

# 用时域有限差分法研究圆柱形谐振器

王赤 高本庆 邓次平

(北京理工大学电子工程系 北京 100081)

**摘要** 本文建立了圆柱坐标系下的时域有限差分(FD-TD)算法程序。运用算法分析了  
几种圆柱形谐振器(包括同轴形,圆柱形介质加载和开放式柱形介质谐振器)在各种模式下的  
谐振频率。数值结果与理论值、实验值进行了比较,表明具有很高的精度。本文还对计算中网  
格的选取原则进行了探讨;并计算了一种双层介质加载腔的谐振频率,从中得出一些有益的结  
论。

**关键词** 谐振腔,时域有限差分,离散傅里叶变换

## 1 引言

对微波领域广泛应用的谐振器的研究需要准确、有效、简单的方法来计算它们的谐振  
频率和空间场分布。现已有很多方法(如模匹配法、积分方程法等)可计算。但对结构形  
状复杂的谐振器,其场分布难以预料,用以往方法计算其谐振频率是很困难的。

Yee<sup>[1]</sup>提出的时域有限差分法(FD-TD),直接、简单、易于理解,特别  
适合形状复杂的问题。最近已有用FD-TD法对简单矩形结构和二维圆柱腔情况的谐振  
频率进行了计算<sup>[2-4]</sup>,但对于三维圆柱腔和同轴线形腔体情况的分析尚未见报道。

## 2 有限差分公式

在圆柱坐标系下,存在多种谐振模式的无耗、各向同性媒质谐振器中,场由六个分量  
决定: $E_r, E_\phi, E_z, H_r, H_\phi$ 和 $H_z$ ,它们均是 $(r, \phi, z, t)$ 的函数并满足麦克斯韦方程。  
将在圆柱坐标系下的麦克斯韦方程

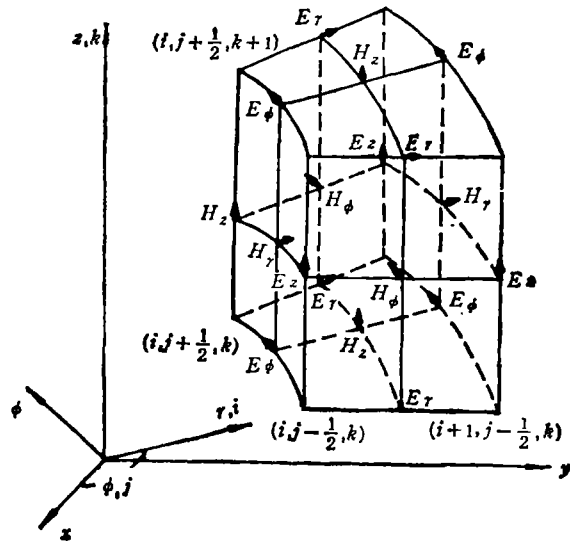


图1 网格中场分量的空间位置

1993-04-03收到,1993-12-27定稿

王赤 男,1961年生,工程师,硕士,现在研究方向:数值计算,微波技术。

高本庆 男,1936年生,教授,现在研究方向:时域电磁场理论与应用、计算电磁学、电磁兼容、生物电磁学,微波技术。

邓次平 男,1932年生,教授,现在研究方向:微波网络参数计算、微波电路与系统。

组中的变量离散化, 设其空间网格的长为  $\Delta r, \Delta\phi, \Delta z$  (空间网格见图 1), 时间步长为  $\Delta t$ , 则分量可表示为

$$A(r, \phi, z, t) = A(i\Delta r, j\Delta\phi, k\Delta z, n\Delta t) = A^n(i, j, k), \quad (1)$$

