

大迴旋半径迴旋速调管的线性理论*

蒋华北**

(成都电讯工程学院高能电子学研究所,成都)

孙雁

(中国科技大学基础物理中心,合肥)

摘要 本文采用扰动方法,详细研究了大迴旋半径迴旋速调管,导出了电子群聚、注-波相互作用功率、增益等表达式。研究了电子的纵向群聚运动,发现电子的纵向群聚行为能对电子与波的相互作用产生不可忽略的影响。并且求得了相应的电子群聚、增益等修正表达式。

关键词 迴旋速调管;电子群聚;纵向群聚

1. 引言

作为新型的毫米波、亚毫米波器件,电子迴旋脉塞和以此为基础的迴旋管越来越受到人们的重视^[1-6]。人们在寻求新的注-波相互作用机理的同时,还在进一步研究已有的理论,以期大幅度提高器件的输出功率和效率。迴旋速调管的发展,就是目前引入注目的一个方向^[7-11]。但是,已有的理论对大迴旋半径电子注情形的研究不够深入。本文采用扰动方法,研究了大迴旋半径迴旋速调管,并详细考察了电子的纵向群聚行为对于注-波相互作用的影响,求出了一些有意义的表达式。

2. 电子相对论运动方程的扰动解

电子的相对论性一般运动由下述方程描述:

$$\gamma \left[\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dR}{dt} = \left(f_R + eB_0 R \frac{d\varphi}{dt} \right) / m_0 \quad (1)$$

$$\gamma \left[2 \frac{dR}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] + R \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \left(f_\varphi - eB_0 \frac{dR}{dt} \right) / m_0 \quad (2)$$

$$\gamma \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt} \frac{dz}{dt} = f_z / m_0 \quad (3)$$

$$\gamma = c \left[c^2 - \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4)$$

式中 (R, φ, z) 为圆柱坐标系, γ 为电子相对论能量因子, c 为真空中光速, B_0 为工作静磁场, f_R, f_φ, f_z 表示电子所受到的高频场作用力。

* 1987年11月24日收到,1988年3月25日修改定稿。

** 现在成都科技大学物理系工作。

利用扰动方法,文献[5]已求得电子运动的扰动解为:

$$R_1 = \frac{i\omega_c f_\varphi + \Omega f_R}{\gamma_0 m_0 \Omega (\omega_c^2 - \Omega^2)} \quad (5)$$

$$\varphi_1 = \frac{[(1 - \beta_\perp^2)\Omega^2 + \beta_\perp^2 \omega_c^2] f_\varphi + \beta_\parallel \beta_\perp (\omega_c^2 - \Omega^2) f_x - i\omega_c \Omega f_R}{\gamma_0 m_0 R_0 \Omega^2 (\omega_c^2 - \Omega^2)} \quad (6)$$

$$z_1 = \frac{\beta_\parallel \beta_\perp f_\varphi - (1 - \beta_\parallel^2) f_x}{\gamma_0 m_0 \Omega^2} \quad (7)$$

$$\gamma_1 = \frac{i(\beta_\perp f_\varphi + \beta_\parallel f_x)}{m_0 c \Omega} \quad (8)$$

以及

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{\omega_c f_\varphi - i\Omega f_R}{\gamma_0 m_0 (\omega_c^2 - \Omega^2)} \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{-j[(1 - \beta_\perp^2)\Omega^2 + \beta_\perp^2 \omega_c^2] f_\varphi - j\beta_\parallel \beta_\perp (\omega_c^2 - \Omega^2) f_x - \omega_c \Omega f_R}{\gamma_0 m_0 R_0 \Omega (\omega_c^2 - \Omega^2)} \quad (10)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{-j\beta_\parallel \beta_\perp f_\varphi + j(1 - \beta_\parallel^2) f_x}{\gamma_0 m_0 \Omega} \quad (11)$$

