

提取自然频率问题的对偶解法和连续化 Prony 法*

李 敬 汪文秉** 任 朗

(西南交通大学, 成都 610031)

摘要 本文提出了提取雷达目标自然频率的对偶空间解法, 该解法包含了前人提出的 Prony 法、奇异值分解法和 E 脉冲法, 从理论上认识了这 3 种算法的性能和相互间的内在联系。进而从对偶解法导出了一种新的算法——连续化 Prony 法。相对于上述 3 种算法, 该算法对信号中的噪声和模数都不敏感, 是一种更为有效、实用的算法。文中作了数值比较和实验验证。

关键词 提取自然频率; 对偶空间方法; 抗噪声; 模数无关性

一、引 言

自然频率在雷达目标识别和瞬态散射场的描述等方面有极其重要的意义。但对形状复杂的目标, 自然频率难于理论求解, 在实际应用中, 通过实验提取自然频率是不可缺少的步骤。因此寻求抗噪声能力强且对波形中的模数不敏感的算法具有重要的理论意义和实际意义。在非迭代解法中, Blaricum^[1] 首先提出了 Prony 法, 但该方法对响应波形中所含的噪声和存在的模数都非常敏感。后来 Price^[2] 提出了奇异值分解法, 抗噪声能力有所提高。1987 年 Chen 等人提出了 E 脉冲法, 该方法降低了对模数的敏感程度。1988 年冯孔豫^[3] 等人提出用一种相关技术预处理信号后再提取自然频率的方法, 但模数稍多时效果变差。为满足实际需要, 有必要进一步寻求新的方法。

提取目标自然频率, 数学上归结为求解使得如下范数最小的矢量 \mathbf{Z}_i :

$$\left\| \mathbf{F} - \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{Z}_i \right\| \quad (1)$$

式中, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ 是实测的响应波形采样值矢量; m 是响应波形中假定存在的模数; $\mathbf{Z}_i = (\exp(s_i \Delta t), \exp(2s_i \Delta t), \dots, \exp(Ns_i \Delta t))^T$, Δt 是采样间隔, s_i 是目标的第 i 个自然频率; c_i 是 s_i 所对应的留数, s_i 和 c_i 均为未知量。

极小化范数 (1) 式在数学上是一病态问题^[4], 其解对采样值 $\{f_i\}$ 中所含的噪声和模数非常敏感, 现有的 Prony 法、奇异值分解法和 E 脉冲法等都不能满足实际需要。本文

1991.03.27 收到, 1991.07.18 定稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

** 西安交通大学, 西安 710049。

将从矢量空间的优化理论出发,继续寻求新的算法。

二、对偶空间法

所谓对偶空间法,就是将范数(1)式的优化问题转换成与之等价的对偶问题来求解。与极小化范数(1)式等价的对偶问题为^[6]

$$\left. \begin{aligned} \langle F, x^* \rangle &= 0 \\ \langle x^*, Z_i \rangle &= 0 \\ \|x^*\| &= 1, x^* \in X^* \text{ 为对偶空间矢量} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

即使得(1)式极小的矢量 Z_i 就是方程组(2)式的解。由(2)式可见,对偶空间法是在 Z_i 所在的矢量空间 X 和其对偶空间 X^* 之间定义一种线性运算,记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$,再在对偶空间 X^* 中求出一个满足运算 $\langle F, x^* \rangle = 0$ 的矢量 x^* ,最后让 x^* 与矢量 Z_i 满足同样的运算 $\langle x^*, Z_i \rangle = 0$,从而确定出含自然频率的矢量 Z_i 。

由于线性运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的具体形式可以任意定义,矢量 Z_i, x^*, F 也各有连续、离散等不同形式可选择,因此对偶空间法有较大的灵活性和普遍性。已有的 Prony 法,奇异值分解法和 E 脉冲法都可归结为对偶空间法取不同的线性运算形式的结果。

1. 取(2)式中各矢量形式为

$$\begin{aligned} F &= (f_1, f_2, \dots, f_{L+m})^T \\ x^* &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1})^T \\ Z_i &= (z_i, z_i^2, \dots, z_i^{L+m})^T \end{aligned}$$

定义线性运算形式为

$$\begin{aligned} \langle F, x^* \rangle &= \sum_{n=1}^{m+1} f_{i+n} \alpha_n \\ \langle x^*, Z_i \rangle &= \sum_{n=1}^{m+1} \alpha_n z_i^{i+n}, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

则由(2)式可得

$$\sum_{n=1}^{m+1} f_{i+n} \alpha_n = 0 \quad (3a)$$

$$\sum_{n=1}^{m+1} \alpha_n z_i^{i+n} = 0 \quad (3b)$$

$$\sum_{n=1}^{m+1} \alpha_n^2 = 1 \quad (3c)$$

其中(3a)可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{m+1} \\ f_2 & f_3 & \cdots & f_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{m+L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m+1} \end{bmatrix} = 0, \text{ 记为 } A\alpha = 0 \quad (3d)$$

