归一化的 Haar 变换谱系数的图形表示及其与 K 图的转换 [1]

程 捷 陈偕雄
(浙江大学信息与电子工程学系 杭州 310028)

摘 要 该文提出了归一化 Haar 变换谱系数的图形表示— ha 系数图，给出了布尔函数卡诺图与 ha 系数图之间的图形转换方法，并举例说明转换过程．该方法具有简单、直观和准确的特点．
关键词 Haar 变换，谱技术，图形变换
中图号 TN79

1 引 言

1910 年 Haar 提出了 Harr 函数组 [1-3]，它具备周期性、正交性和完备性。文献 [1] 给出了 Harr 函数的定义：

$$h(0,0,t)=1, \qquad t\in[0,1]$$

$$h(i,m,t)=\begin{cases}2^{\frac{i}{2}}, & \text{如}\dfrac{m-1}{2^i}\le t<\left[\left(m-\dfrac{1}{2}\right)\Big/2^i\right]\\ -2^{\frac{i}{2}}, & \text{如}\left[\left(m-\dfrac{1}{2}\right)\Big/2^i\right]\le t<\dfrac{m}{2^i}\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{1}$$

其中 $0\le i<\log_2 N$, $m=0,1,2,\cdots,2^n-1$ 。对于上述 Harr 函数组进行采样，得到 $n=3$ 的 Harr 矩阵 [2]：

$$H^*(3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\2&-2&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&-2&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&-2&0&0\\0&0&0&0&0&0&2&-2\end{pmatrix} \tag{2}$$

对 (2) 式所示 Harr 矩阵进行归一化，可得

$$H(3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&-1&-1\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix} \tag{3}$$

[1] 2000-04-21 收到， 2000-09-18 定稿
浙江省自然科学基金资助项目

上述归一化的 Harr 变换矩阵行与行之间仍保持正交，然而列与列之间不再保持正交 [2]。

利用上式所示归一化的 Harr 变换矩阵可以将布尔函数从 $\{0,1\}$ 空间变换至 $\{+1,-1\}$ 空间，并由下式得到布尔函数在 $\{+1,-1\}$ 空间的谱系数：

$$S] = [H] \bullet F] \tag{4}$$

式中 $F]$ 为经过 $\{0,1\} \to \{+1,-1\}$ 变换后的函数值列矢量．由 (4) 式可以得出其逆变换：

$$F] = [H]^{-1} \bullet S] \tag{5}$$

式中 $[H]^{-1}$ 可以用线性代数中求逆阵的方法获得．以 $n = 3$ 为例，可以求得 $H(3)$ 的逆阵 $[H(3)]^{-1}$：

$$[H(3)]^{-1} = \frac{1}{2^3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

关于 Haar 变换及归一化的 Haar 变换可以在许多文献 [1−3] 中找到。然而关于归一化的 Haar 变换的图形表示以及与 K 图的关系迄今缺乏研究，本文将对此进行研究。

2 归一化的 Haar 变换谱系数的图形表示以及由 K 图至谱系数图的变换

以三变量为例，参照布尔函数的 b_j 系数图 [4] 的结构我们可以提出归一化的 Haar 变换谱系数的图形表示 (简称 ha 系数图)，如图 1 所示。图中变量 $Z_i \in \{+1,-1\}$。类似地可得到二变量、四变量及更多变量数的 ha 系数图。由图 1 可以写出该函数在谱域中的代数表示式：

$$F(Z_3, Z_2, Z_1) = \frac{1}{8}(S_0 + S_1Z_1 + S_2Z_2 + S_3Z_1Z_2 + S_4Z_3 + S_5Z_1Z_3 + S_6Z_2Z_3 + S_7Z_1Z_2Z_3) \tag{7}$$

由图 1 及上式可以看出，图中每个填入量 S_i 与某个乘积项相对应，任意两个相邻格所对应的乘积项只差一个变量。

以三变量为例，设三变量函数的函数值列矢量为 $F_0F_1F_2F_3F_4F_5F_6F_7]^t$，式中 t 表示转置矩阵．由 (3) 式与 (4) 式可以求出各谱系数 S_0–S_7：

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7, \quad S_1 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 - F_4 - F_5 - F_6 - F_7 \\ S_2 = F_0 + F_1 - F_2 - F_3, \quad S_3 = F_4 + F_5 - F_6 - F_7 \\ S_4 = F_0 - F_1, \quad S_5 = F_2 - F_3, \quad S_6 = F_4 - F_5, \quad S_7 = F_6 - F_7 \end{array}\right\} \tag{8}$$