其中  $A$  可以是电场或磁场的任一分量。

令电场和磁场在时间和空间上相差半个网格, 用对空间, 时间变量的有限差分式替代麦氏方程组的偏导数, 可得时域有限差分方程组, 其中  $H_z, E_z$  如下

$$H_z^{n+1/2}(i+1/2, j, k) = H_z^{n-1/2}(i+1/2, j, k) + \frac{\Delta t}{\mu} \left\{ \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}\Delta\phi} [E_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - E_z^n(i+1/2, j-1/2, k)] - \frac{1}{r_{i+1/2}\Delta r} [r_{i+1}E_\phi^n(i+1, j, k) - r_iE_\phi^n(i, j, k)] \right\}, \quad (2)$$

$$E_z^{n+1}(i, j+1/2, k+1/2) = E_z^n(i, j+1/2, k+1/2) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{r_i\Delta r} [r_{i+1/2}H_\phi^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k+1/2) - r_{i-1/2}H_\phi^{n+1/2}(i-1/2, j+1/2, k+1/2)] - \frac{1}{r_i\Delta\phi} [H_r^{n+1/2}(i, j+1, k+1/2) - H_r^{n+1/2}(i, j, k+1/2)] \right\}. \quad (3)$$

由于  $z$  轴上的点为奇点 ( $1/r = \infty$ ), 求轴上各点的场需特殊处理。可利用安培定律, 经离散后计算轴上  $E_z$  的值。其有限差分公式为

$$E_z^{n+1}(0, j+1/2, k+1/2) = E_z^n(0, j+1/2, k+1/2) + \frac{2\Delta t\Delta\phi}{\pi\epsilon\Delta r} \sum_{k=0}^{N_\phi-1} H_\phi^{n+1/2}(1/2, j+1/2, k+1/2). \quad (4)$$

$z$  轴上各点的场分量  $E_\phi$  和  $H_r$  对迭代不产生影响, 故可不考虑它们的值。

为了在整个计算过程中保证结果收敛, 空间网格  $\Delta r, \Delta\phi, \Delta z$  和时间步长  $\Delta t$  的选取须满足稳定条件:

$$\frac{1}{(c\Delta t)^2} \geq \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{(r_{\min}\Delta\phi)^2}, \quad (5)$$

式中  $r_{\min}$  一般为  $\Delta r/2$ 。如果对  $r$  轴上第一网格的半径进行特殊处理,  $r_{\min}$  可是其它值, 如计算同轴谐振腔的情况。

初始场为含有丰富频率分量的单位函数, 以保证谐振器在谐振频率上谐振。

谐振腔内的场分量可以用频率序列的组合来表示:

$$A(r, \phi, z, t) = \sum_s \Phi_s(r, \phi, z) e^{i2\pi f_s t}. \quad (6)$$

利用离散傅里叶变换可将谐振器内任意点的时域值变为频域值:

$$F_{f_s}(i, j, k) = \sum_n^{N_t-1} A^n(i, j, k) e^{-i2\pi f_s n \Delta t}. \quad (7)$$

$N_t$  为计算的总时间步数,  $f_s$  为有一定间隔的频率序列 ( $f_s = k/N_t, k = 0, 1, 2, \dots, N_t/2$ )。当谐振器谐振时, 在谐振频率附近的  $|F_{f_s}|$  就可以被明显地分离出来, 按下述公式(推导过程从略)可精确地计算出谐振频率。

$$f_0 = \sqrt{\frac{F_{f_s} f_s^2 f_{s'} - F_{f_{s'}} f_{s'}^2 f_s}{F_{f_s} f_{s'} - F_{f_{s'}} f_s}}, \quad (8)$$

其中  $f_s$  和  $f_{s'}$  为谐振频率附近具有最大  $|F_f|$  的两个频率点,  $F_{f_s}$  和  $F_{f_{s'}}$  则为对应的傅里叶变换的值。

### 3 计算结果

计算谐振频率时,除满足稳定性条件外,应仔细选取网格尺寸使其最大可能地满足边界条件,以期获得最高精度。另外,在计算模式比较复杂的谐振腔时,应选取数个点上的场进行傅里叶变换,并选临近谐振模式对所要计算的谐振模式影响小的场点,用(8)式计算谐振频率。