如果令 $\alpha_{m+1} = 1$, 略去(3c), 则由(3d)解出系数矢量 α , 再求多项式(3b)的根得

出自然频率。这就是大家熟悉的 Prony 法的计算程序。

如果用 (3d) 式和约束条件 (3c) 式同时确定 \mathbf{a} , 则可导出 \mathbf{a} 是矩阵 $A^T A$ 的零特征值所对应的特征矢量, 且用奇异值分解法可求出 \mathbf{a} 。这就是奇异值分解法的计算程序。

2. 取 (2) 式中各矢量为

$\mathbf{F} = E^t(t), t \geq t_i + t_e$, 为目标晚期响应波形

$\mathbf{Z}_i = \exp(s_i t)$

$\mathbf{x}^* = e(t), 0 \leq t \leq T_e$, 为对偶空间矢量

定义线性运算为卷积

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{x}^* \rangle = E^t(t) * e(t) = \int_0^{T_e} e(t') \cdot E^t(t - t') dt'$$

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{Z}_i \rangle = e(t) * \exp(s_i t) = \int_0^{T_e} e(t') \cdot \exp[s_i(t - t')] dt'$$

则由 (2) 式可得

$$\int_0^{T_e} e(t') \cdot E^t(t - t') dt' = 0 \quad (4a)$$

$$\int_0^{T_e} e(t') \cdot \exp[s_i(t - t')] dt' = 0 \quad (4b)$$

$$\int_0^{T_e} e^2(t') dt' = 1 \quad (4c)$$

解积分方程 (4a) 式和约束条件 (4c) 式求出 $e(t)$, 再由 (4b) 式求出自然频率 s_i 。这便是 E 脉冲法。

3. 如果取 (2) 式中各矢量为

$\mathbf{F} = f(t)$, 晚期响应波形

$\mathbf{Z}_i = \exp(s_i t)$

$\mathbf{x}^* = g(t)$, 对偶空间矢量

定义线性运算形式为

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{x}^* \rangle = \int f(t - n\Delta) \cdot g(t) dt$$

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{Z}_i \rangle = \int g(t) \cdot \exp[s_i(t - n\Delta)] dt$$

则由 (2) 式可得

$$\int f(t - n\Delta) \cdot g(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5a)$$

$$\int g(t) \cdot \exp[s_i(t - n\Delta)] dt = 0 \quad (5b)$$

$$\|g(t)\|_2 = 1 \quad (5c)$$

式中

$$g(t) = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j h[t - (j-1)\Delta] \quad (5d)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & (j-1)\Delta \leq t \leq j\Delta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$f(t)$ 是采样值序列 $\{f_i\}$ 的线性插值函数。将 (5d) 式代入 (5a) 式, 可得一超定线性方程组:

$$B\mathbf{a} = 0 \quad (5e)$$

其中矩阵 B 的第 i 行 j 列元素为 $B_{ij} = \int_{(i+j-2)\Delta}^{(i+j-1)\Delta} f(t)dt$, 矢量 $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1})^T$. 由 (5e) 式和约束条件 (5c) 式可导出 \mathbf{a} 是矩阵 $B^T B$ 的零特征值所对应的特征矢量, 于是对 $B^T B$ 作奇异值分解求出 \mathbf{a} , 再由 (5b) 式可求出自然频率 s_i . 我们把这个计算程序称为连续化 Prony 法.

式中参数 Δ 的选取原则是使矩阵 $B^T B$ 的行列式值最小. 通过对 Δ 的优选, 可使得连续化 Prony 法对响应波形中的模数不敏感. 至此, 就得出了原来的 3 种算法和 1 种新算法.

三、方法的讨论

提取目标自然频率是一个病态问题, 测量信号中的噪声和计算过程中的运算误差会严重影响求解精度. 因此计算过程中各步骤的优化程度和产生的运算误差, 是衡量算法的两个重要指标.

在 Prony 法的计算过程中, 对超定方程组 (3d) 式作了最小二乘处理后, 人为地令 $\alpha_{m+1} = 1$, 降低了矢量 \mathbf{a} 的自由度; 同时还得去掉 $m+1$ 个方程中的 1 个, 丢失了部份信息量, 使得解出的 \mathbf{a} 不是 (3d) 式的最优解, 因此效果很差. 而奇异值分解法正是避免了 Prony 法的这两个弱点, 结果有很大改善. 但 Prony 法和奇异值分解法都对模数敏感.