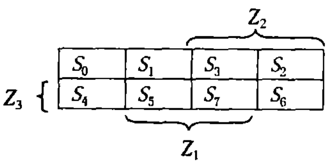


图 1 三变量 ha 系数图

根据上述诸式可以提出一种由 K 图变换至 ha 系数图的图形方法：

(1) 将 K 图中的 $0 \to +1,\ 1 \to -1$，变量 $X_i \to Z_i$。

(2) 对变量 Z_1 作折叠加减运算，$\overline{Z}_1$ 区域作加法运算，Z_1 区域作减法运算. 在 Z_1 区域获得 2^{n-1} 个谱系数 $S_{2^{n-1}}, S_{2^{n-1}+1}, \cdots, S_{2^n-1}$，并将 Z_1 区域删去.

(3) 对变量 Z_2 作折叠加减运算，在 Z_2 区域获得 2^{n-2} 个谱系数 $S_{2^{n-2}}$、$S_{2^{n-2}+1}$、$\cdots$、$S_{2^{n-1}-1}$，并将 Z_2 区域删去.

(4) 依次对变量 $Z_3, Z_4, \cdots, Z_n$ 作折叠加减运算直至获得全部谱系数.

图 2(a)- 图 2(e) 给出了三变量函数 K 图变换至 ha 系数图的过程.

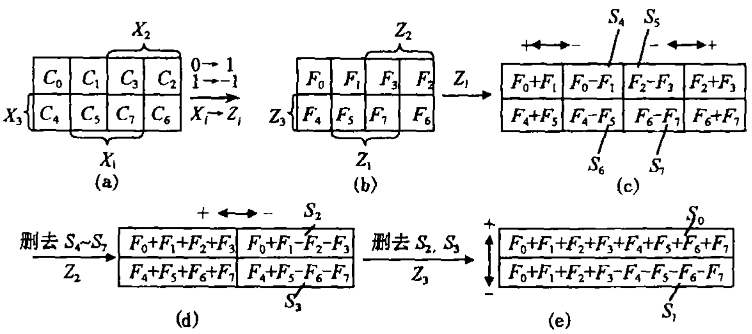


图 2　K 图 →ha 系数图的转换过程

根据上述对各变量依次作折迭运算的规律可以得到与文献 [2] 提出的快速算法相一致的算法，对于 n 变量而言仅需 $2^{n+1}-2$ 次加减运算.

例 1　试用图形方法将函数 $f_1(x_3, x_2, x_1) = \Sigma 1, 3, 6, 7$ 的 K 图变换成 ha 系数图.

函数 f_1 的 K 图如图 3(a) 所示. 将该图作 $0 \to 1,\ 1 \to -1,\ X_i \to Z_i$ 变换后得到图 3(b)．将图 3(b) 对 Z_1 进行折叠加减得到图 3(c)，由此可以得到 S_4-S_7．将图 3(c) 删去 S_4-S_7 相应的四格后再对 Z_2 进行折叠加减得到图 3(d)，由此可以得到 S_2, S_3．从图 3(d) 中删去 S_2、S_3 后再对 Z_3 进行折叠加减得到图 3(e)，由此可以得到 S_0, S_1．至此全部谱系数 S_0-S_7 均已求得，将它们按图 1 排列填入便可得到该函数的 ha 系数图，如图 3(f) 所示.

3 ha 系数图至 K 图的变换

现在讨论上述转换的逆问题，即已知某函数的归一化的 Haar 变换谱系数或 ha 系数图求取该函数的 K 图. 由 (5) 式及 (6) 式可以得到

$$\left.\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{8}(S_0 + S_1 + 2S_2 + 4S_4), & F_1 &= \frac{1}{8}(S_0 + S_1 + 2S_2 - 4S_4) \\
F_2 &= \frac{1}{8}(S_0 + S_1 - 2S_2 + 4S_5), & F_3 &= \frac{1}{8}(S_0 + S_1 - 2S_2 - 4S_5) \\
F_4 &= \frac{1}{8}(S_0 - S_1 + 2S_3 + 4S_6), & F_5 &= \frac{1}{8}(S_0 - S_1 + 2S_3 - 4S_6) \\
F_6 &= \frac{1}{8}(S_0 - S_1 - 2S_3 + 4S_7), & F_7 &= \frac{1}{8}(S_0 - S_1 - 2S_3 - 4S_7)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

