

复合矩形域上二维电磁场边值问题的直线法分析*

洪 伟
(南京工学院)

提 要

本文基于直线法的基本思想提出了一种分析复合矩形域上二维电磁场边值问题的新方法,即将偏微分方程沿一维离散化,从而转化为对于另一维变量的常微分方程组。在离散化过程中,本文引入了截断误差 $O(h^4)$ 的高精度格式,提出了在各种齐次边界条件下确定离散化常微分方程组通解的反推法,最后用最小二乘逼近提高解的精度。对矩形同轴线和脊波导的主模和高次模截止波长以及矩形域内静电位分布的数值计算结果与有关文献中的结果吻合得很好,体现了该方法简便、精度高和计算量小的优点。

一、用反推法确定离散化常微分方程组的通解

考虑矩形域上的二维本征值问题(图1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_c^2 u &= 0, \\ \mathcal{B}_x u|_{x=0} &= \varphi(y), \quad \mathcal{B}_x u|_{x=a} = \psi(y), \\ \mathcal{B}_y u|_{y=0} &= 0, \quad \mathcal{B}_y u|_{y=b} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中边界算子

$$\mathcal{B}_\xi = \begin{cases} 1, & \text{(第一类边界条件);} \\ \frac{\partial}{\partial \xi}, & \text{(第二类边界条件);} \end{cases}$$

$$\xi = x, y.$$

用 n 条间距为 h 的直线划分矩形域如图1所示,并用中心差商近似位函数 u 对 y 的二阶偏导

$$\left. \begin{aligned} u''_y &= \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] \\ &\quad - \frac{1}{12} u_y^{(4)}(x, y_k) h^2 + O(h^4), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$
$$k = 1, 2, \dots, n.$$

* 1985年12月16日收到,1987年1月12日修改定稿。

对上式求两次偏导得

$$u_y^{(4)}(x, y_k) = \frac{1}{h^2} [u_{yy}''(x, y_{k+1}) - 2u_{yy}''(x, y_k) + u_{yy}''(x, y_{k-1})] + O(h^2).$$

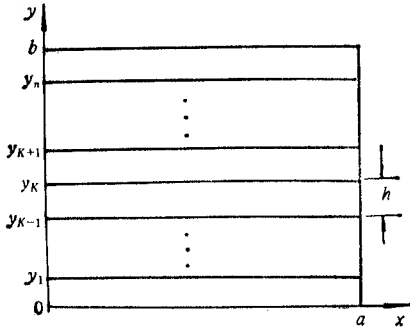


图1 简单矩形域及其划分

将(1)式代入上式得

$$\begin{aligned} h^2 u_y^{(4)}(x, y_k) &= -k_c^2 [u_{k+1}(x) \\ &\quad - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] \\ &\quad - [u_{k+1}''(x) - 2u_k''(x) \\ &\quad + u_{k-1}''(x)] + O(h^4). \end{aligned}$$

将上式代入(2)式右端后,再代回(1)式,即可得截断误差 $O(h^4)$ 的离散化常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) \\ + u_{k-1}(x)] + \frac{5}{6} k_c^2 u_k(x) + \frac{k_c^2}{12} [u_{k+1}(x) + u_{k-1}(x)] + O(h^4) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

略去 $O(h^4)$, 并分离变量 $u_k(x) = r(k)v(x)$, 则(3)式可写成

$$\begin{aligned} \frac{-v''}{v} &= \left\{ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{k_c^2}{12} \right) [r(k+1) + r(k-1)] + \left(\frac{5}{6} k_c^2 - \frac{2}{h^2} \right) r(k) \right\} / \\ &\left\{ \frac{1}{12} [r(k+1) + r(k-1)] + \frac{5}{6} r(k) \right\} = \delta^2 (\text{常数}), \end{aligned}$$

或

$$v'' + \delta^2 v = 0, \quad (4)$$

$$r(k+1) - \alpha r(k) + r(k-1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

其中

$$\alpha = \frac{2 - \frac{5(k_c^2 - \delta^2)}{6} h^2}{1 + \frac{k_c^2 - \delta^2}{12} h^2}. \quad (6)$$

对应于边界条件 $u|_{y=0,b} = 0$, (4)式的通解为

$$v(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x,$$

利用条件 $r(0) = r(n+1) = 0$, 可得差分方程(5)式的通解^[1]

$$r(k) = C \sin \frac{\pi s k}{n+1}, \quad k, s = 1, 2, \dots, n.$$

最后得各条直线上位函数 u 的通解

$$\left. \begin{aligned} u_k(x) = r(k)v(x) &= \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi s k}{n+1} (A_s \cos \delta_s x + B_s \sin \delta_s x), \\ k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中

$$\delta_s^2 = k_c^2 - \frac{24 \sin \frac{\pi s}{2(n+1)}}{h^2 \left(5 + \cos \frac{\pi s}{n+1} \right)}.$$

