

## 单观测器无源定位误差下界的仿真分析<sup>1</sup>

邓新蒲 周一宇

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

**摘 要** 单观测器无源定位所能达到的最优定位精度与观测器的运动速度、运动轨迹、测量精度和测量速率密切相关。该文采用仿真方法,分析了观测器运动轨迹、运动速度、测量精度和测量速率等因素对测角无源定位误差 Cramer-Rao 下界的影响,比较了三种形式观测器轨迹的定位误差下界,得出的结果对确定具体定位与跟踪系统战术指标、以及对滤波算法的选用具有实用价值。

**关键词** 无源定位, 定位误差分析, CRLB(Cramer-Rao Lower Bound)

**中图分类号** TN97

### 1 前 言

无源定位的研究于本世纪 60 年代就开始了,并已在各方面取得了令人瞩目的成就。然而,随着无源定位与跟踪的应用变得越来越广泛,需要研究的问题也越来越具体和深入。在各种无源定位与跟踪应用中,不依赖于具体滤波算法的定位精度是多少?观测器的运动轨迹、运动速度、测量速率和测量噪声对定位精度的影响如何等等?这些问题对于系统的具体指标设计、组成装备的战术运用具有重要意义。角度测量仍然是用于无源定位与跟踪的最基本测量。本文就从测角无源定位出发,采用数值仿真的方法来分析无源定位的误差下界,找出影响定位误差的主要因素,从而得到提高无源定位精度的有效途径。

本文的具体内容如下:第 2 节介绍定位误差下界的计算方法,3,4 节分别是观测器直线运动和恒方位角运动情况下定位误差下界的仿真分析,第 5 节讨论观测器运动轨迹形式对定位误差下界的影响,最后是本文的结论。

### 2 定位误差下界的计算方法

单站无源定位系统对目标的定位与跟踪一般需要通过多次测量来实现。 $k$  时刻目标的状态是由  $k$  时刻前的全部测量量估计的,而状态估计的误差是有下界的。对于采用极大似然准则或最小二乘准则的最优估计器,无偏估计量的误差下界就是 CRLB(Cramer-Rao Lower Bound)<sup>[1]</sup>。

不考虑系统噪声,定位系统的状态方程为

$$\mathbf{x}_j = \Phi_{j,i} \mathbf{X}_i, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (1)$$

其中状态  $\mathbf{X}_j \in R^n$ , 状态转移矩阵  $\Phi_{j,i}$  为  $n \times n$  矩阵。

设到第  $k$  个时刻,获得的测量集为  $Z^k = \{z_j | j = 0, 1, \dots, k\}$ 。测量方程写为一般形式

$$z_j = h_j(\mathbf{X}_j) + n_j, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (2)$$

$z_j$  是测量量,  $\mathbf{X}_j$  是状态变量,  $n_j$  是测量噪声,  $h_j(\mathbf{X}_j) \in R^n \rightarrow R^m$  是非线性函数矢量,  $n$  为状态矢量的维数,  $m$  为测量量的维数。

<sup>1</sup> 1999-12-28 收到, 2000-04-31 定稿

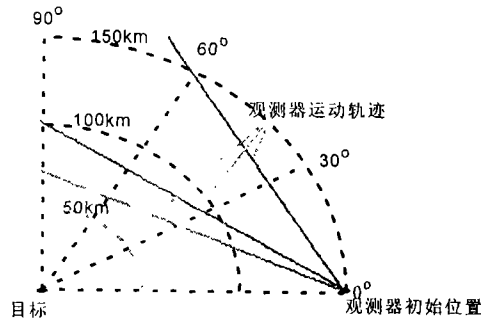


图 1 目标惯性坐标系中的匀速观测器轨迹

设测量噪声  $n_j$  是零均值高斯分布的白噪声, 其协方差阵为  $R_j$ , 则有 [2]

$$\text{CRLB}(k) = \left\{ \sum_{j=0}^k [H_j(\mathbf{X}_j)\Phi_{j,k}]^T R_j^{-1} [H_j(\mathbf{X}_j)\Phi_{j,k}] \right\}^{-1} \quad (3)$$

