

全通多相网络滤波器组的理论和设计*

王文博 王德隽

(北京邮电学院电信工程系, 北京 100088)

摘要 本文进一步研究了应用全通滤波器实现均匀 N 带滤波器组的设计理论。我们提出了一种两级全通型滤波器组的结构, 第一级为周期性镜像半带滤波器, 第二级为两个 $N/2$ 带的带通滤波器组。第一级的阻带恰好可以抑制第二级的不可控带, 实现了全通型多相滤波器的连续阻带特性。并且给出了综合滤波器组的实现方案, 可以使整个分析/综合系统完全消除混叠和幅度失真。最后本文给出了一个实例。

关键词 全通滤波器; 滤波器组; 正交镜像滤波器

一、引言

所谓滤波器组就是将信号按频带分解成一组信号以及将分解成的子带信号重新合成为原信号的处理装置。这种信号处理的方法在许多领域都得到应用^[1]。在一般应用中, 将一个信号分解为几个不同频带信号的过程, 称为分析过程; 相反情况, 即将不同频带的信号合成为一个信号的过程称为综合过程; 如图 1 所示。在通常分带处理中, 每个频带的信号被最大抽取以便降低抽样率减少运算的复杂性。

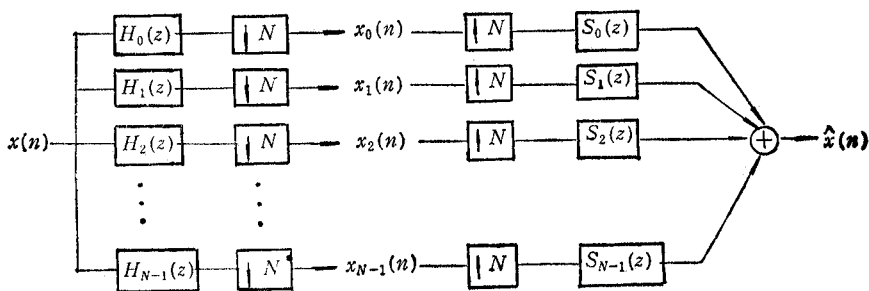


图 1 最大抽取 N 带滤波器组

在实现的过程中, 由于抽取和插入的处理, 使得分析/综合系统存在着三种失真: 混叠、幅度和相位失真。在最近几年中, Vetterli^[2], Vaidyanathan^[3] 等人对滤波器组的特性进行了研究。用 FIR 滤波器实现了无失真的滤波器组的设计^[4-7]。对于均匀滤波器组, 可以用 DFT 加多相网络的结构实现。这种结构也称为并行镜像滤波器组^[7]。

1991.07.23 收到, 1991.11.15 定稿。

* 国家自然科学基金资助项目, 国家教委博士基金资助项目。

在数字信号处理中，数字全通滤波器得到广泛的应用^[8]。在图 2 中给出了全通型多相网络的结构。其中 $G_i(z^N)$ 是全通函数。

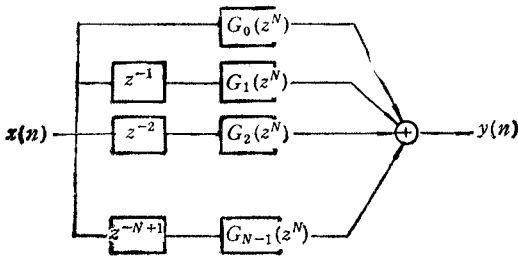


图 2 多相网络的结构

对于全通多相滤波器，当分支数 $N > 2$ 时，阻带在接近 $3\pi/N, 5\pi/N, 7\pi/N$ 等处是不连续的^[9]。这些区域通常称为不受控带。

本文研究了最大抽取均匀滤波器组全通滤波器的实现问题。提出了两级级联的分析和综合滤波器组的结构。这种结构可以完全消除不受控带的影响。在分析滤波器组中，前级滤波器为周期性的半带滤波器，可以用全通镜像滤波器实现；后级滤波器为不同的带通滤波器，带通滤波器组可以用多相网络加调制矩阵的结构实现。