若边界 $y=0$ 或 b 上为非第一类齐次边界条件, 则很难准确确定差分方程 (5) 式的通解。为此, 本文提出了一种确定常微分方程组 (3) 式通解的简单方法——反推法。将通解 (7) 式与分离变量法的严格解^[2]

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sin \frac{\pi s y}{b} (A_s \cos k_x x + B_s \sin k_x x), \\ k_x^2 &= k_c^2 - \left(\frac{\pi s}{b} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

比较, 解 (7) 式正是 (8) 式的截项近似, 由于同时将 k_x 修正为 δ_x 而补偿了截断误差, 使之达到 $O(h^4)$ 的准确度。根据上述结论的启发, 可以直接利用分离变量法解的形式, 反推常微分方程组 (3) 式的通解, 这也适合于其它边界条件的情况。例如, 对于边界条件

$$u'_y|_{y=0, b} = 0,$$

分离变量解为

$$u(x, y_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \cos \frac{\pi s y_k}{b} (A_s \cos k_x x + B_s \sin k_x x). \quad (9)$$

显然应有 $u(x, y_k) = r(k)v(x)$

$$r(k) = \cos \frac{\pi s y_k}{b} = \cos \frac{\pi s k}{n+1}.$$

为使解具有 $O(h^4)$ 的准确度, $r(k)$ 必定满足差分方程 (5) 式, 从而有

$$\cos \frac{\pi s (k+1)}{n+1} - \alpha \cos \frac{\pi s k}{n+1} + \cos \frac{\pi s (k-1)}{n+1} = 0.$$

化简得

$$\alpha = 2 \cos \frac{\pi s}{n+1}.$$

代入 (6) 式仍得到与 (7) 式中相同形式的 δ_s^2 , 于是有常微分方程组 (3) 式的通解

$$\left. \begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{s=0}^{n-1} \cos \frac{\pi s k}{n+1} (A_s \cos \delta_s x + B_s \sin \delta_s x), \\ \delta_s^2 &= k_c^2 - \frac{24 \sin^2 \frac{\pi s}{2(n+1)}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{\pi s}{n+1} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

同理还可得对应于混合齐次边界条件的通解。

(1) 对应于 $u|_{y=b} = 0, u'_y|_{y=0} = 0$, 有

$$\left. \begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{s=1}^n \cos \frac{\pi(s-0.5)k}{n+1} (A_s \cos \delta_s x + B_s \sin \delta_s x), \\ \delta_s^2 &= k_c^2 - \frac{24 \sin^2 \frac{\pi(s-0.5)}{2(n+1)}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{\pi(s-0.5)}{n+1} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(2) 对应于 $u|_{y=0} = 0, u'_y|_{y=b} = 0$, 有

$$\left. \begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi(s-0.5)k}{n+1} (A_s \cos \delta_s x + B_s \sin \delta_s x), \\ \delta_s^2 &= k_c^2 - \frac{24 \sin^2 \frac{\pi(s-0.5)}{2(n+1)}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{\pi(s-0.5)}{n+1} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

可见,反推法省去了解差分方程(5)式的复杂过程和确定 $r(k)$ 边界条件时的困难,从而可快速、准确地得出离散化常微分方程组的通解。在以上分析中,若令 $k_c^2 = 0$, 则退化为静场问题的表达式。

二、复合矩形域上的本征值问题

设复合矩形域由 m 个简单矩形域组合而成(图2), 则常微分方程组(3)式在各个简单矩形域中的通解为

$$\left. \begin{aligned} u_k^v(x) &= \sum_{s=1}^{n_v} r_v(s, y_k) (A_s^v \cos \delta_s^v x + B_s^v \sin \delta_s^v x), \\ v &= 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n_v, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 n_v 是第 v 个区域内的分格线数。根据第一节中的讨论, 第 v 个区域上下底边上各种齐次边界条件所对应的 $r_v(s, y_k)$ 和 δ_s^v 如表1所示。

