第15卷 第3期　　电子科学学刊　　Vol. 15, No. 3
1993年5月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1993

用共轭梯度法改善 AR 谱估计性能

曾 凡 鑫
（重庆通信学院电子线路教研室，重庆 630035）

摘要　本文基于 AR 模型前向预测误差最小，提出用共轭梯度法搜索 AR 模型参数，从而实现谱估计．计算机仿真表明，用这种方法进行谱估计，不会产生谱漂移现象，谱分裂得到明显减弱，而且还具有很高的频率分辨能力．用这种方法估计的信号频谱性能接近于 Marple 算法．

关键词　谱估计；共轭梯度法，谱漂移；谱分裂

1. 引言

用自回归模型（AR 模型）实现频谱估计是现代谱估计的一个重要内容，用这种模型实现谱估计的关键在于寻找 AR 模型的参数．

AR 模型的参数可以通过求解著名的 Yule-Walker 方程来获得，但信号的自相关函数往往只能通过有限值来估计，因而效果并不理想．为此，许多学者做了大量探索，最具代表性的是 Burg 算法．人们经过大量实践发现 Burg 算法仍存在严重不足，即有谱漂移和谱分裂现象．随着谱漂移现象规律的揭示[1]，许多优秀的算法不断被提出，其中最有代表性的是 Marple 算法[2]．

本文通过采用共轭梯度法这一技术来估计 AR 参数，在克服谱漂移和谱分裂现象上获得很好的结果．

2. 共轭梯度法

对于 AR 模型，根据线性预测理论，信号值 $x(n)$ 的估计值 $\hat{x}(n)$ 可以用 $x(n)$的各过去值的加权和来表示，即

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k) = -P^T W$$

其中

$$P^T = [a_1, a_2, \cdots, a_N],\ W^T = [x(n-1), x(n-2), \cdots, x(n-N)]$$

估计误差用 $e(n)$ 来表示，即

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + P^T W$$

这里 $e(n)$ 称为线性预测的前向误差．$e(n)$ 的均方误差为

1991.12.09 收到，1992.05.25 定稿．

曾凡鑫　男，1964年生，工学硕士，对自适应信号处理、谱估计、人工神经网络、雷达目标识别等课题有浓厚兴趣．

$$E[e^2(n)] = E[x^2(n)] + 2P^TE[Wx(n)] + P^TE[WW^T]P$$
$$= r(0) + 2P^TB + P^TAP \tag{1}$$

其中

$$r(0) = E[x^2(n)],\quad B^T = \{E[Wx(n)]\}^T = [r(1), r(2), \cdots, r(N)]$$

$$A = E[WW^T] = \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(1-N) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(2-N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r(N-1) & r(N-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

为使前向线性预测误差最小，对 $E[e^2(n)]$ 求关于权向量 P^T 的导数

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial P^T} = 2B + 2AP$$

因而，前向预测误差最小的驻点方程为

$$B + AP = 0 \tag{2}$$

显然，(2)式正好就是 Yule-Walker 方程，这说明 Yule-Walker 方程实质上是前向线性预测均方误差最小的驻点方程。

为了求出 AR 参数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$，我们用最优化理论中的共轭梯度法来搜索这些参数值。作二次函数 $f(X)$

$$f(X) = r(0)/2 + X^TB + X^TAX/2 \tag{3}$$

则 $f(X)$ 的梯度为

$$\nabla f(X) = B + AX$$

我们假定从初始值 $X^1 \in R^N$ 开始，如 X^1 已满足精度要求 $\varepsilon > 0$，即

$$\|\nabla f(X^1)\| \leqslant \varepsilon \quad (\|\nabla f(X)\| = \sqrt{[\nabla f(X)]^T[\nabla f(X)]})$$

则此时就把 X^1 作为权矢量 $P \approx X^1$。否则，通过下列递推式来逐次逼近最佳值。

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k Z^k \tag{4}$$

其中

$$Z^1 = -\nabla f(X^1)$$
$$\lambda_k: \min_{\lambda \geqslant 0} f(X^k + \lambda Z^k) = f(X^k + \lambda_k Z^k)$$

或

$$\lambda_k = -\frac{g_k^TZ^k}{(Z^k)^TAZ^k}, \qquad g_{k+1} = \nabla f(X^{k+1})$$

$$\alpha_k = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}, \qquad Z^{k+1} = -g_{k+1} + \alpha_k Z^k$$

当某一 X^{k^*} 满足 $\|g_{k^*}\| \leqslant \varepsilon$ 时，则权矢量取 $P \approx x^{k^*}$。对一个 N 维向量 X，$f(X)$ 的共轭方向共有 N 个，为了保持共轭方向的优越性，所以每迭代 N 步后，需重新从一个负梯度方向开始，直到满足精度为止。此时，可将第 N 步的权向量估计值作为下一次开始的初始值。