在本文中，矩阵和矢量分别用黑体的大小字母表示。广义 DFT 矩阵中的元素表示为

$$W_N(k_0, n_0) = \{ \exp[-j(2\pi/N)(k + k_0)(n + n_0)] \}$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1; n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1)$$

二、两分支信号的分析 and 综合

图 3(a) 中给出了 N 通道排列的信号 $x(n)$ 。它可以用两分支信号来表示，如图 3(b), 3(c) 所示。图 3 中， $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别为正常分支和镜像分支。 $E_1(z)$ 和 $E_2(z)$ 是它们的转移函数。 $E_1(z)$ 的通带中心位于 $W_k = 4\pi k/N$ 处， $E_2(z)$ 的通带中心频率位于 $W_k = 2\pi(2k + 1)/N$ 处。通道滤波器的 $E_1(z)$ 与 $E_2(z)$ 的关系为

$$E_2(z) = E_1[z \exp(j2\pi/N)] \quad (2)$$

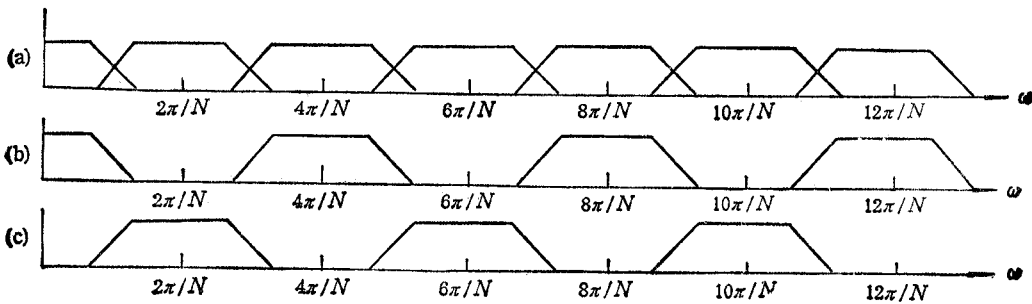


图 3 均匀滤波器组通道的排列和两分支分解

(图中 (a) 的纵坐标为 $x(e^{j\omega})$, (b) 的为 $x_1(e^{j\omega})$, (c) 的为 $x_2(e^{j\omega})$)

信号的两分支分解和合成可以用全通滤波器组成的镜像滤波器来实现^[8]，如图 4 所示。图 4 中 $A_1(z^N)$ 和 $A_2(z^N)$ 都是全通滤波器， $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别为正常分支和镜像分支信号。我们可以得到分解过程的转移函数

$$E_1(z) = A_1(z^N) + z^{-N/2} A_2(z^N) \quad (3)$$

$$E_2(z) = A_1(z^N) - z^{-N/2}A_2(z^N) \quad (4)$$

恢复的信号可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = X(z)[E_1^2(z) - E_2^2(z)] + X(-z)[E_1(z)E_1(-z) \\ - E_2(z)E_2(-z)] = 4X(z)z^{-N/2}A_1(z^N)A_2(z^N) \end{aligned} \quad (5)$$

从(5)式可以看出,恢复出的信号 $\hat{x}(n)$ 完全消除了混叠失真,并且使得整个分析/综合系统成为线性时不变系统,转移函数为一全通函数,即幅度特性能够全部恢复。

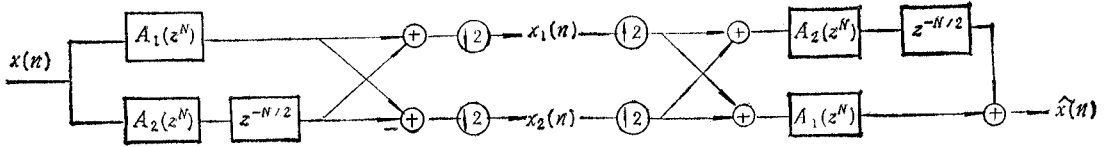


图4 信号两分支分解/合成的全通滤波器实现

三、两极分析滤波器的实现

在图3的正常分支中,频率点 $6\pi/N$, $10\pi/N$, $14\pi/N$ 等是阻带的中心。而全通型多相网络滤波器的不受控带恰巧处于这些位置。因此,我们可以将它们级联起来实现一个阻带连续的原型低通滤波器。

