w}_{-M} \ \mathbf{w}_{-M+1} \ \dots \ \mathbf{w}_M]^H \mathbf{y} = \mathbf{F}^H \mathbf{y} = N \mathbf{J} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s}. \quad (5)$$

其中 $\mathbf{w}_m = [1 \ \exp(-j2\pi m/N) \ \dots \ \exp(-j2\pi m(N-1)/N)]^T$, $\mathbf{u} = [u_{-M} \ u_{-M+1} \ \dots \ u_M]^T$, $\mathbf{y} = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{N-1}]^T$, $\mathbf{J} = \text{diag}[j^{-M} J_{-M}(-\beta) \ \dots \ j^M J_M(-\beta)]$,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \exp(-jM\theta_1) & \exp(-jM\theta_2) & \dots & \exp(-jM\theta_d) \\ \exp(-j(M-1)\theta_1) & \exp(-j(M-1)\theta_2) & \dots & \exp(-j(M-1)\theta_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(jM\theta_1) & \exp(jM\theta_2) & \dots & \exp(jM\theta_d) \end{bmatrix}.$$

若令 $\mathbf{T} = \frac{1}{N} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}^H$, 可得 $\mathbf{T}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s}$, 于是预处理变换阵 \mathbf{T} 将原阵列数据变换成了一个具有均匀线阵特性的阵列, 而且各个阵元是增益为 1 的各向同性阵元.

考虑噪声因素, 有快拍数据 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}$, 经预处理变换后可以得到模式空间快拍数据:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{T}\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s} + \mathbf{T}\mathbf{n}. \quad (6)$$

相应模式空间数据相关阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \tilde{\mathbf{A}}E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]\tilde{\mathbf{A}}^H + TE[\mathbf{n}\mathbf{n}^H]T^H = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_S\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma^2\mathbf{T}\mathbf{T}^H \\ &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_S\tilde{\mathbf{A}}^H + \frac{\sigma^2}{N} \text{diag}\left[\frac{1}{J_M^2(\beta)} \ \dots \ \frac{1}{J_0^2(\beta)} \ \dots \ \frac{1}{J_M^2(\beta)}\right] = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_S\tilde{\mathbf{A}}^H + \mathbf{R}_N. \end{aligned} \quad (7)$$

于是在模式空间中噪声已成为色噪声, 此时在利用子空间分解类算法时, 必须使用广义特征分解求解信号子空间或噪声子空间. 即使这样, 由于 $|J_m(\beta)| < 1$, 尤其是当 m 接近时 β ,

$|J_m(\beta)| \ll 1$ ，在模式空间内的噪声变得很大，利用子空间分解类算法时，对 DOA 估计的精度和分辨性能都会有所降低。

利用空间 DFT 将圆阵转化至模式空间后形成了一个虚拟均匀线阵，该虚拟线阵与真实线阵有着本质的区别，它们阵列流形阵中的相位指数不同，对于真实线阵 $\varphi_{TR} = (2\pi/\lambda)d \sin \theta$ ， d 为阵元间隔，相位延迟与信源入射角的正弦成正比，对于虚拟线阵 $\varphi_V = \theta$ ，相位延迟就是入射角本身。这导致了真实线阵与虚拟线阵在测向范围、分辨力和等效孔径上具有明显不同的特性。

(1) 测向范围的差别

对于真实均匀线阵当 $\theta_1 = \pi - \theta_2$ 时，有 $\varphi_{TR1} = \varphi_{TR2}$ ，因此真实线阵只有 180° 的方位角覆盖范围。而对于虚拟均匀线阵 $\varphi_V = \theta$ ，对于任意的 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 都有不同的 φ_V ，所以在 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 的范围内，虚拟线阵没有模糊问题，可以提供全方位的方位角覆盖。