其中  $H_j(\mathbf{X}_j) = \partial h_j(\mathbf{X}_j)/\partial \mathbf{X}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ 。根据文献 [2] 有

$$\text{CRLB}(k) = \mathbf{P}_{k/k} \quad (4)$$

$\mathbf{P}_{k/k}$  是由推广 Kalman 滤波算法递推计算的状态估计量的协方差矩阵, 计算公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_{j/j}^{-1} &= \mathbf{P}_{j/j-1}^{-1} + \mathbf{H}_j^T(\mathbf{X}_j) \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{H}_j(\mathbf{X}_j) \\ \mathbf{P}_{j/j-1}^{-1} &= \Phi_{j,j-1}^{-T} \mathbf{P}_{j-1/j-1}^{-1} \Phi_{j,j-1}^{-1} \\ \mathbf{P}_{0/0}^{-1} &= \begin{cases} 0, & \text{无先验信息} \\ \mathbf{P}_0^{-1}, & \text{有先验信息} \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (5)$$

为了分析的直观和方便, 在这里采用矩阵  $\mathbf{P}_{k/k}$  的迹来表示定位误差的下界, 定义

$$\delta r(k) = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{P}_{k/k})} \quad (6)$$

取目标的位置坐标作为状态变量, 即  $\mathbf{X}_j = (x_j, y_j, z_j)^T$ , 则有

$$\delta r(k) = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{P}_{k/k})} = \sqrt{\sigma_x^2(k) + \sigma_y^2(k) + \sigma_z^2(k)} \quad (7)$$

### 3 匀速直线运动观测器的定位误差下界

以目标为坐标原点、以平行于观测器运动平面为  $XY$  平面、以观测器初始位置在  $XY$  平面的投影与目标连线为  $X$  轴、建立目标惯性坐标系。匀速直线的观测器运动轨迹在  $XY$  平面的投影如图 1 所示。

设在定位起始时, 目标距观测器 150 km, 由先验知识确定目标坐标的初始误差为 50 km, 50 km, 5 km, 即 (5) 式中  $\mathbf{P}_0 = \text{diag}\{(5 \times 10^4)^2 (5 \times 10^4)^2 (5 \times 10^3)^2\} \text{m}^2$ 。各参数的典型值见表 1。

表1 单观测器测角无源定位仿真典型参数表

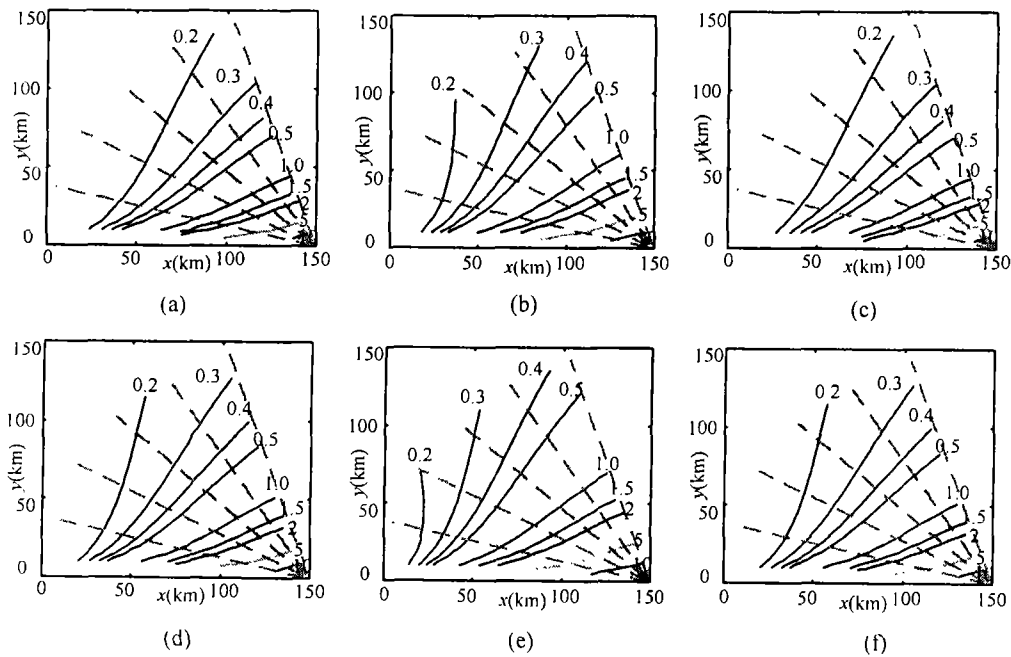
参数 (单位)	观测器速度 (m/s)	观测器高度 (m)	测量周期 $T_m$ (s)	观测器位置精度 (m)	测角精度 (°)
典型值	300	5000	0.2	$5.0 \times T_m$	1.0

