

# 信号的广义逆群及其神经网络实现\*

何 明 一

(西北工业大学电子工程系, 西安 710072)

**摘要** 本文首次提出了信号的广义逆群这一新概念, 并讨论了它的性质、泄漏系数和神经网络实现技术。研究表明, 有限长信号存在多组有限长广义逆信号, 它们构成原信号的广义逆群; 各广义逆群的泄漏系数一般不相同, 因而其“病态”程度不同; 广义逆群可以用一个特殊的神经网络并行实现且收敛快。最后指出, 广义逆群用于反卷积时可形成一种新的并行有限长滤波反卷积方法, 对于离线处理, 计算时间可从  $N^2$  阶次降到  $N$  阶次; 最低泄漏系数广义逆群对应的反卷积最可信。

**关键词** 信号处理; 神经网络; 广义逆群; 反卷积

## 一、引 言

信号的逆理论对于反卷积、信号恢复、逆滤波、系统辨识等具有非常重要的意义, 多年来一直是电类众多学科共同感兴趣的研究课题<sup>[1,2]</sup>。近 50 年来, 时域反卷积等都主要是基于信号的单脉冲逆理论发展起来的<sup>[3,4]</sup>。由单脉冲逆、最小平方逼近建立的一些反卷积方法已得到较好的应用。随着智能信息处理技术的出现和发展, 尤其是神经网络、并行分布处理技术的问世, 对计算复杂度的限制已有所减弱, 而更关心处理的智能性、可信性, 并行性、适时性等。基于这样一种思想, 作者继研究了信号的多脉冲逆<sup>[5,6]</sup>, 在此首次提出信号的广义逆群的新概念, 并讨论了它的性质和应用。引入了泄漏系数这一指标来测度广义逆群的性能, 这既不同于单脉冲逆的定义, 也不同于多脉冲逆的测度。文中还给出了一个分组的、单层的、改进的感知器网络来实现广义逆群。利用广义逆群的次对称性, 进一步将网络作了简化。最后给出了一个计算实例的仿真结果。

## 二、信号的逆和逆群

考虑信号  $x(n)$ ,  $(-\infty < n < \infty)$ , 现给出如下定义。

**定义 1** 若信号  $g(n)$ ,  $(-\infty < n < \infty)$  满足

$$x(n) * g(n) = \delta(n) \quad (1)$$

则称  $g(n)$  为  $x(n)$  的逆(信号)。

1992.03.25 收到, 1992.10.27 定稿。

\* 国家自然科学基金和航空基金资助项目。

何明一 男, 1958年生, 副教授, 现从事信号处理、神经网络和人工智能等学科的教学和科研工作。

**定义 2** 若信号  $g^{(k)}(n)$ ,  $(-\infty < n < \infty)$  满足

$$x(n) * g^{(k)}(n) = \delta(n - k), \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

则称  $g^{(k)}(n)$  为  $x(n)$  的  $k$  步延迟逆(信号).

**定义 3** 由  $g^{(k)}(n)$ ,  $(k = 0, 1, 2, \dots)$  构成的信号集合

$$\{g^{(k)}(n), k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3)$$

称为信号  $x(n)$  的逆群.

现给出如下定理.

**定理 1** 若信号  $x(n)$  及其  $k$  步延迟逆信号  $g^{(k)}(n)$  的  $Z$  变换存在并分别为  $X(Z)$ ,  $G^{(k)}(Z)$ , 则

$$G^{(k)}(Z) = Z^{-k}/X(Z) \quad (4)$$

**证明** 因为  $g^{(k)}(n)$  是  $x(n)$  的  $k$  步延迟逆信号, 有  $g^{(k)}(n) * x(n) = \delta(n - k)$ , 两边作  $Z$  变换:

$$\text{右边} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - k) Z^{-n} = Z^{-k}$$

左边 (利用卷积定理有)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g^{(k)}(n) * x(n)] Z^{-n} &= \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^{(k)}(n) Z^{-n} \right] \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \right] \\ &= G^{(k)}(Z) \cdot X(Z), \end{aligned}$$

从而得证.