(2) 分辨力的差别

在阵列测向中，在某方向上对信源的分辨力与在该方向附近阵列方向向量的变化率直接相关。这里定义一个表征分辨力的量 $D(\theta) = \left\| \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} \right\|_F$ ， $\alpha(\theta)$ 为阵列方向向量， $D(\theta)$ 越大表明在该方向上的分辨力越高。对于实际的均匀线阵 $D_{TR}(\theta) = (2\pi/\lambda)d\gamma|\cos \theta|$ ， $\gamma = \sqrt{\sum_{i=-M}^M i^2}$ ，在检测范围 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内， $D_{TR}(\theta)$ 是以余弦形式变化的，如图 1。可见，在垂直于均匀线阵轴线的方向上时具有最高的分辨力 $D_{TR}(0) = (2\pi/\lambda)d\gamma$ ，而在沿轴线的方向上， $D_{TR}(\pm\pi/2) = 0$ ，分辨力最差。

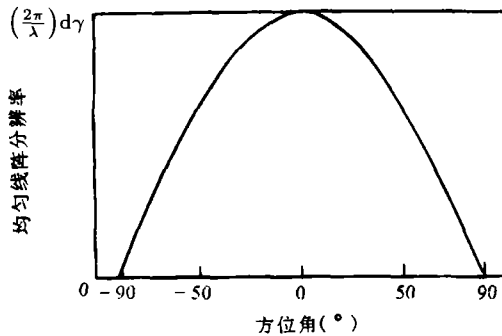


图 1

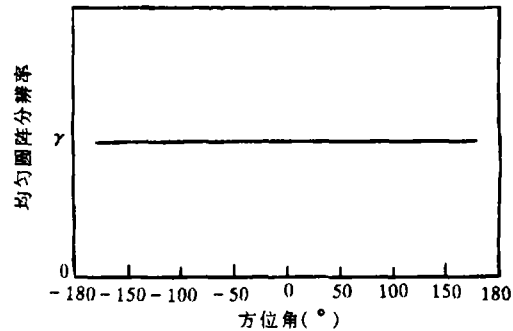


图 2

对于虚拟均匀线阵有 $D_V(\theta) = \gamma$ ，在检测范围 $[-\pi, \pi)$ 内，有着相同的分辨力，如图 2，也就是说，当 $N \geq 2M$ 时，离散均匀圆阵可以近似成连续圆阵，在全方位角内有着相同的方向特性。

(3) 虚拟均匀线阵的等效孔径

这里我们在等效平均分辨力的意义上分析虚拟均匀线阵和真实均匀线阵的等效孔径。假定虚拟均匀线阵和真实线阵平均分辨力相同，即 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_V(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_{TR}(\theta) d\theta$ ，可得虚拟线阵的阵元间距为 $d = \lambda/4$ 。这说明当虚拟线阵与真实线阵有相同数目的阵元时，在平均分辨力相等的意义上，虚拟均匀线阵阵元的等效阵元间距为 $\lambda/4$ ，这比无模糊最大孔径真实线阵的阵元间距小了一半，即阵列孔径减半，虚拟均匀线阵孔径的损失是由于均匀圆阵的阵元分布比

均匀线阵更为集中而引起的, 阵元的相对集中会导致阵列孔径的减小, 分辨力的下降, 以及互耦误差的增大。在等效极大分辨力的意义上也可得到相同的结论。

4 基于圆阵的增强空间平滑方法的去相干实现

空间平滑技术及增强型空间平滑技术是一种较为有效的信源去相干方法, 但该方法仅适用于均匀线阵, 并不适合于均匀圆阵, 所幸的是, 根据第 3 节的推导, 在模式空间中均匀圆阵等效一个虚拟均匀线阵, 所以我们可以把空间平滑方法运用到圆阵的模式空间中, 使得圆阵在模式空间中具有去相干能力。

由增强型空间平滑算法, 可将整个虚拟阵列分成若干子阵, 对各子阵进行双向平滑。对于起始模式为 m , 长度为 p 的子阵有数学模型:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{A}_{-M} \begin{bmatrix} \exp(j\theta_1(m+M)) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(j\theta_d(m+M)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_d \end{bmatrix} + \mathbf{n}_m = \mathbf{A}_{-M} \mathbf{D}^{m-M} \mathbf{s} + \mathbf{n}_m, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{A}_{-M} = \begin{bmatrix} \exp(-j\theta_1 M) & \cdots & \exp(j\theta_d M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\theta_1(-M+p-1)) & \cdots & \exp(j\theta_d(-M+p-1)) \end{bmatrix}$, \mathbf{n}_m 为对应于起始模式为 m 的子阵的噪声。