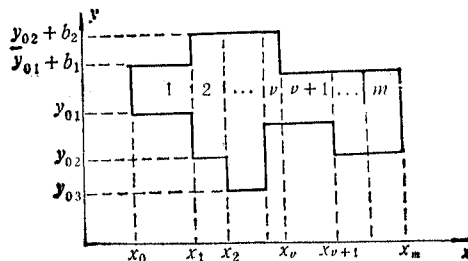


图2 复合矩形域及其分解

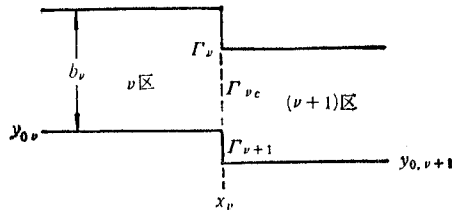
表 1 各种齐次边界条件下的 $r_\nu(s, y_k)$ 和 δ_ν^2

边界条件	$r_\nu(s, y_k)$	$(\delta_\nu^2)^2$
$u^\nu _{y=y_{0\nu}} = 0$ $(u^\nu)_y _{y=y_{0\nu}+b_\nu} = 0$	$\sin \frac{\pi(s-0.5)(y_k - y_{0\nu})}{b_\nu}$	$k_\varepsilon^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi(s-0.5)}{2(n_\nu+1)}}{h_\nu^2 \left[5 + \cos \frac{\pi(s-0.5)}{n_\nu+1} \right]}$
$(u^\nu)_y _{y=y_{0\nu}} = 0$ $u^\nu _{y=y_{0\nu}+b_\nu} = 0$	$\cos \frac{\pi(s-0.5)(y_k - y_{0\nu})}{b_\nu}$	同上
$(u^\nu)_y _{y=y_{0\nu}} = 0$ $(u^\nu)_y _{y=y_{0\nu}+b_\nu} = 0$	$\cos \frac{\pi s(y_k - y_{0\nu})}{b_\nu}$	$k_\varepsilon^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi s}{2(n_\nu+1)}}{h_\nu^2 \left(5 + \cos \frac{\pi s}{n_\nu+1} \right)}$
$u^\nu _{y=y_{0\nu}} = 0$ $u^\nu _{y=y_{0\nu}+b_\nu} = 0$	$\sin \frac{\pi s(y_k - y_{0\nu})}{b_\nu}$	同上

为了确定通解 (13) 式中的系数 $\{A_i^\nu\}$ 和 $\{B_i^\nu\}$, 需要利用 $x = x_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, m$) 边界上的连续性条件和电壁、磁壁条件. 设 ν 区与 $(\nu + 1)$ 区有公共边界段 $\Gamma_{\nu c}$ 和非公共边界段 Γ_ν 、 $\Gamma_{\nu+1}$ (图 3), 相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u^\nu(x_\nu) &= u^{\nu+1}(x_\nu), \\ \frac{\partial}{\partial x} u^\nu(x_\nu) &= \frac{\partial}{\partial x} u^{\nu+1}(x_\nu), \\ y_k^{(\nu)} &= y_l^{(\nu+1)} \in \Gamma_{\nu c}, \\ \nu &= 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

和

图 3 第 ν 区与第 $\nu + 1$ 区交接线

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_x^\nu u_k^\nu(x_\nu) &= 0, y_k^{(\nu)} \in \Gamma_\nu; \\ \mathcal{B}_x^{\nu+1} u_l^{\nu+1}(x_\nu) &= 0, y_l^{(\nu+1)} \in \Gamma_{\nu+1}; \\ \nu &= 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将通解 (13) 式代入上列边界条件, 得关于 $\{A_i^\nu\}$ 和 $\{B_i^\nu\}$ 的线性代数方程组, 并可写成矩阵形式