**定理 2** 若  $x(n)$  为  $N$  点 ( $N \geq 2$ ) 有限长信号, 则  $g^{(k)}(n)$  为无限长信号; 反之亦然.

**证明** 不妨设  $x(n)$ ,  $(n = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$  为  $N$  点有限长信号, 显然

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) Z^{-n}$$

为  $Z$  的  $(N - 1)$  次多项式. 记  $X(Z)$  的  $(N - 1)$  个零点分别为  $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}$ , 则  $X(Z)$  可写成如下形式

$$X(Z) = A \prod_{i=1}^{N-1} (1 - z_i Z^{-1})$$

这样有

$$\begin{aligned} G^{(k)}(Z) &= \frac{Z^{-k}}{X(Z)} = \frac{Z^{-k}}{A} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{K_i}{1 - z_i Z^{-1}} \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{K_i Z^{-k}}{1 - z_i Z^{-1}}, \end{aligned}$$

从而

$$g^{(k)}(n) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N-1} K_i (z_i)^{n-k} U(n - k),$$

式中  $U(n)$  为单位阶跃信号,  $A$  为非零常数,  $K_i$  为系数. 当  $N \geq 2$  时,  $g^{(k)}(n)$  中便至少出现一项无穷长度的指数型函数项. 当  $N = 1$  时,  $g^{(k)}(n)$  取  $\delta(n - k)$  的形式. 证毕.

**定理 3**

$$g^{(k+1)}(n) = g^{(k)}(n-1) \quad (5)$$

**证明** 根据定义, 有

$$x(n) * g^{(k+1)}(n) = \delta(n-k-1),$$

$$x(n) * g^{(k)}(n) = \delta(n-k),$$

因此有,  $g^{(k+1)}(n) = g^{(k)}(n-1)$ .

定理 3 为  $g^{(k+1)}(n)$  的计算揭示了一个最简单的方法: 由  $g^{(k)}(n)$  延迟一步 (即  $g^{(k)}(n-1)$ ) 便得  $g^{(k+1)}(n)$ . 显然,  $g^{(k+1)}(n)$  与  $g^{(k)}(n)$  具有相同的信息量.

### 三、信号的广义逆和广义逆群

在对信号的实际处理时,  $x(n)$  来源于有限长信号或无限长信号在时域上的截断信号. 因此, (3) 式定义的逆群一般是无限长的. 为了实时处理和有利于物理系统的实现, 逆群也最好是有限长的并具有与 (2) 式相似的特性. 关于信号的广义逆已有许多研究<sup>[2]</sup>, 本文给出了一种新的广义逆及其广义逆群.

为分析方便, 记  $x(n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ .

**定义 4** 若  $N$  点信号  $s(n)$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) 满足

$$x(n) * s(n) = \underbrace{\{1, 0, \dots, 0\}}_N, \underbrace{\{\times, \times, \dots, \times\}}_{(N-1)} \quad (6)$$

式中“ $\times$ ”表不定值, 则称  $s(n)$  是  $x(n)$  的广义逆.

**定义 5** 若一组  $N$  点信号

$$S(n) = \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_N(n) \end{bmatrix}, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (7)$$

满足

$$x(n) * S(n) = \begin{bmatrix} x(n) * s_1(n) \\ x(n) * s_2(n) \\ \vdots \\ x(n) * s_N(n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{N \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \dots & \times \\ \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots \\ \times & \dots & \times \end{bmatrix}}_{N \times (N-1)}, \quad (8)$$

则把  $S(n)$  称为  $x(n)$  的  $N$  点广义逆群.

**定义 6** 若第  $k$  组  $N$  点信号集  $S^{(k)}(n) = \{s_1^{(k)}(n), s_2^{(k)}(n), \dots, s_N^{(k)}(n)\}^T$  满足

$$x(n) * S^{(k)}(n) = \begin{bmatrix} x(n) * s_1^{(k)}(n) \\ x(n) * s_2^{(k)}(n) \\ \vdots \\ x(n) * s_N^{(k)}(n) \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{matrix} \times \cdots \times \\ \times \cdots \times \\ \vdots \\ \times \cdots \times \end{matrix}}_{N \times (k-1)} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{N \times N} & \underbrace{\begin{matrix} \times \cdots \times \\ \times \cdots \times \\ \vdots \\ \times \cdots \times \end{matrix}}_{N \times (N-k)} \end{array} \right], \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

式中

$$S^{(k)}(n) = \begin{bmatrix} s_1^{(k)}(1) & s_2^{(k)}(1) & \cdots & s_N^{(k)}(1) \\ s_1^{(k)}(2) & s_2^{(k)}(2) & \cdots & s_N^{(k)}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^{(k)}(N) & s_2^{(k)}(N) & \cdots & s_N^{(k)}(N) \end{bmatrix} \quad (10)$$

则称  $S^{(k)}(n)$  为  $x(n)$  的第  $k$  个  $N$  点广义逆群。

#### 四、广义逆群的性质

为了讨论(9)式定义的广义逆群的性质,用  $x(n)$ ,  $(n=0, 1, \dots, N-1)$  构成如下  $(2N-1) \times N$  的 Toeplitz 阵  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \cdots & x_0 \\ 0 & x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