图2是观测器匀速直线运动情况下测角无源定位 $\delta r(k)$ 的等值线图,根据(5)式和(6)式计算,单位是千米。图2(a)的参数如上表的典型值,图2(b)~图2(f)的个别参数与表中的典型值不一致,其值如图中的标记。

对比图2(a)~2(f)可以看出,对定位误差下界影响较大的是测角精度、采样时间(测量速率)和观测器速度这三个参数,而观测器高度与位置精度的作用相对很小。

图2中虚直线为观测器运动轨迹,定义此轨迹与 $X$ 轴所夹的锐角为初始方位角。从图中可以看出,在定位初始阶段,大初始方位角观测器轨迹上的 $\delta r(k)$ 下降明显较快。

由此可以得到以下结论:要提高无源定位的精度,应从四个方面入手,一是观测器以接近 $90^\circ$ 的初始方位角运动,二是提高传感器的测量精度,三是提高数据的测量速率,四是若要在具体的位置上获得较高的定位精度,则应采用低的观测器速度,若是要在较短的时间内获得较高的定位精度,则应采用高的观测器速度。

图2 目标惯性坐标系中表示的测角无源定位 $\delta r(k)$ 的等值线(匀速观测器航迹)

(a) 典型参数, (b) 测量周期:  $T_m = 0.5s$ , (c) 观测器高度: 10000m

(d) 观测器速度: 500m/s, (e) 测角精度: 2.0度, (f) 观测器位置精度:  $10 \times T_m(m)$

#### 4 恒方位角运动观测器的定位误差下界

由图2,对于匀速直线运动的观测器,在定位的初始阶段,大初始方位角轨迹上的定位误差收敛明显较快,但在观测器运行数十千米后,大初始方位角轨迹上 $\delta r(k)$ 的下降速度变得比小初始方位角轨迹上的慢,这是由于观测器逐步远离目标所致<sup>[3,4]</sup>。

恒方位角运动的观测器在运动过程中, 运动方向与观测器至目标连线的夹角恒定不变。在目标惯性坐标系中, 观测器轨迹就是等角螺旋线, 如图 3 所示。以恒方位角运动的观测器在整个运动过程能获得接近最佳的定位误差收敛速度<sup>[3]</sup>。

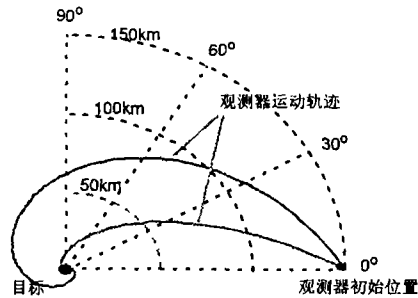


图 3 目标惯性坐标系中的恒方位角观测器轨迹

图 4 是目标惯性坐标系中表示的  $\delta r(k)$  等值线图, 图中的虚线是观测器运动轨迹。在这里得出的结论与上一节完全相同, 即: 对定位误差下界影响较大的是测角精度、采样时间 (测量速率) 和观测器速度这三个参数, 而观测器高度与位置精度的作用相对很小; 大方位角轨迹上的  $\delta r(k)$  下降较快。另外, 对比图 2 与图 4 可以看出, 若观测器到达同一位置, 恒方位角运动观测器的  $\delta r(k)$  比直线运动观测器的  $\delta r(k)$  要小。