原型低通滤波器的转移函数可以表示为

$$H(z) = E_1(z)G(z) = [A_1(z^N) + z^{-N/2}A_2(z^N)] \sum_{n=0}^{N/2-1} z^{-n}G_n(z^{N/2}) \quad (6)$$

(6)式中通带是正常分支的第一个通道,其宽度为 $2\pi/N$ 。第二级多相网络的通带宽度为 $4\pi/N$ 。原型低通滤波器的通带特性主要由第一级两分支分解滤波器决定。两级滤波器的设计实现过程,如图5所示。

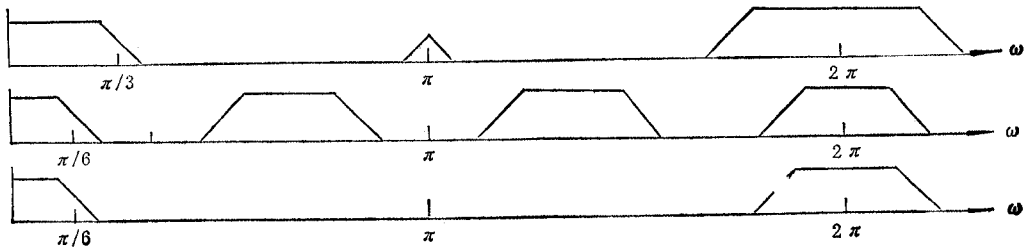


图5 6带原型低通滤波器的实现

(图中纵坐标: 上为 $|G(z)|$, 中为 $|E_1(z)|$, 下为 $|H(z)|$)

均匀滤波器组可以用原型低通滤波器的调制的方法来实现。原型低通滤波器的通带中心为 $\omega = 0$, 对应的偶型堆积排列^[1]的均匀通道滤波器组可以表示为

$$\begin{aligned} H_k(z) = H(zW_N^k) \\ = \sum_{n=0}^{N/2-1} z^{-n}W_N^{-nk}G_n[z^{N/2}(-1)^k] \cdot [A_1(z^N) + (-1)^k z^{-N/2}A_2(z^N)] \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $W_N = \exp(-j2\pi/N)$, 当 k 为偶数时, (7) 式可以表示为

$$H_k(z) = H_{2m}(z) = [A_1(z^N) + z^{-N/2}A_2(z^N)] \sum_{n=0}^{N/2-1} z^{-n}G_n(z^{N/2})W_{N/2}^{-nm} \quad (8)$$

当 k 为奇数时, (7) 式可以表示为

$$H_k(z) = H_{2m+1}(z) = [A_1(z^N) - z^{-N/2}A_2(z^N)] \sum_{n=0}^{N/2-1} z^{-n}G_n(-z^{N/2})W_{N/2}^{-n(m+1/2)} \quad (9)$$

(8) 和 (9) 式可以用矩阵表示。首先, 我们定义 4 矢量如下:

$$\mathbf{g}(z) = [G_0(z^{N/2})z^{-1}G_1(z^{N/2}), z^{-2}G_2(z^{N/2}), \dots, z^{-N/2+1}G_{N/2-1}(z^{N/2})]^T \quad (10a)$$

$$\mathbf{g}(-z) = [G_0(-z^{N/2}), z^{-1}G_1(-z^{N/2}), z^{-2}G_2(-z^{N/2}), \dots, z^{-N/2+1}G_{N/2-1}(-z^{N/2})]^T \quad (10b)$$