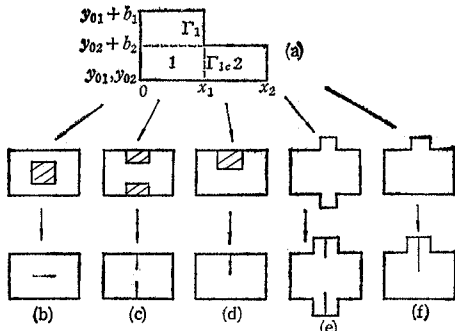


图 4 截面为复合矩形域的一些波导

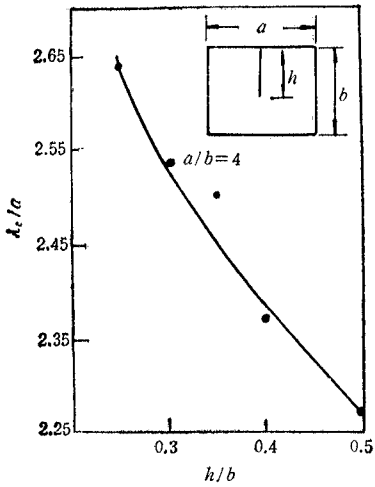
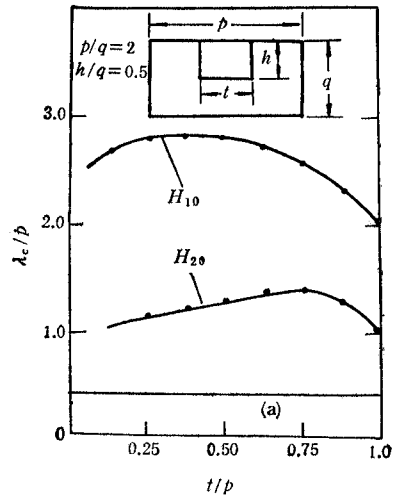


图 5 零厚度脊波导主模截止波长
实线为本文计算结果
圆点为文献[4]的结果

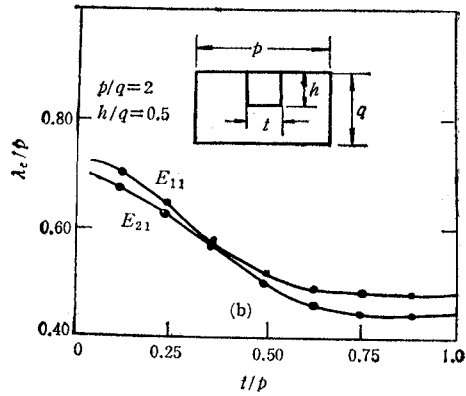


图 6 脊波导主模和高次模截止波长
实线为本文结果
圆点为文献[3]的结果

$$\begin{bmatrix} [G_0] \\ [F_0] [G_1] & [0] \\ & [F_2] [G_2] \\ & & \dots \\ [0] & & & [F_{m-1}] [G_m] \\ & & & & [F_m] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A^{(1)}] \\ [B^{(1)}] \\ [A^{(2)}] \\ [B^{(2)}] \\ \vdots \\ \vdots \\ [A^{(m)}] \\ [B^{(m)}] \end{bmatrix} = [0], \quad (16)$$

式中

$$[F_0] = [[r_1(s, y_k) \mathcal{B}_x^0 \cos \delta'_x] [r_1(s, y_k) \mathcal{B}_x^0 \sin \delta'_x]],$$

$$\begin{aligned}
 & s, k = 1, 2, \dots, n_1; \\
 [F_v] = & \begin{bmatrix} [r_v(s, y_k) \mathcal{B}_x^v \cos \delta_s^v x_v] & [r_v(s, y_k) \mathcal{B}_x^v \sin \delta_s^v x_v] & \dots \\ [0] & [0] & \dots \\ [r_v(s, y_k) \cos \delta_s^v x_v] & [r_v(s, y_k) \sin \delta_s^v x_v] & \dots \\ [r_v(s, y_l) \delta_s^v \sin \delta_s^v x_v] & -[r_v(s, y_l) \delta_s^v \cos \delta_s^v x_v] & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots \gamma_k \in \Gamma_v \\ \dots \gamma_l \in \Gamma_{v+1} \\ \dots \gamma_k \in \Gamma_{ve} \\ \dots \gamma_l \in \Gamma_{ve} \end{matrix} \\
 & k, s = 1, 2, \dots, n_v; l = 1, 2, \dots, n_{v+1}; \\
 [F_m] = & [[r_m(s, y_k) \mathcal{B}_x^m \cos \delta_s^m x_m] [r_m(s, y_k) \mathcal{B}_x^m \sin \delta_s^m x_m]], \\
 & s, k = 1, 2, \dots, n_m; \\
 [G_v] = & \begin{bmatrix} [0] & [0] & \dots \\ [r_{v+1}(s, y_l) \mathcal{B}_x^{v+1} \cos \delta_s^{v+1} x_v] & [r_{v+1}(s, y_l) \mathcal{B}_x^{v+1} \sin \delta_s^{v+1} x_v] & \dots \\ -[r_{v+1}(s, y_k) \cos \delta_s^{v+1} x_v] & -[r_{v+1}(s, y_k) \sin \delta_s^{v+1} x_v] & \dots \\ -[r_{v+1}(s, y_l) \delta_s^{v+1} \sin \delta_s^{v+1} x_v] & [r_{v+1}(s, y_l) \delta_s^{v+1} \cos \delta_s^{v+1} x_v] & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots \gamma_k \in \Gamma_v \\ \dots \gamma_l \in \Gamma_{v+1} \\ \dots \gamma_k \in \Gamma_{ve} \\ \dots \gamma_l \in \Gamma_{ve} \end{matrix} \\
 & k = 1, 2, \dots, n_v; s, l = 1, 2, \dots, n_{v+1}; \\
 [A^{(v)}] = & \begin{bmatrix} A_1^v \\ A_2^v \\ \vdots \\ A_{n_v}^v \end{bmatrix}, \quad [B^{(v)}] = \begin{bmatrix} B_1^v \\ B_2^v \\ \vdots \\ B_{n_v}^v \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