从理论上来说，共轭梯度法只需要 N 步迭代就可以收敛到最小值，但由于舍入误差，一般需要 $2N \sim 5N$ 步。

为了得到适用于共轭梯度法的观测信号瞬时协方差矩阵 A，我们把已获得的前 $2N-$

1 个数据形成矩阵

$$R_x = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N-1) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N-1) & x(N) & \cdots & x(2N-2) \end{bmatrix}$$

则协方差矩阵 A 定义为

$$A = R_x^T R_x/(N-1)$$

这是本文算法唯一的一次矩阵乘法。当数据量多于 $2N-1$ 时，可以用下列方法来对 A 中元素进行更新。

$$a^{(k+1)}(i,j) = a^{(k)}(i,j) \times \frac{N+k-1}{N+k} + \frac{x(i+N+k-1)x(j+N+k-1)}{N+k} \tag{5}$$

$a^{(k+1)}(i,j)$ 就是收到第 $2N+k(k \geqslant 0)$ 个数据采样值后，A 中第 i 行，第 j 列元素。

综上所述，用共轭梯度法实现频谱估计可以按下列流程图来进行。

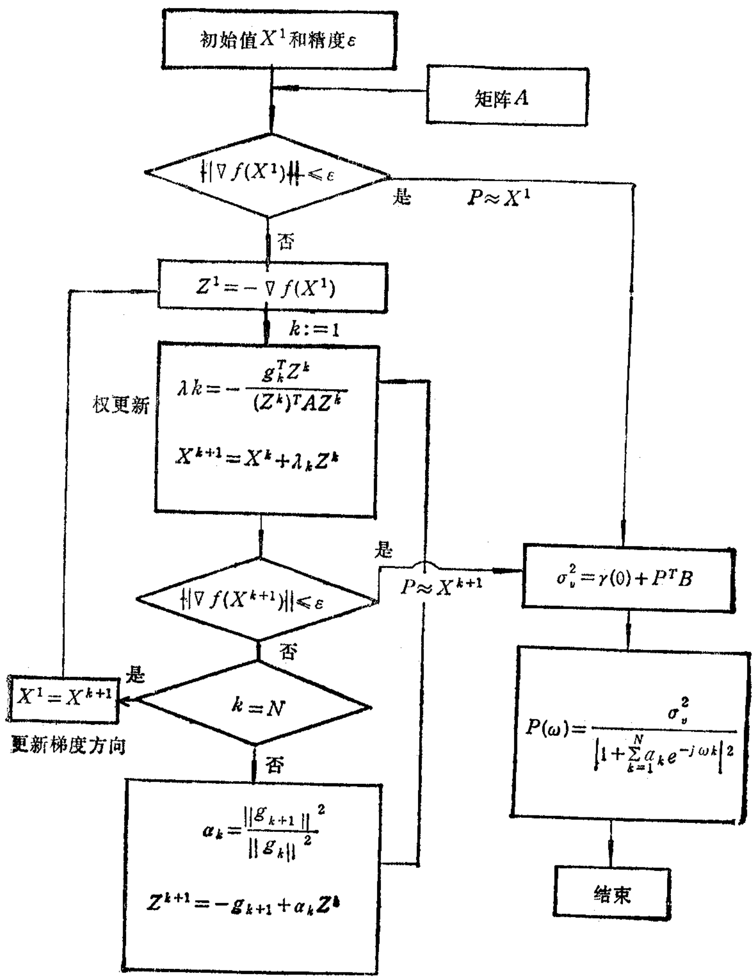

图 1 共轭梯度法实现频谱估计算法流程图

(注：求更新方框中的 λk 应是 λ_k.)

3. 计算机仿真

为了验证本文方法的有效性，我们作了大量仿真实验．本节将给出仿真的典型结果．从这些有限的例子中，我们将看到本文方法已消除了谱漂移，减弱了谱分裂现象，而且有很高的谱分辨能力，谱估计性能接近于 Marple 算法．实验中所需白噪声，按文献[3]提供的方法来产生．初始值均取 $P^T = [1,1,\cdots,1]$．

例 1　谱峰漂移的例子　　正弦信号加白噪声过程为

$$x(n) = a\sin(2\pi fn\Delta t + \varphi) + V(n) \tag{6}$$

取 $a = 1, f = 1\text{Hz}, \varphi = 45°, \Delta t = 0.05\text{s}$．$V(n)$ 的方差 $\sigma_V^2 = 0.05$，采样 15 点，做 7 阶 AR 模型的功率谱估计．在本例中，文献[4]对 Marple, Burg 算法，以及利用前向预测误差方程的 FLS 算法[4]进行了模拟比较，Burg 算法和 FLS 算法产生了严重的谱漂移，仅 Marple 算法获得了较好的频率估计．图 2 给出了本文算法和 Marple 算法估计频谱的结果．