$$\mathbf{h}_e(z) = [H_0(z), H_2(z), H_4(z), \dots, H_{N-2}(z)]^T \quad (10c)$$

$$\mathbf{h}_o(z) = [H_1(z), H_3(z), H_5(z), \dots, H_{N-1}(z)]^T \quad (10d)$$

这样, 我们得到 (8) 和 (9) 式的矩阵表示式为

$$\mathbf{h}_e(z) = [A_1(z^N) + z^{-N/2}A_2(z^N)]W_{N/2}^{-1}(0, 0)\mathbf{g}(z) \quad (11)$$

$$\mathbf{h}_o(z) = [A_1(z^N) - z^{-N/2}A_2(z^N)]W_{N/2}^{-1}(0, 1/2)\mathbf{g}(-z) \quad (12)$$

这里 $W_{N/2}^{-1}(0, 0)$ 和 $W_{N/2}^{-1}(0, 1/2)$ 是引言中 (1) 式定义的广义 DFT 矩阵。

这样, 我们得到了用全通滤波器实现的两级分析滤波器组的结构, 如图 6 所示。

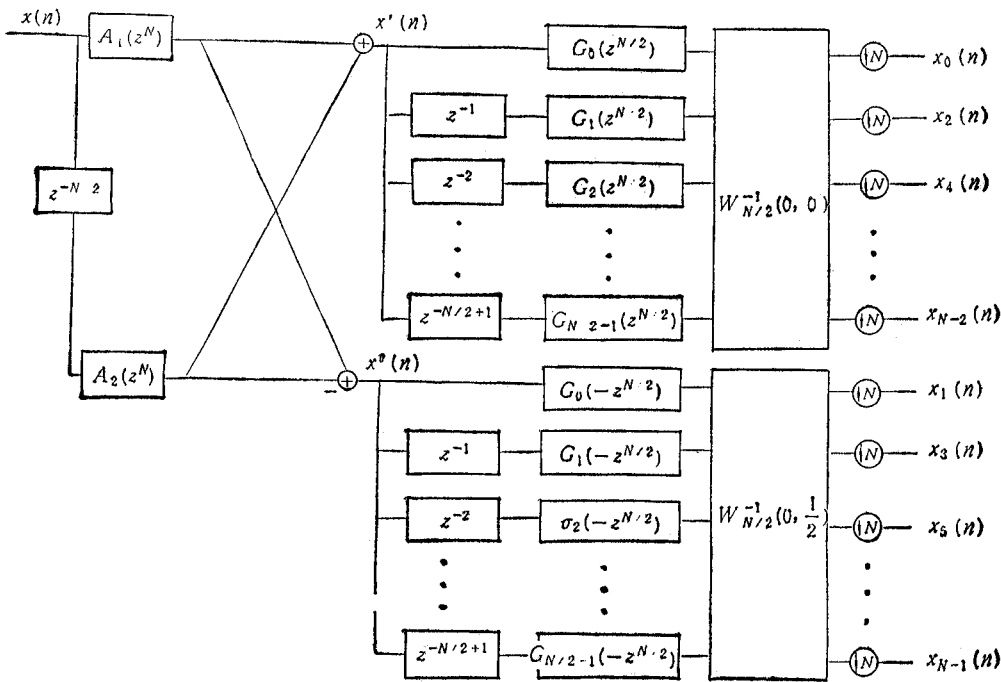


图 6 分析滤波器组的结构

我们将第一级的输出表示为 $x'(n)$ 和 $x''(n)$ 。信号 $x'(n)$ 和 $x''(n)$ 的频谱分别示于图 3(b) 和 3(c)。抽取后的子带信号表示为 $x_0(n), x_1(n), x_2(n), x_3(n), \dots, x_{N-1}(n)$ 。