从  $A$  中前  $N$  行开始依次向下滑动一行构成方阵并记为  $A_k$ , 即

$$A_k = \begin{bmatrix} x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_k & x_{k-1} & \cdots & x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{N-k} & x_{N-k-1} & \cdots & x_0 \\ 0 & x_{N-1} & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

$A_k$  为  $N \times N$  Toeplitz 矩阵, 且有如下性质<sup>[7]</sup>: (1)  $A_k$  是次对称阵, 即  $JA_kJ = A_k$  (式中  $J$  是  $N \times N$  交换阵); (2)  $A_k$  的逆存在; (3)  $A_k$  的逆仍是次对称阵, 即有

$$JA_k^{-1}J = A_k^{-1} \quad (13)$$

现给出定理 4.

**定理 4** 由信号  $x(n)$  的第  $k$  组  $N$  点广义逆群  $S^{(k)}(n)$  构成的方阵  $[S^{(k)}(n)]$  与由信号  $x(n)$  按(11)和(12)式构成的第  $k$  个滑动方阵  $A_k$  互为逆阵, 即

$$A_k \cdot [S^{(k)}(n)] = 1_{N \times N} \quad (14)$$

或

$$[S^{(k)}(n)] = A_k^{-1} \quad (15)$$

证明 记

$$A_k \cdot [S^{(k)}(n)] = [c_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

问题转化成证  $C = [c_{ij}]$  是  $N \times N$  单位阵。考虑  $x(n)$  与  $s_i^{(k)}(n)$  的卷积, 因

$$[x(n) * s_i^{(k)}(n)]^T = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^{(k)}(1) \\ s_i^{(k)}(2) \\ \vdots \\ s_i^{(k)}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ \vdots \\ c_{Ni} \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} k-1$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} N$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} N-k$

又,  $s_i^{(k)}(n)$  是  $x(n)$  的第  $k$  组  $N$  点广义逆群中的一个广义逆, 根据定义 6, 它与  $x(n)$  的卷积取如下形式:

$$x(n) * s_i^{(k)}(n) = \left[ \underbrace{\times \cdots \times}_{k-1} \underbrace{0 \cdots 0}_{i-1} \underbrace{1 \ 0 \cdots 0}_N \underbrace{\times \cdots \times}_{N-k} \right] \quad (18)$$

显然

$$c_{ii} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (19)$$

定理 4 从而得证。

定理 4 表明: (1) 信号  $x(n)$  的第  $k$  组广义逆群可由第  $k$  个滑动阵  $A_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) 求逆直接得到, 即

$$[S^{(k)}(n)] = [A_k]^{-1} \quad (20)$$

(2) 由于  $A_k$  的逆存在, 因而 (10) 式定义的广义逆群是存在的, 且由  $x(n)$  本身唯一确定。

为了度量各逆群的泄漏程度, 引出如下定义。

**定义 7** 若记  $x(n)$  与  $S^{(k)}(n)$  的线性卷积的结果具如下形式:

$$x(n) * S^{(k)}(n) = [E_1^{(k)} | 1 | E_2^{(k)}] \quad (21)$$

式中,  $E_1^{(k)}$  为  $N \times (k-1)$  阵,  $E_2^{(k)}$  为  $N \times (N-k)$  阵。并记

$$E^{(k)} = [E_1^{(k)} | E_2^{(k)}] = [e_{ij}^{(k)}], \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, N-1 \end{matrix} \quad (22)$$

则称  $e_{ij}^{(k)}$  为信号  $x(n)$  的第  $k$  组  $N$  点广义逆群生成的泄漏元素; 称

$$\lambda_k = \xi_N \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} [e_{ij}^{(k)}]^2} \quad (23)$$

为泄漏系数。式中  $\xi_N$  为与  $N$  有关的常系数。

由于广义逆群  $S^{(k)}(n)$  存在且由  $x(n)$  唯一确定,  $x(n)$  与  $S^{(k)}(n)$  卷积生成的泄漏元数亦是唯一确定的, 因而  $\lambda_k$  唯一确定.  $\lambda_k$  可以用来度量  $S^{(k)}(n)$  的泄漏程度.  $\lambda_k$  越小,  $S^{(k)}(n)$  作为  $x(n)$  的广义逆群越好. 但是  $\min(\lambda_k)$ ,  $(k=1, 2, \dots, N)$  并不一定是唯一的, 也就是说在  $N$  个泄漏系数中, 有可能有多个系数同时取最小值. 这时可任取一个逆群来作反卷积. 也可用取最小  $\lambda_k$  的所有逆群分别作反卷积, 最后取平均. 可能出现的最坏情况就是  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$ , 这时应将所有逆群用于反卷积, 最后取  $N$  组解的平均. 当系统误差趋于零时, 所有逆群对应的反卷积结果向精确解逼近.