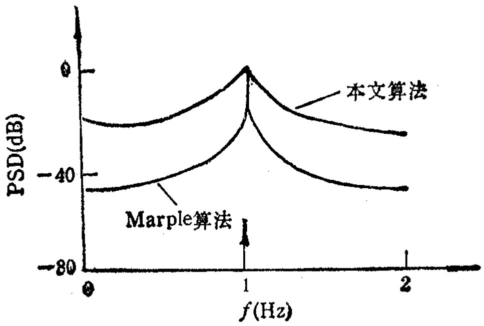

图 2　谱峰漂移现象仿真结果

例 2　谱峰分裂例子　　在(6)式中，取 $a = 1, f = 7.25\text{Hz}, \varphi = 45°, \Delta t = 0.01\text{s}$，白噪声方差 $\sigma_V^2 = 0.01$，采样 101 点．由于 $(N-1)\Delta t = (1/4)(1/f)\cdot 29$，$\text{SNR} \triangleq 20\lg[a/(\sqrt{2}\,\sigma_V^2)] = 17\text{dB}$．所以例 2 中诸参数的选取均满足容易产生谱分裂的条件，即满足(1)信噪比(SNR)高，(2)正弦分量初始相位是 $\pi/4$ 的奇数倍，(3)序列的时间周期 $T = (N-1)\Delta t$ 是正弦信号 1/4 周期的奇数倍；如果再用 25 阶 AR 模型估计例 2 的频谱，则还满足条件(4) AR 模型的阶次与数据量 N 之比较高．在文献[4]的模拟中，Burg 和 FLS 算法不仅产生了严重的谱分裂，而且伴有谱漂移．图 3 给出了本文算法和 Marple 算法估计谱的结果．

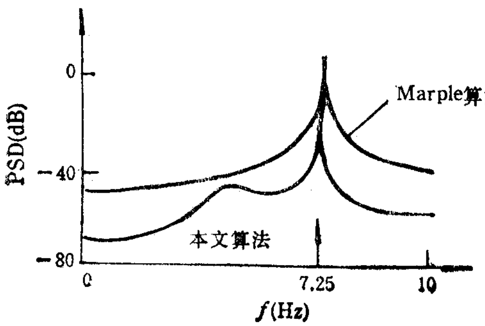

图 3　谱峰分裂现象仿真结果

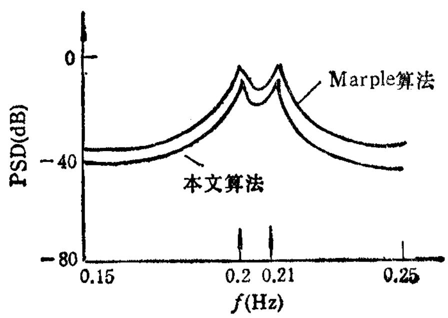

图 4　双正弦频谱估计结果

例 3　谱分辨率例子　　双正弦信号加白噪声过程表示如下：

$$x(n) = a_1\sin(2\pi f_1 n\Delta t) + a_2\sin(2\pi f_2 n\Delta t) + e(n)$$

取 $a_1 = \sqrt{20}$，$a_2 = \sqrt{32}$，$f_1 = 0.2\text{Hz}$，$f_2 = 0.21\text{Hz}$，$\Delta t = 1\text{s}$，$\sigma_e^2 = 1$，采样 150 点，信噪比定义为：$\text{SNR}_i \triangleq 10\lg[a_i/(\sqrt{2}\,\sigma_e^2)]$，$i = 1,2$．那么 $\text{SNR}_1 = 5\text{dB}$，$\text{SNR}_2 = 6\text{dB}$．本例

中,用30阶的 AR 模型来估计功率谱. 图4给出了本文算法和 Marple 算法估计的功率谱. 显然,本文算法有很高的谱分辨率. 文献[4]就本例用了2种算法[5,6]来估计功率谱,仅文献[5]的算法获得了近似于本文方法的结果. 但文献[4]是用的 ARMA(15,15)模型来估计,且采样250点.

参 考 文 献

[1] L. Marple, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-28 (1980) 4, 441—454.
[2] 关肇直等,信号分析与处理,科学出版社,北京,1986年,第275—337页.
[3] 刘德贵等, FORTRAN 算法汇编(第二分册),国防工业出版社,北京,1988年,第471—1473页.
[4] 黄俊钦,随机信号处理,北京航天航空大学出版社,北京,1990年,第68—102页.
[5] 黄俊钦等,一种 ARMA 谱估计公式,自动化学报,12(1986)10,33—40.
[6] J. A. Cadzow, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-26(1978)5,524—528.

IMPROVEMENT OF PERFORMANCE OF AR SPECTRAL ESTIMATION BY THE CONJUGATE GRADIENT METHOD

Zeng Fanxin
(*Chongqing Institute of Communication, Chongqing* 630035)

Abstract A new spectral estimation method based on the least mean square error of the forward linear prediction of AR model is introduced in this paper. The spectral estimation is obtained by the AR parameters estimated by the conjugate gradient method. The simulation results show that for this algorithm there is no bias in the frequency estimation, and the spectral line splitting is very week and the spectral resolution is high. The performance of spectral estimation of the new method is similar to that of the Marple algorithm.

Key words Spectral estimation; Conjugate gradient method; Frequency bias; spectral line splitting