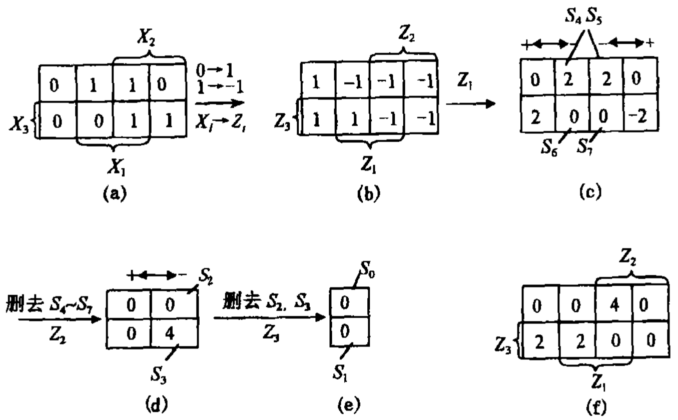


图 3 f_1 的 K 图 →ha 系数图的转换

为便于进行图形变换操作，引入

$$S_i' = 2^{[\log_2 i]} \bullet S_i \tag{10}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$，[ ] 表示取整运算．以三变量为例，即有 $S_0' = S_0$, $S_1' = S_1$, $S_2' = 2S_2$, $S_3' = 2S_3$, $S_4' = 4S_4$, $S_5' = 4S_5$, $S_6' = 4S_6$, $S_7' = 4S_7$ ．将上述诸式代入 (9) 式可得

$$F_0 = \frac{1}{8}(S_0' + S_1' + S_2' + S_4'), \quad F_1 = \frac{1}{8}(S_0' + S_1' + S_2' - S_4')$$

$$F_2 = \frac{1}{8}(S_0' + S_1' - S_2' + S_5'), \quad F_3 = \frac{1}{8}(S_0' + S_1' - S_2' - S_5')$$

$$F_4 = \frac{1}{8}(S_0' - S_1' + S_3' + S_6'), \quad F_5 = \frac{1}{8}(S_0' - S_1' + S_3' - S_6')$$

$$F_6 = \frac{1}{8}(S_0' - S_1' - S_3' + S_7'), \quad F_7 = \frac{1}{8}(S_0' - S_1' - S_3' - S_7')$$

根据上述诸式，参照由 K 图至 ha 系数图变换步骤我们可以提出由 ha 系数图变换至 K 图的图形方法：

(1) 按 (10) 式对不同脚标的各谱系数进行加权，加权后的 ha 系数图如图 4(a) 所示．

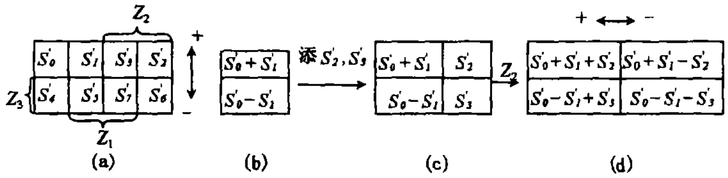
(2) 构造二格谱系数图填入 S_0', S_1' ，对 Z_3 进行折叠加减，如图 4(b) 所示．