式中 $\Omega = \omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_c$; $v_\parallel = \frac{dz_0}{dt}$ 为平衡态电子纵向速度; $\omega_c = \frac{d\varphi_0}{dt}$ 为平衡态电子角速度; $R_0 = \frac{v_\perp}{\omega_c}$ 为平衡态电子运动半径。

在迴旋速调管中,利用以上结果,并注意到驻波场情形,则有

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= \frac{dR_1^+}{dt} + \frac{dR_1^-}{dt} \\ &= \frac{\omega_c f_\varphi^+ - i\Omega_+ f_R^+}{\gamma_0 m_0 (\omega_c^2 - \Omega_+^2)} + \frac{\omega_c f_\varphi^- - i\Omega_- f_R^-}{\gamma_0 m_0 (\omega_c^2 - \Omega_-^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{d\varphi_1^+}{dt} + \frac{d\varphi_1^-}{dt} \\ &= \frac{-j[(1 - \beta_\perp^2)\Omega_+^2 + \beta_\perp^2 \omega_c^2] f_\varphi^+ - j\beta_\parallel \beta_\perp (\omega_c^2 - \Omega_+^2) f_x^+ - \omega_c \Omega_+ f_R^+}{\gamma_0 m_0 R_0 \Omega_+ (\omega_c^2 - \Omega_+^2)} \\ &\quad + \frac{-j[(1 - \beta_\perp^2)\Omega_-^2 + \beta_\perp^2 \omega_c^2] f_\varphi^- - j\beta_\parallel \beta_\perp (\omega_c^2 - \Omega_-^2) f_x^- - \omega_c \Omega_- f_R^-}{\gamma_0 m_0 R_0 \Omega_- (\omega_c^2 - \Omega_-^2)} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{dz_1^+}{dt} + \frac{dz_1^-}{dt} \\ &= \frac{-j\beta_\parallel \beta_\perp f_\varphi^+ + j(1 - \beta_\parallel^2) f_x^+}{\gamma_0 m_0 \Omega_+} + \frac{-j\beta_\parallel \beta_\perp f_\varphi^- + j(1 - \beta_\parallel^2) f_x^-}{\gamma_0 m_0 \Omega_-} \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\Omega_+ = \omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_c$; $\Omega_- = \omega + k_\parallel v_\parallel - m\omega_c$; $f_{\varphi,R,z}^+$ 和 $f_{\varphi,R,z}^-$ 分别表示正负方向电磁波对电子的作用力。

在谐振点附近,有近似

$$\Omega_{\pm} \approx 0$$

故(12)–(14)式简化为

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{f_{\varphi}^+ + f_{\varphi}^-}{\gamma_0 m_0 \omega_c} \quad (15)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{-j\beta_{\perp}}{\gamma_0 m_0 R_0} \cdot \frac{[\beta_{\perp}(\Omega_- f_{\varphi}^+ + \Omega_+ f_{\varphi}^-) + \beta_{\parallel}(\Omega_- f_z^+ + \Omega_+ f_z^-)]}{\Omega_+ \cdot \Omega_-} \quad (16)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{-j}{\gamma_0 m_0} \frac{[\beta_{\parallel} \beta_{\perp}(\Omega_- f_{\varphi}^+ + \Omega_+ f_{\varphi}^-) - (1 - \beta_{\parallel}^2)(f_z^+ \Omega_- + f_z^- \Omega_+)]}{\Omega_+ \Omega_-} \quad (17)$$

3. 迴旋速调管的一般性理论

迴旋脉塞中电子的群聚主要发生在角方向,通常都忽略纵向群聚的影响。下面,我们就此种情况进行讨论。

对双腔迴旋速调管而言,电子在第一腔出口处 $z = \frac{l}{2}$ (l 为腔长)的角速度由(16)式可得:

$$\left. \frac{d\varphi_1}{dt} \right|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{j2e\beta_{\perp}^2 E_{\varphi}}{\gamma_0 m_0 k_{\parallel} v_{\parallel} R_0} \times \frac{\left(x \cos \frac{p\pi}{2} + j \sin \frac{p\pi}{2} \right) e^{-j\frac{p\pi}{2} x} e^{-j\omega t_0}}{(x^2 - 1)} \quad (18)$$