## 五、广义逆群的神经网络实现

### 1. 实现步骤

- 第一步 由  $\{x(n)\}$  构造  $A$  阵 ( $2N-1$  行,  $N$  列);
- 第二步 在  $A$  中从上至下依次选取  $N \times N$  滑动方阵  $A_k (k=1, 2, \dots, N)$ ;
- 第三步 对每一组  $A_k$ , 确定相应的  $S^{(k)}(n)$ ;
- 第四步 确定泄漏系数  $\lambda_k$ , 并决定最小泄漏系数对应的广义逆群.

### 2. 计算广义逆群的神经网络实现

实现广义逆群的神经网络结构如图 1 所示, 该网络可视为一个分组的、单层的、改进的感知器网络. 它由  $N$  个输入神经元(或称处理元件)和至多  $N^2$  个输出处理元件组成. 输入层处理元件单向全互联地连到所有输出层处理元件. 与第  $k (k=1, 2, \dots, N)$  组输出处理元件相连的权值构成  $[S^{(k)}]^T$  阵. 所有神经元具有相同的元件特性: 对输入实现加权求和和非线性运算, 非线性函数一般取连续、可微、单调递增的奇函数. 网络训练过程如下:

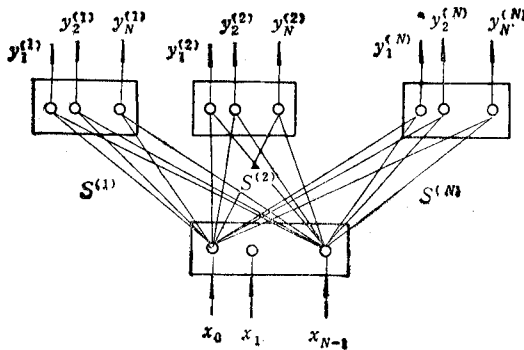


图 1 实现广义逆群的神经网络模型

练过程如下:

#### (1) 活动规则

$$y^{(k)}(i) = f \left( \sum_{j=0}^{N-1} s^{(k)}(i, j) \cdot x^{(k)}(j) \right)$$

式中  $x^{(k)}(j)$  为第  $k$  组输出处理元件的第  $j$  输入;  $y^{(k)}(i)$  为第  $k$  组输出处理元件中第  $i$  元活动值;  $f(\cdot)$  为连续可微、单调递增的奇函数;  $s^{(k)}(i, j)$  为连接第  $j$  个输入元与第  $k$  组第  $i$  输出元的权值, 初始值随机取值.

#### (2) 修正规则

$$\Delta s^{(k)}(i, j) = \alpha_k \frac{\partial f}{\partial s^{(k)}(i, j)} e^{(k)}(i) \cdot x^{(k)}(j)$$

式中  $e^{(k)}(i)$  为期望输出  $d^{(k)}(i)$  与实际输出  $y^{(k)}(i)$  之差;  $\alpha_k$  为第  $k$  组学习率,  $0 <$