简记(16)式为

$$[T][\Pi] = [0], \tag{17}$$

则由获得非零解的条件

$$\det[T] = 0, \tag{18}$$

可求得该复合矩形域问题的本征值 k_c 。

三、数值结果

许多截面为复合矩形域的波导(图4)都可利用对称性分解成图4(a)的单元。因此，

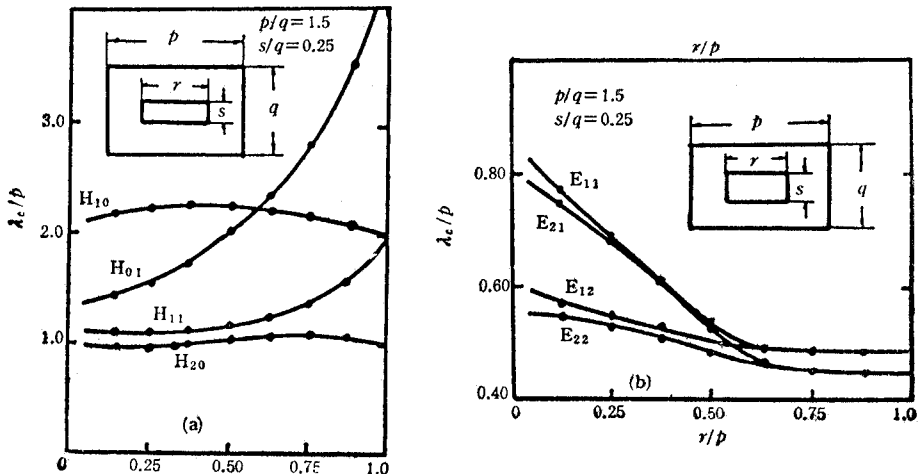


图7 矩形同轴线高次模截止波长 实线为本文结果 圆点为文献[3]的结果

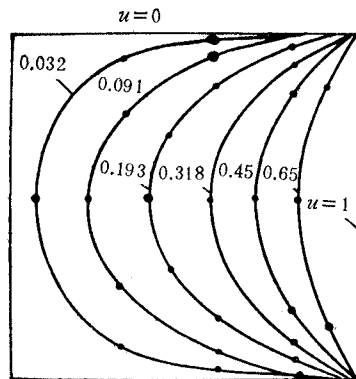


图 8 静电位分布 δ 实线为本文理论值 圆点为解析结果

只需计算单元结构在各种边界条件下的解。据此,计算了矩形同轴线、脊波导和零厚度脊波导主模和高次模截止波长,结果示于图 5、6、7,与文献 [3, 4] 的结果吻合得很好。计算时矩阵 $[T]$ 的阶数 $(n_1 + n_2) \leq 14$ 。作为静场算例,本文计算了简单矩形域中的静电位分布,结果示于图 8,与解析结果吻合得很好。

感谢导师章文勋教授阅读全文,并提出许多有益的修改意见,同时感谢导师李嗣范教授的支持和指导。

参 考 文 献

- [1] 南京大学编,偏微分方程数值解法,科学出版社,1979年,PP. 392—417.
- [2] 章文勋,无线电技术中的微分方程,国防工业出版社,1982年,第九、十二章.
- [3] S. T. Saad, et al (ED): Microwave Engineer's Handbook, Vol. 1, Artech House, Inc., (1972).
- [4] N. Marcuvitz: Waveguide Handbook, McGraw-Hill, N. Y. (1951), pp. 400—402.

ANALYSIS OF 2-D ELECTROMAGNETIC BOUNDARY PROBLEMS WITH A COMPOUND RECTANGULAR CROSS-SECTION BY THE METHOD OF LINES

Hong Wei

(Nanjing Institute of Technology)

A method based on the method of lines which discretizes a partial differential equation (PDE) into a system of ordinary differential equations (ODEs) is presented. A difference scheme with an error of $O(h^4)$ is introduced and a simple method for determining the general solutions of the ODEs is given. Finally, the least-square approximation is used for improving the accuracy of the numerical results. Some numerical results for rectangular coaxial line, ridge waveguide, and shielded stripline are also given. These results are in good agreement with that published in literatures.