四、子带信号的综合

本节将讨论如何把 N 个通道的信号合成为一个不带混叠失真和幅度失真信号的问题。

综合滤波器用分析滤波器的转置两级结构实现, 如图 7 所示。为了实现比较好的恢复特性, 两分支信号的综合滤波器需要加相位补偿, 因此, 在图 7 中, 加入了两个全通相位补偿函数 $M_1(z)$ 和 $M_2(z)$ 。综合滤波器的传输函数可以表示如下:

$$s_e(z) = [A_1(z^N) + z^{-N/2}A_2(z^N)]W_{N/2}(0,0)f(z)M_1(z) \quad (13a)$$

$$s_o(z) = [A_1(z^N) - z^{-N/2}A_2(z^N)]W_{N/2}(0,1/2)f(-z)M_2(z) \quad (13b)$$

其中
$$s_e(z) = [s_0(z)s_2(z)s_4(z)\cdots s_{N-2}(z)]^T \quad (14a)$$

$$s_o(z) = [s_1(z)s_3(z)s_5(z)\cdots s_{N-1}(z)]^T \quad (14b)$$

$$f(z) = [z^{-N/2+1}F_0(z^{N/2})z^{-N/2+2}F_1(z^{N/2})\cdots F_{N/2-1}(z^{N/2})]^T \quad (14c)$$

$$f(-z) = [z^{-N/2+1}F_0(-z^{N/2})z^{-N/2+2}F_1(-z^{N/2})\cdots F_{N/2-1}(-z^{N/2})]^T \quad (14d)$$

包括分析和综合滤波器组整个系统的传输函数用矩阵表示^[7]:

$$c(z) = H(z)s(z) \quad (15a)$$

这里

$$H(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & H_2(z) & \cdots & H_{N-1}(z) \\ H_1(z) & H_2(z) & H_3(z) & \cdots & H_0(z) \\ H_2(z) & H_3(z) & H_4(z) & \cdots & H_1(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1}(z) & H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{N-2}(z) \end{bmatrix} \quad (15b)$$

$$s(z) = [s_0(z)s_1(z)s_2(z)\cdots s_{N-1}(z)]^T \quad (15c)$$

$$c(z) = [c_0(z)c_1(z)c_2(z)\cdots c_{N-1}(z)]^T \quad (15d)$$

在(15c)式中, $c_0(z)$ 是原信号的移不变传输函数, $c_i(z)$ (i 不为零)是原信号频谱的混叠项。为了得到无混叠和幅度失真的信号, 必须使 $c_0(z)$ 为一个全通函数, 并且使 $c_i(z)$ (i 不为零)为零。

$$\begin{aligned} c_0(z) &= \sum_{i=0}^{N-1} H_i(z)s_i(z) \\ &= \sum_{i=0}^{N/2-1} H_{2i}(z)s_{2i}(z) + \sum_{i=0}^{N/2-1} H_{2(i+1)}(z)s_{2(i+1)}(z) \\ &= [A_1(z^N) + z^{-N/2}A_2(z^N)]^2 g^T(z)f(z)M_1(z) + [A_1(z^N) \\ &\quad - z^{-N/2}A_2(z^N)]^2 g^T(-z)f(-z)M_2(z) \end{aligned} \quad (16)$$

为了得到一个全通的转移函数, 我们定义(14)式中的 $F(z)$, $F(-z)$, $M_1(z)$ 和 $M_2(z)$ 为

$$F_i(z^{N/2}) = \prod_{l=0, l \neq i}^{N/2-1} G_l(z^{N/2}), \quad F_i(-z^{N/2}) = \prod_{l=0, l \neq i}^{N/2-1} G_l(-z^{N/2}) \quad (17a)$$