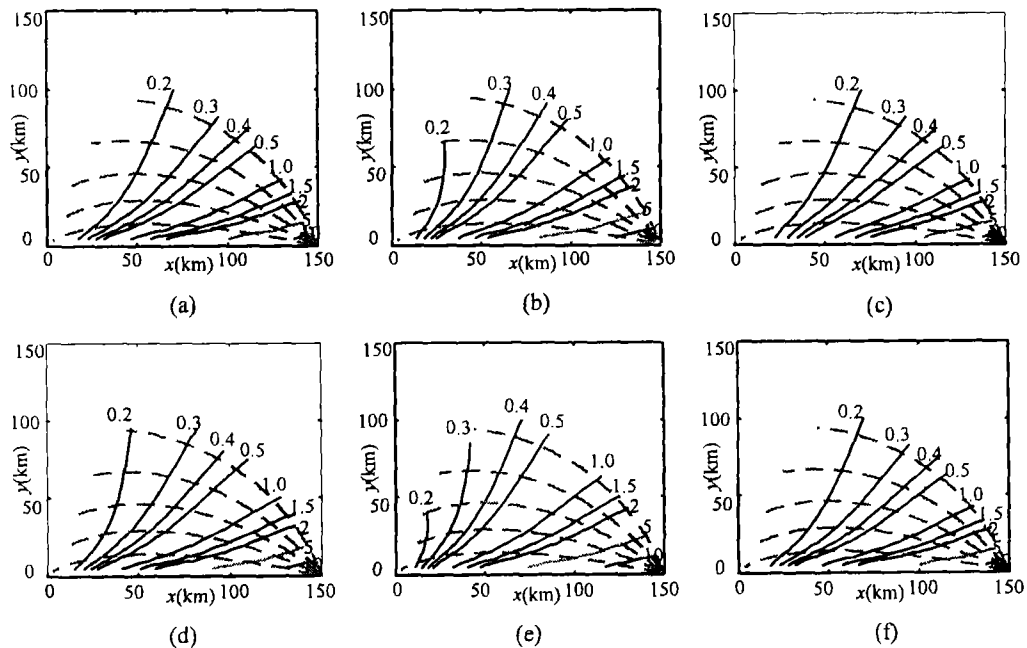


图 4 目标惯性坐标系中表示的测角无源定位的  $\delta r(k)$  等值线 (恒方位角观测器航迹)

(a) 典型参数, (b) 测量周期:  $T_m = 0.5s$ , (c) 观测器高度:  $10000m$

(d) 观测器速度:  $500m/s$ , (e) 测角精度:  $2.0^\circ$ , (f) 观测器位置精度:  $10 \times T_m (m)$

## 5 三种观测器运动轨迹的定位误差下界

以恒方位角轨迹运动的观测器在整个运动过程中能获得接近最佳的定位误差收敛速度<sup>[3]</sup>,但它不是最优的观测器轨迹<sup>[3-4]</sup>.这里采用(8)式的优化指标定义一种“最优”观测器轨迹<sup>[5]</sup>.将观测器的运动限制在平面上,得到“最优”观测器轨迹如图5所示.图中机动指标  $\text{index} = (\text{观测器速度} \times \text{测量周期}) / (\text{初始目标距离} \times \text{测角精度})$ ,图5所示目标是运动的.

$$\min \delta r(k) = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{P}_{k/k})} \quad (8)$$

第3,4节的仿真分析得出了同样的结论,即对于两种形式的观测器轨迹,接近90度(初始)方位角的轨迹具有最好的定位误差下界.下面通过仿真比较以下3种观测器运动轨迹的定位误差下界:85度初始方位角的匀速直线轨迹、85度方位角的恒方位角轨迹和上面定义的“最优”观测器轨迹.

图6是在三种轨迹下 $\delta r$ 与观测器运动距离的关系.仿真采用表1的参数,目标初始距离为150km.从图中可以看出,在定位的初始阶段三种轨迹下的 $\delta r$ 几乎是重合的,而在观测器运行约50km后,直线轨迹对应的 $\delta r$ 仅稍大.故对于以匀速直线和恒方位角方式运动的观测器,采用接近90度(初始)方位角轨迹具有接近“最优”轨迹的定位精度.