(3) 在图 4(b) 右侧添上 S_2', S_3' 两格，并对 Z_2 进行折叠加减，分别如图 4(c) 及 4(d) 所示．

(4) 在图 4(d) 中间插入 S_4', S_5', S_6', S_7' 组成八格图，并对 Z_1 进行折迭加减，分别如图 4(e), 4(f) 所示．

(5) 对图 4(f) 作 $8 \to 0$, $-8 \to 1$ 变换后即可得到该函数的 K 图．

图 4(a)- 图 4(f) 给出了三变量 ha 系数图变换至 K 图的过程．



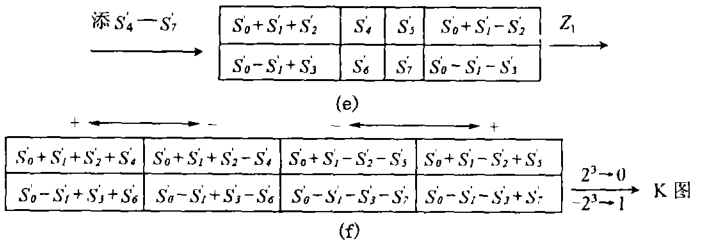


图 4　ha 系数图 →K 图的转换过程

例 2　试用图形方法将图 3(f) 所示的 ha 系数图变换至 K 图。

首先按 (10) 式求得 $S_0' = S_0 = 0$, $S_1' = S_1 = 0$, $S_2' = 2S_2 = 0$, $S_3' = 2S_3 = 8$, $S_4' = 4S_4 = 8$, $S_5' = 4S_5 = 8$, $S_6' = 4S_6 = 0$, $S_7' = 4S_7 = 0$ 。以 S_0', S_1' 构造二格谱系数图并进行折叠加减运算如图 5(a) 所示。对图 5(a) 添 S_2', S_3' 二格得图 5(b) 后对 Z_2 进行折迭运算得图 5(c) 。在图 5(c) 中插入 S_4'-S_7' 四格得图 5(d) 后对 Z_1 进行折叠运算得图 5(e) 。将图 5(e) 作 $8 \to 0$, $-8 \to 1$, $Z_i \to X_i$ 变换即可得到该函数的 K 图。

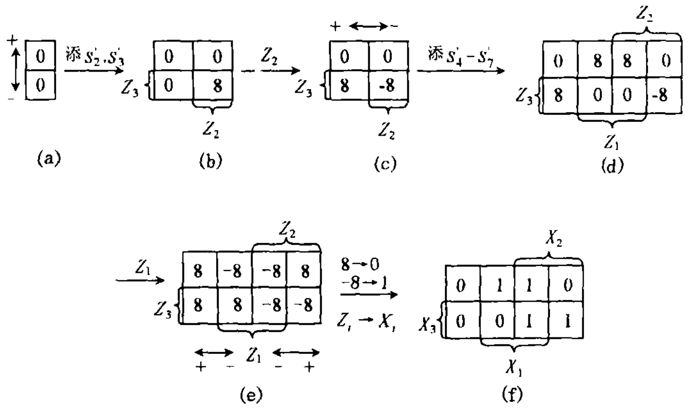


图 5　例 2 函数的 ha 系数图 →K 图的转换

4 结　论

本文提出了归一化 Haar 变换谱系数的图形表示— ha 系数图，并在分析 ha 系数与变换后的布尔函数值之间关系的基础上提出了 ha 系数图与函数 K 图之间的图形变换方法。虽然本文举例限于三变量函数，但是该图形变换方法可以应用于任意变量的图形变换。

ha 系数图直观地给出了布尔函数的全局图像。文中提出的 K 图与 ha 系数图之间的转换与其他的图形转换 [4−6] 一样具有直观、易于掌握等优点。然而，与 K 图、b_j 图等图形方法相类似， ha 系数图在变量数大于 5 时就会丧失直观、简单的优点，因此一般而言 ha 系数图适用于变量数不大于 5 的情况。关于 ha 系数图在逻辑综合，函数对称性的检测及组合电路的故障检测等领域中的应用还有待进一步的研究。

参 考 文 献

[1] N. 阿罕麦德, K. R. 罗著, 数字信号处理中的正交变换, 北京, 人民邮电出版社, 1979, 179-191.

[2] S. L. Hurst, D. M. Miller, J. C. Muzio, Spectral Techniques in Digital Logic, London, Academic Press, 1985, 24-34.

[3] S. L. Hurst, The Haar transform in digital network synthesis, IEEE Proc. 11th ISMVL., Oklahoma, 1981, 10-18.

[4] Wu X, Chen X, S. L. Hurst, Mapping of Reed-Muller coefficients and the minimization of exclusive-OR switching function, IEE Proc.-E, 1982, 129(1), 15-20.

[5] Chen X, Transformation between two kinds of expansion coefficients of symmetric function based on mapping method, Journal of Electronics(China), 1996, 13(4), 366-372.

[6] Chen X, The mapping of spectral coefficients and its application, Computer & Electronic Engineering, 1982, 9(3-4), 167-180.

MAPPING OF SPECTRAL COEFFICIENTS FOR NORMALIZED HAAR TRANSFORM AND TRANSFORM BETWEEN IT AND K-MAP

Cheng Jie Chen Xiexiong

(*Dept. of Info. and Electron. Eng., Zhejiang University, Hangzhou* 310028, China)

Abstract This paper proposes the mapping of spectral coefficients for normalized Haar transform—ha map, and gives the mapping transform methods between ha map and K-map. This transform process is shown by examples. This method has the feature of simplicity, intuition and precision.

Key words Haar transform, Spectral technique, Mapping method

程 捷: 男, 1964 年生, 博士, 副教授, 主要从事数字电子学研究.

陈偕雄: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事数字电子学, 多值逻辑及数字集成电路设计理论研究.