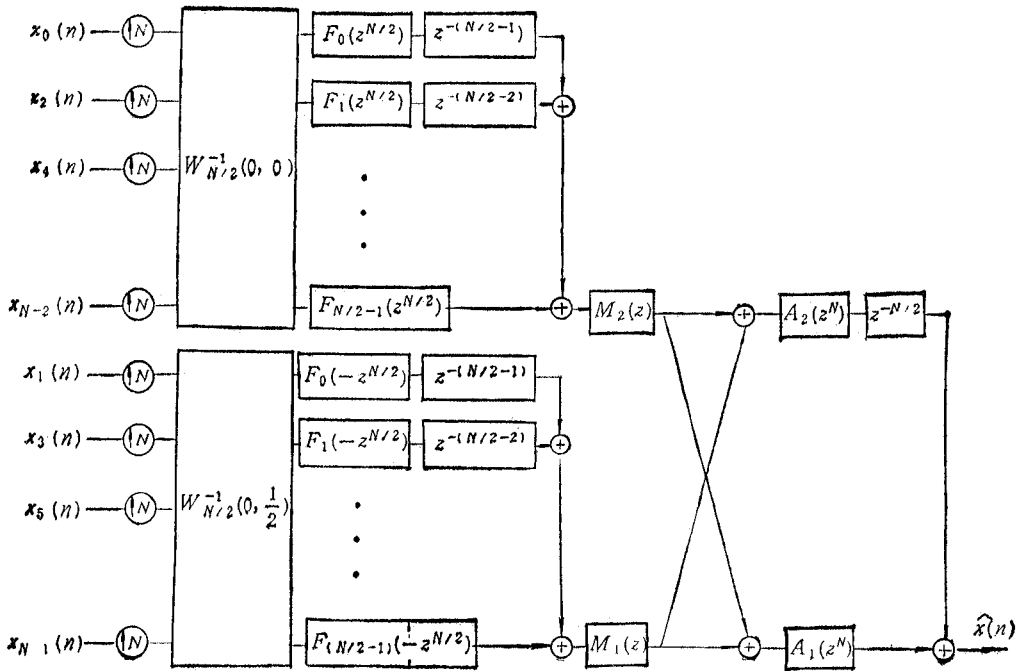


图 7 综合滤波器的结构

$$M_1(z) = \prod_{l=0}^{N/2-1} G_l(-z^{N/2}), \quad M_2(z) = \prod_{l=0}^{N/2-1} G_l(z^{N/2}) \quad (17b)$$

$$\text{则} \quad c_0(z) = z^{-N} A_1(z^N) A_2(z^N) \prod_{l=0}^{N/2-1} [G_l(z^{N/2}) G_l(-z^{N/2})^2] \quad (18)$$

并且可以证明: $c_i(z) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$.

这样,整个分析/综合系统的转移函数为一个全通函数,并且经过这个系统处理的信号没有混叠和幅度失真。

五、举 例

在设计一个 M 带滤波器组的过程中,首先设计全通镜像滤波器和全通 $M/2$ 带的全通多相滤波器,然后根据本文给出的结构可以得到一个由全通滤波器构成的分析/综合滤波器组。在用全通滤波器实现的多相滤波器的设计中,我们使用了 Remez 型优化算法。并使多相滤波器在通带内具有近似的线性相位。原型低通滤波器的详细设计过程请参考文献[10]。

举例 在这个例子中,我们实现了一个具有均匀通道带宽的偶型排列的 6 带滤波器组。每个分支全通滤波器的节数为 4。各级滤波器的系数如表 1 所示。这个滤波器组的频率特性如图 8 所示。

表 1 各级滤波器的系数

	分支 0	分支 1	分支 2
第一级	(0., 0.)	(-0.7268, 0.0000)	
	(0., 0.)	(-0.0054, 0.2809)	
	(0., 0.)	(-0.0054, -0.2809)	
	(1., 0.)	(0.2546, 0.0000)	
第二级	(0., 0.)	(-0.6318, 0.0000)	(-0.82852, 0.00)
	(0., 0.)	(0.0084, 0.3175)	(-0.02240, 0.25)
	(0., 0.)	(0.0084, -0.3175)	(0.02240, -0.25)
	(1., 0.)	(0.2943, 0.0000)	(0.22103, 0.00)