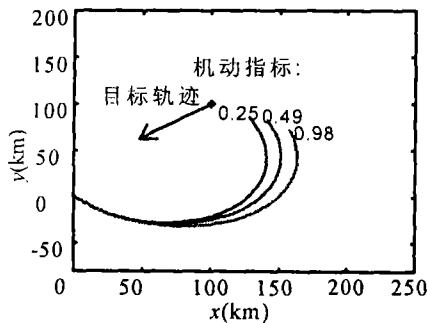


图5 由(8)式定义的“最优”观测器轨迹

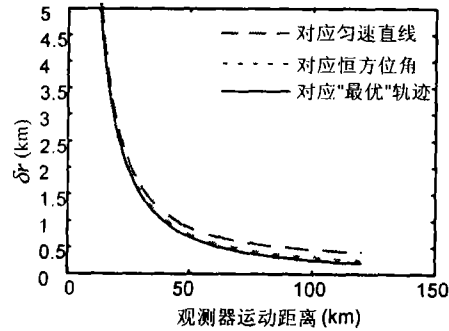


图6 三种观测器轨迹下的 $\delta r$

## 6 结论

本文采用仿真方法,比较分析了观测器直线运动、恒方位角运动和以“最优”轨迹运动情况下,测角无源定位误差的CRLB.从仿真分析可以看出,无源定位的误差下界与观测器的运动轨迹密切相关,以匀速直线和恒方位角方式运动的观测器,采用接近90度(初始)方位角轨迹都可获得接近“最优”轨迹的定位精度;传感器的测量精度、数据速率及观测器的运动速度是影响定位误差下界的主要因素,提高定位精度要提高测量精度和数据测量速率;较低观测器速度使得在同一位置上获得的定位精度较高,而较高观测器速度使得在同一时间上获得较高的定位精度.

本文的分析方法可直接推广用于更一般的无源定位与跟踪应用的误差下界分析.本文的仿真结果对于确定具体定位与跟踪系统战术指标、以及滤波算法的选用具有实用价值.

## 参 考 文 献

- [1] H. L. Van Trees, Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I, New York, Wiley, 1968, 66-72.
- [2] J. H. Taylor, The Cramer-Rao estimation lower bound computation for deterministic nonlinear systems, IEEE Trans. on Automatic Control, 1979, AC-24(2), 342-344.
- [3] S. E. Hammel, P. T. Liu, Optimal observer motion for localization with bearings measurements, Computers Math. Appl., 1989, 18(1-3), 171-180.
- [4] J. M. Passerieux, D. Van Cappel, Optimal observer maneuver for bearings-only tracking, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1998, AES-34(3), 777-788.
- [5] 邓新蒲, 周一宇, 无源定位的观测平台自适应运动分析, 电子学报, 2001, 29(3), 311-314.

SIMULATING ANALYSIS ON ESTIMATION ERROR LOWER  
BOUND FOR SINGLE PASSIVE OBSERVER

Deng Xinpu     Zhou Yiyu

*(National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)*

**Abstract** At certain measurement rate and error, the best estimation accuracy which may be achieved by single passive observer is decided by the velocity and trajectory of the observer, independent of the estimation algorithm. In this paper, simulation experiments show the effects of measurement rate, error and observer velocity, trajectory on the error Cramer-Rao lower bounds of position estimate under two kinds of observer trajectories. Then the best Cramer-Rao lower bounds of three kinds of observer trajectories are compared. The experimental results are very useful for design of passive target tracking system.

**Key words** Passive location, Estimation error analysis, CRLB

邓新蒲: 男, 1966年生, 博士生, 研究方向为无源定位理论与技术、雷达数据处理、雷达信号处理等。

周一宇: 男, 1948年生, 博士、教授, 博士生导师, 电子学会电子对抗分会委员, 航空学会电子分会雷达与制导专业委员会委员, 出版专著两部, 发表论文五十余篇, 重点研究方向为: 综合电子战系统理论、无源定位理论与技术、雷达数据处理、电子信息系统仿真等。