#### 3.1 同轴谐振腔

对于同轴谐振腔的高次模的谐振频率的求解,用其它解析法、数值法都是困难的,而用 FD-TD 法,可同时计算出主模(结果从略)和其它高次模的谐振频率。

表 1 是内导体半径为 1cm,外导体半径为 4cm,长为 4cm,时间步数  $N_t = 2^{14}$  次,两种网格数  $31 \times 16 \times 41$  和  $31 \times 51 \times 41$  情况下计算出的同轴腔高次模谐振频率的部分结果。与理论值比较可以看出,网格数为  $31 \times 51 \times 41$  情况下得出的数值结果的精度明显优于网格数为  $31 \times 16 \times 41$  的结果,特别是  $TE_{mnp}$  和  $TM_{mnp}$  模式。这说明计算结果的精度与模式的场分布的复杂程度和网格的选取有关。

表 1 同轴谐振腔高次模的谐振频率 (GHz)

| 模 式        | 理论值   | 结果 1  | 结果 2  | 模 式        | 理论值    | 结果 1  | 结果 2  |
|------------|-------|-------|-------|------------|--------|-------|-------|
| $TM_{010}$ | 7.393 | 7.389 | 7.412 | $TE_{111}$ | 5.538  | 4.471 | 4.480 |
| $TM_{110}$ | 7.812 | 7.802 | 7.804 | $TE_{211}$ | 5.987  | 5.893 | 5.985 |
| $TM_{011}$ | 8.290 | 8.286 | 8.285 | $TE_{311}$ | 7.610  | 7.303 | 7.585 |
| $TM_{111}$ | 8.666 | 8.651 | 8.657 | $TE_{112}$ | 7.921  | 7.880 | 7.884 |
| $TM_{210}$ | 8.928 | 8.839 | 8.916 | $TE_{212}$ | 8.834  | 8.770 | 8.822 |
| $TM_{211}$ | 9.684 | 9.602 | 9.666 | $TE_{312}$ | 10.005 | 9.771 | 9.975 |

结果 1——网格为  $31 \times 16 \times 41$  的 FD-TD 结果,  $\Delta t = 0.5 \times dz/c$

结果 2——网格为  $31 \times 51 \times 41$  的 FD-TD 结果,  $\Delta t = 0.3 \times dz/c$

实践表明,在计算中网格和时间步数的选取对计算精度和时间有较大影响。一方面,网格选得密,结果精度高,但需要较长的运行时间;另一方面,网格过密,  $\Delta t$  也相应小,在  $N_t$  一定的情况下,场建立的时间短,结果也会达不到预期的精度,因此需要折中考虑。根据我们的经验,在满足稳定性条件下,对于要计算的  $TE_{mnp}$  或  $TM_{mnp}$  模式,选取网格数为  $20m \times 20n \times 20p$  左右,时间步数  $N_t = 2^{14} \sim 2^{15}$  次时,可获得较好的效果。

#### 3.2 圆柱谐振腔

我们首先计算了半径为 1cm,高为 1.5cm 的圆柱形空腔谐振器的谐振频率。计算所用网格数为  $31 \times 16 \times 46$ ,运算时间步数为  $2^{14}$ ,时间步长为  $\Delta t = 0.2 \Delta z/c$ 。结果表明(表 2),在各种模式下的数值结果与理论值比较,误差均小于 3%。

表 3 为介质加载情况下,圆柱谐振腔的谐振频率的数值结果。谐振腔的参数为半径 22.5mm,高 39mm,介质高 19.5mm,介质的介电常数  $\epsilon_r = 10$ ,所用网格数为  $31 \times 16 \times$