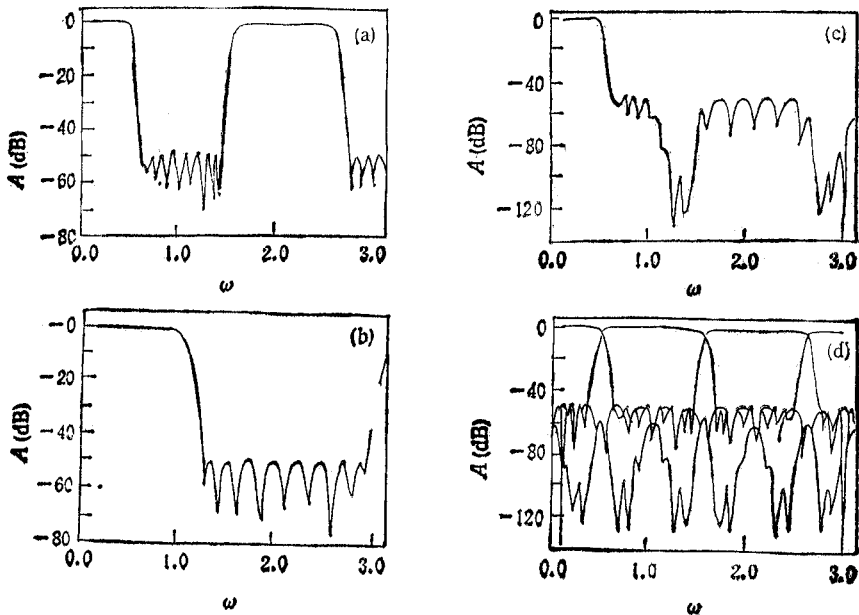


图 8 6 通道滤波器组全通滤波器的实现

- (a) 两分支分解滤波器的频率响应 (b) 3 带全通多相网络的频率响应
 (c) 6 带原型低通滤波器的频率响应 (d) 综合滤波器组各通道的率频特性

六、结 论

本文给出了一种全通型滤波器组的设计方法。在此方法中,应用了两级级联的结构,可以消除全通多相网络频率响应的不可控带。并且,给出了综合滤波器组的结构,使信号的频率-幅度特性得到全恢复。

参 考 文 献

- [1] R. E. Crochiere, L. R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*, Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, (1983).
 [2] M. Vetterli, *Signal Processing*, 10 (1986) 3, 219-244.

- [3] P. P. Vaidyanathan, *Proc. IEEE*, **78** (1990) 1,56—93.
- [4] M. Vetterli, D. Le Gall, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-37** (1989) 7, 1057—1071.
- [5] P. P. Vaidyanathan, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-33** (1986) 11, 1045—1064.
- [6] T. Q. Nguyen, P. P. Vaidyanathan, *IEEE Trans. on ASSP* **ASSP-36** (1988) 5,693—705.
- [7] K. Swaminathan, P. P. Vaidyanathan, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-33** (1986) 12, 1170—1191.
- [8] P. A. Regalia, S. K. Mitra, P. P. Vaidyanathan, *Proc. IEEE*, **76** (1988) 1,19—37.
- [9] M. Renfor, T. Saramaki, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-34** (1987) 1,24—39.
- [10] 孙少凡, QMF 滤波器和 16kb/s 子带编码的研究,北京邮电学院电信工程系硕士论文,北京,1990 年.

THEORY AND DESIGN OF UNIFORM FILTER BANKS USING ALL-PASS FILTERS

Wang Wenbo Wang Dejuan

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100088)

Abstract The theory of uniform filter banks using all-pass filters is further developed. A filter-bank structure using two-stage all-pass filters is proposed. The pre-stage is half-band filters with period, the post-stage is two pass-band filter banks. The stopband of the pre-stage filter just controls the don't-care band of the poststage filter using all-pass polyphase, so that a realization of continuous stopband property is obtained. Moreover, a method of implementing synthesis filter banks is given, which eliminates aliasing and amplitude distortions of analysis/synthesis system. Finally, an example is listed.

Key words All-pass filter; Filter bank; Quadrature mirror image filter