E 脉冲法将线性运算的形式由求和改换成卷积, 利用积分对噪声的平滑作用, 抑制了部分噪声干扰, 使其抗噪声能力优于 Prony 法, 而且通过积分宽度 T_s 的优选, 使算法对波形中的模数不敏感, 更具有实用价值. 但在计算过程中, 用矩量法求解积分方程 (4a) 式时, 若用加略金法选择权函数, 则需作大量的数值重积分, 引入很大的运算误差, 对自然频率精度有很大影响; 若选脉冲函数作权函数, 虽然简化运算, 但却不能得出 $e(t)$ 的最优解, 这样不能有效地消除噪声, 同样影响自然频率精度. 可见 E 脉冲法存在固有的弱点.

在连续化 Prony 法的计算程序中, 采用了积分与求和相结合的线性运算形式. 一方面使得积分可解析积出, 这样既能平滑噪声又能减小运算误差. 还能通过积分宽度 Δ 的优化, 使算法对波形中的模数不敏感; 另一方面, 对 l^2 空间的求和算子, 很容易求出其最优解.

因此连续化 Prony 法的各方面性能都优于前 3 种方法.

四、数值结果和实验结果

图 1 给出了导体球前 5 对自然频率构成的理论响应波形^[6]. 为了比较以上 4 种方法的抗噪声能力, 对图 1 所示波形等间隔采样, 再在采样值序列上加标准偏差 $\sigma = 0.003$ 的

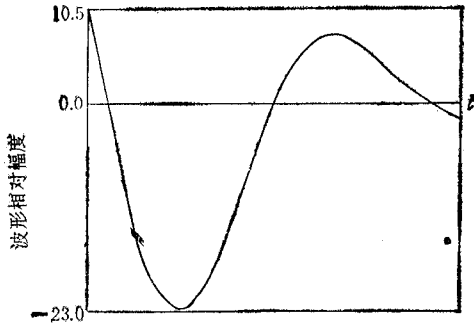


图 1 时域检验波形

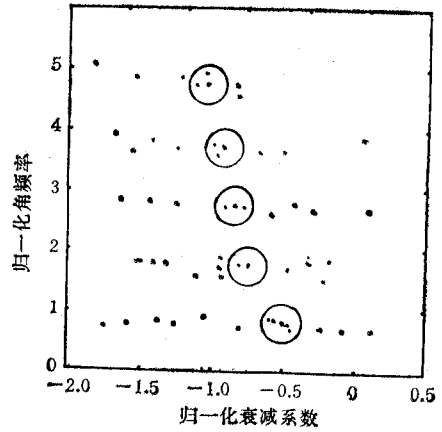


图 2 Prony 法结果

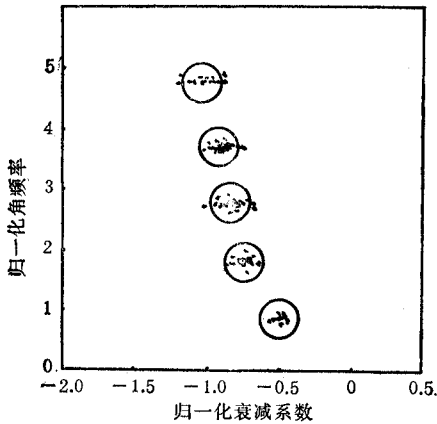


图 3 奇异值分解法的结果

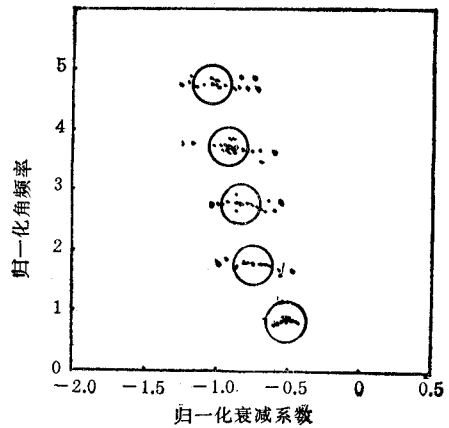


图 4 E 脉冲法结果

高斯白噪声, 然后分别用以上 4 种方法从加了噪声的信号中提取自然频率。图 2 为 Prony 法的结果; 图 3 为奇异值分解法的结果; 图 4 为 E 脉冲法的结果; 图 5 为连续化 Prony 法的结果。正确结果在各小圆的圆心上。从以上 4 图可见, 当 $\sigma = 0.030$ 时, Prony 法结果