式中 $x = (\omega - m\omega_c)/k_{\parallel} v_{\parallel}$, $E_{\varphi} = E_b J'_m(\xi)$, $\xi = q_{mn} R_0/a$, a 为波导半径, q_{mn} 为 $J'_m(\xi)$ 的第 n 个零点, t_0 为电子经过腔中心的时刻。于是,如果以 t_2 表示电子经漂移管进入第二腔的时刻, T_0 表示未调制电子到达第二腔的时间,则有如下群聚公式:

$$\omega t_2 = \omega t_0 + \omega T_0 - \begin{cases} Y_{\varphi}^{(1)} \sin\left(\frac{p\pi}{2} x + \omega t_0\right) & p = \text{偶数} \\ Y_{\varphi}^{(2)} \cos\left(\frac{p\pi}{2} x + \omega t_0\right) & p = \text{奇数} \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$Y_{\varphi}^{(1)} = \frac{2e\beta_{\perp}^2 \omega T_0 E_{\varphi}}{\gamma_0 m_0 k_{\parallel} v_{\parallel} R_0 \omega_c} \cdot \frac{x}{(x^2 - 1)}$$

$$Y_{\varphi}^{(2)} = \frac{2e\beta_{\perp}^2 \omega T_0 E_{\varphi}}{\gamma_0 m_0 k_{\parallel} v_{\parallel} R_0 \omega_c} \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)}$$

电子密度的基次时谐分量由傅氏积分给出

$$n_{1\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n_{2\varphi} \cos(\omega t_2) d(\omega t_2) \quad (20)$$

式中 $n_{2\varphi}$ 为角度为 φ 时的电子密度。由电子数守恒可得

$$n_{2\varphi} = n_0 \frac{d(\omega t_0)}{d(\omega t_2)} \quad (21)$$

式中 n_0 为未扰电子密度。将(19)和(21)式代入(20)式,有

$$n_{1\varphi} = \frac{n_0}{\pi} \int_{-a}^a \cos \left[\omega t_0 + \omega T_0 - Y_{\varphi}^{(1),(2)} \cdot \begin{array}{l} \sin\left(\frac{p\pi}{2} x + \omega t_0\right) \\ \cos\left(\frac{p\pi}{2} x + \omega t_0\right) \end{array} \right] d(\omega t_0) \quad (22)$$

利用贝塞尔函数展开, 可求得第二腔中电子密度的基次分量幅值

$$n_{1\varphi} = \begin{cases} 2n_0 \cos\left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x\right) J_1(Y_{\varphi}^{(1)}) & (p = \text{偶数}) \\ 2n_0 \sin\left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x\right) J_1(Y_{\varphi}^{(2)}) & (p = \text{奇数}) \end{cases} \quad (23)$$

由于 $\omega - m\omega_c = 0$ 时, 群聚块在 φ 向旋转而不随 x 变化, 故电子密度空间的依赖关系为

$$\tilde{n}_{1\varphi} = n_{1\varphi} e^{im\varphi + ik_{\parallel} z} \quad (24)$$

这样, 就可求出电子与波的相互作用功率

$$P = e \int \tilde{n}_{1\varphi} e^{-i\omega t} v_{\perp} E_{\varphi}^* dV \quad (25)$$

E_{φ}^* 为 E_{φ} 的复数共轭. 将 $E_{\varphi} = E_c J'_m(\xi) (e^{ik_{\parallel} z} + e^{-ik_{\parallel} z}) e^{-i\omega t + im\varphi}$ 代入上式就可得

$$P = 8\pi e n_0 v_{\perp} E_c J'_m(\xi) J_1(Y_{\varphi}^{(1),(2)}) G^{1/2}(x) a^2 k_{\parallel}^{-1} \quad (26)$$

式中

$$G^{1/2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{(1-x^2)} \sin \frac{p\pi}{2} x \cos\left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x\right) & (p = \text{偶数}) \\ \frac{1}{(1-x^2)} \cos \frac{p\pi}{2} x \sin\left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x\right) & (p = \text{奇数}) \end{cases}$$

对谐振腔有

$$P = \omega W_0 / Q$$

式中 Q 为品质因素, W_0 为腔体储能.