表 2 圆柱形空腔谐振器的谐振频率 (GHz)

| 模 式               | 理 论 值   | FD-TD 结果 | 模 式               | 理 论 值   | FD-TD 结果 |
|-------------------|---------|----------|-------------------|---------|----------|
| TM <sub>011</sub> | 15.2262 | 15.217   | TE <sub>111</sub> | 13.3145 | 13.344   |
| TM <sub>012</sub> | 23.0616 | 23.045   | TE <sub>112</sub> | 21.8466 | 21.814   |
| TM <sub>110</sub> | 18.2950 | 18.249   | TE <sub>011</sub> | 20.8497 | 20.839   |
| TM <sub>111</sub> | 20.8497 | 20.841   | TE <sub>012</sub> | 27.1055 | 27.146   |
| TM <sub>112</sub> | 27.1055 | 27.112   | TE <sub>211</sub> | 17.6813 | 17.702   |
| TM <sub>210</sub> | 24.5226 | 24.519   | TE <sub>212</sub> | 24.7513 | 24.771   |
| TM <sub>211</sub> | 26.4832 | 26.482   | TE <sub>121</sub> | 27.3520 | 27.338   |
| TM <sub>212</sub> | 31.6442 | 31.544   | TE <sub>122</sub> | 32.3749 | 32.349   |

18, 时间步数  $2^M$ , 步长  $\Delta t = 0.2\Delta z/c$ 。与理论结果比较可以看出, FD-TD 结果明显优于文献[5]所用积分方程法结果。FD-TD 结果精度优于 5%, 而文献[5]的结果精度为 3%。

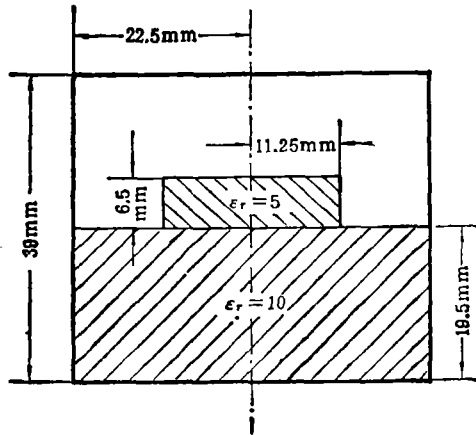


图 2 双层介质加载圆柱谐振腔

有很高的介电常数, 电磁场主要集中在介质内及其附近, 可将距介质一定距离处设为边界, 并将最靠近边界的内层网格上的场赋给边界上的网格点, 以建立简单吸收边界条件。

表 3 介质加载圆柱谐振腔的谐振频率 (GHz)

| 模 式               | 理论值    | 文献[5]  | FD-TD 结果 |
|-------------------|--------|--------|----------|
| TM <sub>011</sub> | 1.9841 | 2.0223 | 1.9840   |
| TE <sub>111</sub> | 2.0945 | 2.0711 | 2.0960   |
| TM <sub>111</sub> | 2.8287 | 2.8075 | 2.8223   |
| TE <sub>011</sub> | 3.2022 | 3.2001 | 3.2014   |
| TM <sub>012</sub> | 3.7518 | 3.7518 | 3.7488   |
| TE <sub>112</sub> | 3.9937 | 3.9619 | 3.9929   |
| TM <sub>112</sub> | 4.3630 | 4.2717 | 4.3503   |
| TE <sub>012</sub> | 4.7725 | 4.7556 | 4.7715   |

表 4 双层介质加载圆柱谐振腔的谐振频率及偏移量

| 模 式               | FD-TD 结果 (GHz) | $\Delta f$ (MHz) |
|-------------------|----------------|------------------|
| TM <sub>011</sub> | 1.9585         | 25.5             |
| TE <sub>111</sub> | 2.0556         | 40.4             |
| TM <sub>111</sub> | 2.7992         | 23.1             |
| TE <sub>011</sub> | 3.1757         | 25.7             |
| TM <sub>012</sub> | 3.6040         | 144.8            |
| TE <sub>112</sub> | 3.8226         | 170.3            |
| TM <sub>112</sub> | 4.2396         | 110.7            |
| TE <sub>012</sub> | 4.6633         | 108.2            |