表 1

序 号	提取的自然频率 ($\tau_n \times 0.5 \times 10^{-9}$) (归一化值)		
1	$-0.2623 \pm j0.7759$	$-0.4062 \pm j1.910$	$-0.438 \pm j2.980$
2	$-0.2147 \pm j0.7946$	$-0.3407 \pm j1.783$	$-0.396 \pm j2.748$
3	$-0.3123 \pm j0.8650$	$-0.3264 \pm j1.978$	$-0.546 \pm j2.812$
4	$-0.2060 \pm j0.8081$	$-0.2304 \pm j1.886$	$-0.309 \pm j2.749$
5	$-0.2288 \pm j0.9012$	$-0.3383 \pm j1.950$	$-0.5427 \pm j2.752$
6	$-0.2926 \pm j0.7806$	$-0.3461 \pm j1.678$	$-0.3629 \pm j2.873$
均值	$-0.2528 \pm j0.8209$	$-0.3314 \pm j1.864$	$-0.4324 \pm j2.818$
真值	$-0.500 \pm j0.866$	$-0.702 \pm j1.807$	$-0.843 \pm j2.757$

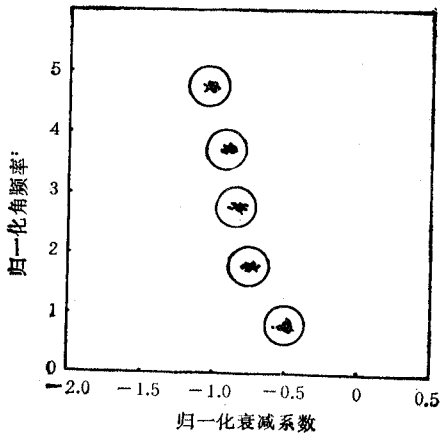


图5 连续化 Prony 法结果

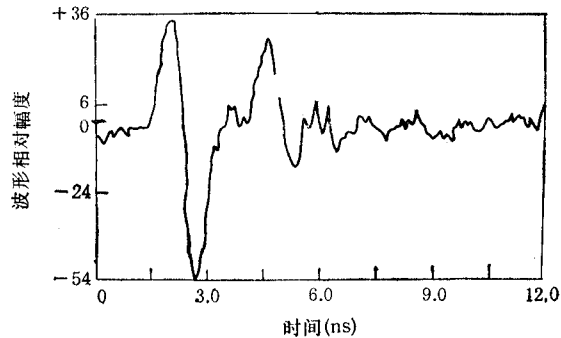


图6 实测导体球晚期响应波形

最差; E 脉冲法结果基本正确, 但不够稳定, 重复运算时收敛性较差; 奇异值分解法较好地收敛到了问题的解; 连续化 Prony 法结果最好。

作为一个实例, 图 6 给出了实测的导体球的 6 组响应波形之一。用连续化 Prony 法提取其中的 3 对自然频率, 结果列于表 1。比较均值与真值可见, 实部有些误差, 但虚部已很靠近真值。由于数据短, 噪声干扰较大, 且波形中的模数多, 其它 3 种算法未得出正确结果。

五、结 论

本文提出的对偶空间解法, 不仅在理论上对以前独立提出的 3 种算法 (Prony 法、奇异值分解法和 E 脉冲法) 有了统一的认识, 而且从抑制噪声干扰和减小运算误差两条思路出发, 选择了积分与求和相结合的线性运算形式, 从而得出了 1 种新的算法——连续化 Prony 法。模拟计算和实验结果证实了该算法更为有效和实用。

本文是作者在西安交通大学完成的。感谢该校八八级硕士薛明华为本文提供了导体球晚期响应的实验数据; 感谢傅君眉教授肖衍明教授的支持和帮助; 感谢张黎阳博士给予的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] M. L. Van Blaricum, et al., *IEEE Trans. on AP*, **AP-23** (1975)6, 777—781.
- [2] H. J. Pricc, An Improved Prony Algorithm for Exponential Analysis, in *Proc. IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, San Diego, CA, (1979), pp. 310—313.
- [3] E. J. Rothwell, K. M. Chen, *IEEE Trans. on AP*, **AP-35** (1987) 6, 715—720.
- [4] 贾有忠, 冯孔豫, *电子科学学刊*, **10**(1988) 6, 536—540.
- [4] Li Jing et al., On the Unstability of Prony Method, *Proc., Second Int. Symp. Antennas and EM Theory*, Shanghai, China, (1989), pp. 72—74.
- [6] 李敬, 极点提取问题的研究, 西安交通大学博士论文, 西安, 1990 年.

EXTRACTION OF THE NATURAL FREQUENCIES OF A RADAR TARGET BY DUAL SPACE THEORY

Li Jing Wang Wenbing* Ren Lang

(Southwestern Jiansong University, Chengdu 610031)

Abstract The dual space theory is introduced for extracting the natural frequencies of a radar target from a measured response. The theory not only contains Prony method, SVD method and E pulse method, but also gives a new scheme—the Combination Operation (CO) method, which is shown to be more insensitive to random noise and to estimation of modal contents. Verification of the CO method is accomplished by comparing the numerical results with those of the other three methods. The applicability of CO method to a conducting sphere is also demonstrated.

Key words Extraction of natural frequencies; Dual space method; Insensitive to random noise; Insensitive to estimation of modal contents

* (Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)