对 TE_{mn} 模圆柱腔有

$$W_0 = \frac{la^2 E_c^2}{32} \left(1 - \frac{m^2}{q_{mn}^2}\right) J_m^2(q_{mn}) \quad (27)$$

故

$$P = \frac{\omega}{Q} \frac{la^2 E_c^2}{32} \left(1 - \frac{m^2}{q_{mn}^2}\right) J_m^2(q_{mn}) \quad (28)$$

将腔场幅值用功率表达, 且利用群聚参量 $Y_{\varphi}^{(1),(2)}$, 我们可以求出增益表达式为

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{4^7}{(p\pi)^4} \left(\frac{QI}{I_A}\right)^2 \left(\frac{Ll}{a^2}\right)^2 \left(\frac{v_{\perp}^2}{\gamma_0 v_{\parallel}^2}\right)^2 \left[\frac{2J_1(Y_{\varphi}^{(1),(2)})}{Y_{\varphi}^{(1),(2)}}\right] G'(x) F^2 \quad (29)$$

式中 $l = 2\pi e n_0 v_{\parallel} a^2$, $I_A = m_0 c^3 / e \approx 17 \text{ kA}$, L 为漂移管长度,

$$G'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2 G(x) & (p = \text{偶数}) \\ \frac{1}{(1-x^2)^2} G(x) & (p = \text{奇数}) \end{cases}$$

$$F = \left(1 - \frac{m^2}{q_{mn}^2}\right)^{-1} J_m^2(q_{mn})$$

可以看到,(23),(26)和(29)式与文献[8,9]的结果是基本一致的。

4. 考虑纵向群聚的修正理论

上节仅讨论电子因 φ 向角速度的变化而导致的角向群聚,这也是普通迴旋脉塞器件工作的机制所在。事实上,这已经假设了电子的纵向速度 $v_z = \text{常数}$ 。但是,在腔体中运动的电子并非在 z 方向为均匀运动,这个 v_z 的变化必定对电子的群聚产生影响。实际上,从(16)及(17)两式可以看到

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{R_0 \beta_{\parallel}}{\beta_{\perp}} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{j}{\gamma_0 m_0} \frac{(\Omega - f_z^+ + \Omega + f_z^-)}{\Omega + \Omega_-} \quad (30)$$

因此,当 $\frac{d\varphi_1}{dt}$ 变化时, $\frac{dz_1}{dt}$ 也必将有一个不可忽略的变化。仅考虑角向群聚对速调管来讲显然是不够的,纵向速度变化的影响应予考虑。

原则上,这时的分析是困难的。但可以用一个分离模型来计算,即首先认为群聚在角向发生,此时, $v_z = \text{常数}$;然后,认为这群聚块在纵向有一个速度变化,发生纵向群聚;同时,由于 v_z 的变化,在仅考虑角向群聚时,又应有一部分电子因 v_z 的不同而离开群聚块,故应扣除这些电子。

上述模型用群聚密度来表达可写成如下公式

$$n_{2(\varphi, z)} = n_{2\varphi} \frac{dt'_0}{dt_2} - n_0 \frac{dt''_0}{dt_2} \quad (31)$$

式中 $n_{2(\varphi, z)}$ 为考虑了纵向群聚影响的电子密度, t'_0 为角向群聚块由于 v_z 的变化而进行纵向群聚时的初时刻, t''_0 为角向群聚块形成的同时因 v_z 的不同离开群聚块的电子初时刻,它们与 t_2 的关系均由如下群聚公式决定

$$\omega t_2 = \omega t_0 + \omega T_0 - \frac{T_0 \omega}{v_{\parallel}} \operatorname{Re} \left(\frac{dz_1}{dt} \Big|_{z=\frac{l}{2}} \right) \quad (32)$$