对于正向平滑, 子阵 m (m 为该子阵起始模式) 的数据相关阵为

$$\mathbf{R}_m = E[\mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H] = \mathbf{A}_{-M} \mathbf{D}^{m+M} \mathbf{R}_S (\mathbf{D}^{m+M})^H (\mathbf{A}_{-M})^H + \frac{\sigma^2}{N} \text{diag} \left[\frac{1}{J_m^2(\beta)} \quad \cdots \quad \frac{1}{J_{m+p-1}^2(\beta)} \right]. \quad (9)$$

对于反向平滑, 考虑 $\mathbf{Q} \mathbf{A}_{-M}^* = \mathbf{A}_{-M} \mathbf{D}^{2M-p+1}$, \mathbf{Q} 为倒序矩阵, 子阵 m 的数据相关阵为

$$\bar{\mathbf{R}}_m = \mathbf{A}_{-M} \mathbf{D}^{2M-p+1} (\mathbf{D}^{m+M})^* \mathbf{R}_S^* \mathbf{D}^{m+M} (\mathbf{D}^{2M-p+1})^H \mathbf{A}_{-M}^H + \frac{\sigma^2}{N} \text{diag} \left[\frac{1}{J_{m-p+1}^2(\beta)} \quad \cdots \quad \frac{1}{J_m^2(\beta)} \right]. \quad (10)$$

于是对于增强型空间平滑技术, 总的平滑数据相关阵为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2(2(m+1)-p)} \sum_{m=-M}^{M-p+1} (\mathbf{R}_m + \bar{\mathbf{R}}_m) = \mathbf{A}_{-M} \bar{\mathbf{R}}_S \mathbf{A}_{-M}^H + \frac{\sigma^2}{N} \frac{1}{2(m+1)-p} \bar{\mathbf{R}}_N, \quad (11)$$

其中

$$\bar{\mathbf{R}}_S = \frac{1}{2(2(m+1)-p)} \sum_{m=-M}^{M-p+1} \left[\mathbf{D}^{m+M} \mathbf{R}_S (\mathbf{D}^{m+M})^H + \mathbf{D}^{M-m-p+1} \mathbf{R}_S^* (\mathbf{D}^{M-m-p+1})^H \right], \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_N = \text{diag} \left[\sum_{m=-M}^{M-p+1} \frac{1}{J_m^2(\beta)} \quad \cdots \quad \sum_{m=-M}^{M-p+1} \frac{1}{J_{m+p-1}^2(\beta)} \right]. \quad (13)$$

可以证明当子阵阵元数 $p \geq d$, 子阵数目 $2(M+1)-p \geq [d/2]$ 时, $\bar{\mathbf{R}}_S$ 为满秩阵, 达到了信源去相干的目的, 此时可以用一维搜索算法如 MUSIC 算法实现对相干信源的 DOA 估计。

5 计算机模拟

为了验证上述模式空间平滑的有效性,我们进行了计算机模拟实验。在实验中所使用的阵列为半径 1.1m 的 16 元均匀圆阵,系统中心频率为 300MHz。这里选取的最大模式数为 7,也就是说,该虚拟线阵相当于有 15 个阵元。空间中有两个等功率相干信源 $s_1(t)$, $s_2(t)$, 方位角分别为 100° 和 115° , 阵元噪声为空间白噪声,信噪比为 10dB,快拍数 200,利用普通 MUSIC 和模式平滑 MUSIC(子阵阵元数为 5)方法对信源方向进行估计,所得结果如图 3 所示,图中虚线为普通 MUSIC 空间谱,实线为模式平滑 MUSIC 空间谱,两垂直实线为信源真实位置。由结果可知,由于信源相干普通 MUSIC 方法已无法正确估计 DOA,而模式平滑方法仍然非常有效。