上述介质加载谐振腔如在介质上再加入一小介质片, 可微调谐振频率, 其偏移量可用 FD-TD 法进行预测。

表 4 为按图 2 所标尺寸计算的双层介质加载谐振器的谐振频率的变化情况。

### 3.3 开放式介质柱谐振器

如果我们只关心 TE<sub>0</sub> 或 TM<sub>0</sub> 模式的情况, 只需将程序的  $\phi$  方向网格数设定为 1。这时可大大减少 CPU 运行时间和占用的内存。据此我们计算了圆柱形介质谐振器<sup>[6]</sup>。由于此种谐振器具

当取介质中心至网格边界的距离为介质半径的 3—4 倍时,可近似为等效开放情况。

表 5 是直径  $A$  为 10mm,长度  $L$  变化时,介质谐振器 ( $\epsilon_r = 100$ ) 谐振频率的数值结果、实验值和其它算法的计算结果。可以看出,FD-TD 具有很高的精度。图 3 为谐振器长度不变  $L = 5\text{mm}$ ,直径变化时,谐振频率的变化情况。与表 5 比较可看出,谐振器的直径,长度变化时都对谐振频率有影响,而直径方向的影响更明显一些。

表 5 介质谐振器  $\text{TE}_{010}$  模的谐振频率 (GHz)

| $A$<br>(mm) | $L$<br>(mm) | $\epsilon_r$ | 偶匹配法<br>(OWGM) | 边界元法<br>(BEM) | FD-TD<br>结果 | 实验<br>结果 |
|-------------|-------------|--------------|----------------|---------------|-------------|----------|
| 10          | 10          | 100          | 2.740          | 2.730         | 2.728       | 2.720    |
| 10          | 5           | 100          | 3.130          | 3.137         | 3.115       | 3.110    |
| 10          | 3           | 100          | 3.675          | 3.810         | 3.600       | 3.654    |

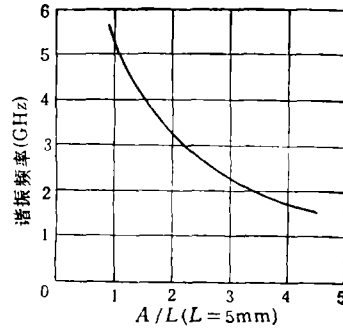


图 3 介质谐振器谐振频率变化曲线

#### 4 结论

FD-TD 法可以一次完成对任意模式谐振频率的计算,可以节省大量的 CPU 时间。另外,计算时不需预先知道内部的场形式,已知结构尺寸和材料参数就可算出谐振频率和场分布。它已被证明为一种准确,技术简单,适应性强和省时的数值方法,具有其它方法无可比拟的优越性。

#### 参 考 文 献

- [1] Yee K S. IEEE Trans. on AP, 1966, AP-14(5): 302—307.
- [2] Choi D H, et al. IEEE Trans. on MTT, 1986, MTT-34(12): 1464—1470.
- [3] Navarro A, et al. IEEE Trans. on MTT, 1991, MTT-39(1): 14—17.
- [4] Bi E, et al. IEEE Trans. on MTT, 1992, MTT-40(8): 1611—1619.
- [5] Ruiz J, et al. IEEE Trans. on MTT, 1989, MTT-37(11): 1814—1816.
- [6] Geyi W, et al. IEE Proc. -H, 1988, 135(6): 333—338.

### STUDY OF 3-D CYLINDRICAL RESONATORS WITH FD-TD METHOD

Wang Chi Gao Benqing Deng Ciping

(Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**Abstract** A program which can calculate resonant frequencies with arbitrary modes by FD-TD method coupled with the discrete Fourier transform is set up. Several resonators including coaxial resonators, empty cylindrical resonators, dielectric loaded cylindrical resonator and dielectric resonator are studied by this method, especially the spurious mode's resonant frequencies of the coaxial cavity are obtained. The numerical results are in excellent agreement with the rigorous theoretical solutions and experimental results. The resonant frequencies of a kind of two-layer dielectric-loaded cavity are also studied and some useful results are obtained.

**Key words** Resonator, Finite-difference time-domain method (FD-TD), Discrete Fourier transform