将 $\frac{dz_1}{dt} \Big|_{z=\frac{l}{2}}$ 的表达式代入(32)式,并运用与第三节中同样的傅氏积分展开,可以求出基次时谐分量

$$n_{1(\varphi, z)} = \begin{cases} 2n_0 \cos \left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x \right) J_1(Y_z^{(1)}) \left[2 \cos \left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x \right) J_1(Y_{\varphi}^{(1)}) - 1 \right] & (p = \text{偶数}) \\ 2n_0 \sin \left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x \right) J_1(Y_z^{(2)}) \left[2 \sin \left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x \right) J_1(Y_{\varphi}^{(2)}) - 1 \right] & (p = \text{奇数}) \end{cases} \quad (33)$$

式中

$$Y_z^{(1)} = \frac{2e\beta_{\perp}\omega T_0 E_{\varphi}}{\gamma_0 m_0 v_{\parallel} (x^2 - 1)}, \quad Y_z^{(2)} = \frac{2e\beta_{\perp}\omega T_0 E_{\varphi}}{\gamma_0 m_0 v_{\parallel}} \cdot \frac{x}{(x^2 - 1)}$$

于是,求得注-波相互作用功率为

$$P = \begin{cases} 8\pi e n_0 v_{\perp} E_c J'_m(\xi) J_1(Y_z^{(1)}) \left[2 \cos \left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x \right) J_1(Y_{\varphi}^{(1)}) - 1 \right] G^{1/2}(x) a^2 k_{\parallel}^{-1} & (p = \text{偶数}) \\ 8\pi e n_0 v_{\perp} E_c J'_m(\xi) J_1(Y_z^{(2)}) \left[2 \sin \left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x \right) J_1(Y_{\varphi}^{(2)}) - 1 \right] G^{1/2}(x) a^2 k_{\parallel}^{-1} & (p = \text{奇数}) \end{cases} \quad (34)$$

进一步可求出增益表达式为

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{4^7}{(p\pi)^4} \left(\frac{QI}{I_A}\right)^2 \left(\frac{Ll}{a^2}\right)^2 \left(\frac{v_{\perp}^2}{\gamma_0 v_{\parallel}^2}\right)^2 \times \left\{ \frac{2J_1(Y_z^{(1)}) \left[2 \cos\left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x\right) J_1(Y_{\varphi}^{(1)}) - 1 \right]}{Y_{\varphi}^{(1)} + Y_z^{(1)}} \right\} G'(x) F^2 \quad (35)$$

式中

$$G'(x) = \left[\frac{x}{(1-x^2)} + \frac{1}{\beta_{\parallel}(1-x^2)} \right]^2 G(x) \quad (p = \text{偶数})$$

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{4^7}{(p\pi)^4} \left(\frac{QI}{I_A}\right)^2 \left(\frac{Ll}{a^2}\right)^2 \left(\frac{v_{\perp}^2}{\gamma_0 v_{\parallel}^2}\right)^2 \times \left\{ \frac{2J_1(Y_z^{(2)}) \left[2 \sin\left(\omega T_0 - \frac{p\pi}{2} x\right) J_1(Y_{\varphi}^{(2)}) - 1 \right]}{Y_{\varphi}^{(2)} + Y_z^{(2)}} \right\} G'(x) F^2 \quad (36)$$

式中

$$G'(x) = \left[\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{x}{\beta_{\parallel}(1-x^2)} \right]^2 G(x) \quad (p = \text{奇数})$$

通过(29)式与(35)、(36)两式的比较,不难发现,考虑了纵向群聚的器件增益与未考虑纵向群聚的结果是明显不同的;还可以看到腔的纵向模数为偶数与奇数的情形有较大差异。这是因为在谐振时, $x \rightarrow 0$, (35)式中 $G'(x)$ 的值有较大的增加,而(36)式中的 $G'(x)$ 则变化很小。