图 4 是当快拍数为 256,两相干信源间隔分别为 15° 和 20° 时,随信噪比变化,模式空间平滑法的 DOA 成功估计概率。在模拟中每个信噪比点做了 50 次蒙特卡罗实验,当最大估计偏差低于两信源间隔的 0.2 倍时,认为成功。由实线知信源间隔 15° 时,当信噪比接近 10dB 时,模式平滑算法可获得很好的检测性能(成功概率接近于 1),由虚线知信源间隔 20° 时,当信噪比为 3~5dB 时,模式平滑算法就已经可以获得很好的检测性能了。然而,对于普通 MUSIC 算法,我们知,在这两种相干信源情况下都已无法正确估计信源 DOA。

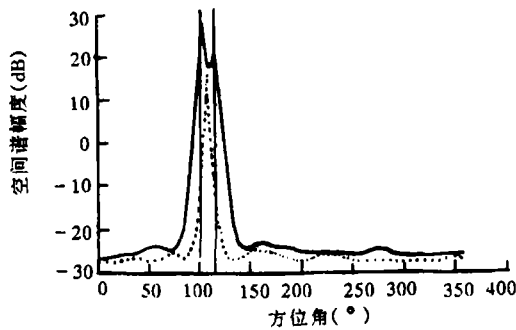


图 3

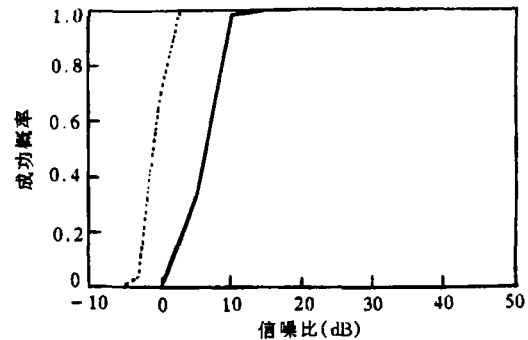


图 4

6 结 论

本文讨论了圆阵的模式空间,并利用该概念在模式空间中形成了与圆阵相对应的虚拟线阵。通过与真实线阵的比较知,虚拟线阵保持了均匀圆阵的优良特性,如全方位估计特性、各向同性等,同时又由于虚拟线阵与真实线阵相似之处,可将空间平滑等去相干算法应用于虚拟线阵,从而使均匀圆阵具有了良好的相干信源处理能力。

参 考 文 献

- [1] Davies E N. The Handbook of Antenna Design. London: Peregrinus, 1983, Vol.2, Chapter 12.
- [2] Stoica P, Sharman K C. IEEE Trans. on ASSP, 1990, ASSP-38(7): 1132-1143.
- [3] Viberg M, Otterstern B. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(11): 2436-2449.
- [4] Mathews C P, Zoltowski M D. IEEE Trans. on SP. 1994, SP-42(9): 2395-2407.
- [5] Williams T, Prasad S, Mahalanabis A K, Sibul L H. IEEE Trans. on ASSP, 1988, ASSP-36(4): 425-432.

- [6] Pillai U, Kwon B H. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(1): 8-15.

MODE SPACE SMOOTHING ALGORITHM FOR DOA ESTIMATION OF COHERENT SOURCES WITH UNIFORM CIRCULAR ARRAY

Ma Changlin Peng Yingning Tian Lisheng Liu Jianhua

(*Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084*)

Abstract A novel method to estimate DOAs of coherent sources impinging on an uniform circular array(UCA) is presented in this paper. A virtual uniform linear array(VULA) is first derived by DFT preprocessing, transforming the UCA from element space to phase mode space which is special for circular arrays, and then the well-known spatial smoothing technique is applied to the VULA so that the decreased rank of covariance matrix due to coherence can be retrieved. Simulation results have strongly verified the effectiveness of the algorithm.

Key words Mode space, Virtual uniform linear array, Spatial smoothing

马常霖: 男, 1970 年生, 博士生, 目前从事阵列信号处理, 谱估计, 数字通信等方面的研究.

彭应宁: 男, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 目前的研究方向为: 谱估计、自适应滤波、自适应阵列信号处理、并行信号处理、雷达信号处理、神经网络与子波变换等.

田立生: 男, 1936 年生, 教授, 主要研究方向为雷达信号检测与处理、自适应滤波和近代谱估计.

刘建华: 男, 1964 年生, 博士生, 目前从事阵列信号处理, 谱估计, 统计信号分析处理等方面的研究.