(29)式与(35)、(36)两式的差异大小用数值计算很容易求得。如图1所示,以 $p =$ 偶数为例,计算了增益 ($P_{\text{out}}/P_{\text{in}}$) 与电流 (I) 的关系。从图中可以清楚地看到考虑了纵向群聚的增益与未考虑纵向群聚的结果在定量上的差别:它们之间有一个平移。从而进一步证实了修正理论的重要性。

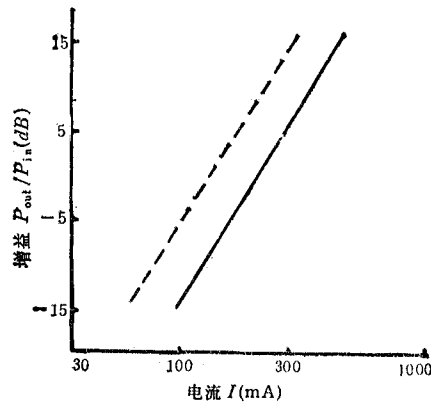


图1 增益与电流的关系曲线(图中虚线为未考虑纵向群聚的情形;实线为考虑了纵向群聚的情形。计算参量为: TE_{112} 模, $f = 13.5\text{GHz}$, $Q = 1000$, $L = 22.5\text{cm}$, $l = 3.2\text{cm}$, $a = 2.5\text{cm}$, $\gamma_0 = 1.24$, $\beta_{\parallel} = 0.18$)

5. 结论

本文采用扰动方法,对大迴旋半径迴旋速调管进行了系统的研究。文中首次对电子纵向群聚行为作了详细的考察,发现它对电子的角向群聚有着不可忽略的影响。进而建立了相应的修正理论,求得了电子群聚、注-波相互作用功率和增益等表达式。

文中虽然研究的是大迴旋半径情形,但是,利用文献[1—4]提出的迴转中心坐标系方法,也可方便地用于小迴旋半径情形。

作者衷心感谢刘盛纲教授对本文的指导。

参 考 文 献

- [1] 刘盛纲,电子学报,1981年,第1期,第20—25页。
- [2] 刘盛纲,中国科学,1979年,第5期,第524—536页。
- [3] 刘盛纲,中国科学,1981年,第11期,第1401—1412页。
- [4] 刘盛纲,大自然探索,1984年,第4期,第20—42页。
- [5] 刘盛纲,张世昌,电子科学学刊,1986年,第1期,第1—7页。
- [6] P. A. Lindsay, Dig. of Fourth International Symposium on Gyrotron and Free Electron Laser, Chengdu, China, 1987, p. 26.
- [7] A. K. Ganguly and K. R. Chu, *Int. J. Electron.*, 21(1981), 503—520.
- [8] D. S. Furuno et al., *Int. J. Electron.*, 6(1984), 1151—1165.
- [9] K. R. Chu et al., *IEEE Trans. on PS*, PS-13(1985), 424—446.
- [10] K. R. Chu et al., *IEEE Trans. on PS*, PS-13(1985), 446—461.
- [11] A. K. Ganguly et al., *IEEE Trans on PS*, PS-13(1985), 409—423.

THE LINEAR THEORY OF LARGE-ORBIT GYRO-KLYSTRON

Jiang Huabei

(Chengdu Institute of Radio Engineering, Chengdu)

Sun Yan

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract Making use of the perturbation approach, the large-orbit gyro-klystron was investigated. The expressions of the electron bunching, the beam-wave interaction power and the gain were obtained. Furthermore, it was found that the axial motions of bunching electrons have an unneglected effect on the beam-wave interaction. Taking account of this effect, the corresponding revised expressions of the electron bunching, the beam-wave interaction power and the gain were derived out.

Key words Gyro-Klystron; Electron bunching; Axial bunching