$\alpha_k < 1$ ;  $\Delta s^{(k)}(i, j)$  为  $s^{(k)}(i, j)$  的修正量。

### 3. 训练数据模式(见表 1)

表 1 训练数据模式表

| 输入模式      |           |     |           | 第一组目标模式 |         |     |         | 第二组目标模式 |         |     |         | ... |     |         |         | 第 N 组目标模式 |         |  |  |
|-----------|-----------|-----|-----------|---------|---------|-----|---------|---------|---------|-----|---------|-----|-----|---------|---------|-----------|---------|--|--|
| $X_0$     | $X_1$     | ... | $X_{N-1}$ | $d_1^1$ | $d_2^1$ | ... | $d_N^1$ | $d_1^2$ | $d_2^2$ | ... | $d_N^2$ | ... | ... | $d_1^N$ | $d_2^N$ | ...       | $d_N^N$ |  |  |
| $x_0$     | 0         | ... | 0         | 1       | 0       | ... | 0       | ×       | ×       | ... | ×       | ... | ... | ×       | ×       | ...       | ×       |  |  |
| $x_1$     | $x_0$     | ... | 0         | 0       | 1       | ... | 0       | 1       | 0       | ... | 0       | ... | ... | ×       | ×       | ...       | ×       |  |  |
| $x_2$     | $x_1$     | ... | 0         | 0       | 0       | ... | 0       | 0       | 1       | ... | 0       | ... | ... | ×       | ×       | ...       | ×       |  |  |
| ⋮         | ⋮         | ⋮   | ⋮         | ⋮       | ⋮       | ⋮   | ⋮       | ⋮       | ⋮       | ⋮   | ⋮       | ... | ... | ⋮       | ⋮       | ⋮         | ⋮       |  |  |
| $x_{N-1}$ | $x_{N-2}$ | ... | $x_0$     | 0       | 0       | ... | 1       | 0       | 0       | ... | 0       | ... | ... | 1       | 0       | ...       | 0       |  |  |
| 0         | $x_{N-1}$ | ... | $x_1$     | ×       | ×       | ... | ×       | 0       | 0       | ... | 1       | ... | ... | 0       | 1       | ...       | 0       |  |  |
| ⋮         | ⋮         | ⋮   | ⋮         | ⋮       | ⋮       | ⋮   | ⋮       | ⋮       | ⋮       | ⋮   | ⋮       | ... | ... | ⋮       | ⋮       | ⋮         | ⋮       |  |  |
| 0         | 0         | ... | $x_{N-1}$ | ×       | ×       | ... | ×       | ×       | ×       | ... | ×       | ... | ... | 0       | 0       | ...       | 1       |  |  |

### 4. 利用对称性减少权训练数目

由于  $A_k$  是次对称 Toeplitz 阵, 可知  $A_k^{-1}$  是次对称(但不能保证是 Toeplitz)阵。这样,  $[S^{(k)}]$  的  $N^2$  个权值仅需训练  $(N^2 + N)/2$  个权值。对于串行实现, 可减少近 50% 的处理时间。对于并行处理, 网络变成非匀称的且大大减小了部分神经元的实现难度。如一个  $N = 4$  的广义逆群实现问题可由图 2 所示的网络实现。

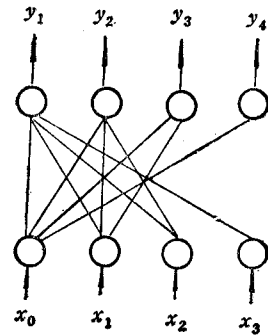


图 2 实现广义逆群( $N = 4$ )的一个实用网络

## 六、计算实例

设  $x(n) = \{3, -2, 1, -2\}$ ,  $h(n) = \{4, -2, 5, 1\}$ , 则  $x(n)$  与  $h(n)$  的卷积为  $y(n) = x(n) * h(n) = \{3, 13, -15, 19, -20, 8, -8\}$ 。现由  $y(n)$  和  $x(n)$  求  $h(n)$ 。

由  $x(n)$  可按 (12) 式构造出滑动阵  $A_1, A_2, A_3$  和  $A_4$ 。由第五节介绍的方法可用神经网络方法得到  $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}$  和  $S^{(4)}$ , 分别为

$$[S^{(1)}]^T = \begin{bmatrix} 0.333333 & 0.222430 & 0.037575 & 0.173135 \\ -0.000000 & 0.335923 & 0.224819 & 0.039487 \\ 0.000000 & -0.003693 & 0.329543 & 0.218671 \\ -0.000000 & 0.002451 & 0.002425 & 0.335146 \end{bmatrix}$$

$$[S^{(2)}]^T = \begin{bmatrix} -0.225521 & 0.182986 & 0.193910 & -0.084583 \\ -0.048290 & -0.032193 & 0.327527 & 0.196310 \\ -0.294779 & -0.196519 & -0.032722 & 0.180310 \\ -0.439537 & -0.293024 & -0.051771 & -0.231291 \end{bmatrix}$$

$$[S^{(3)}]^T = \begin{bmatrix} 0.178657 & -0.207610 & 0.135375 & 0.269437 \\ -0.412641 & -0.103586 & 0.068490 & 0.134690 \\ -0.371612 & -0.345463 & -0.106438 & -0.214030 \\ 0.488756 & -0.379651 & -0.416019 & 0.171891 \end{bmatrix}$$

$$[S^{(4)}]^T = \begin{bmatrix} -0.504117 & -0.003888 & 0.001913 & 0.000000 \\ -0.246715 & -0.501066 & 0.000157 & 0.000000 \\ 0.378178 & -0.243145 & -0.503033 & 0.000000 \\ -0.326323 & 0.379467 & -0.250651 & -0.500000 \end{bmatrix}$$

4 组网络选用了相同的随机初始权值, 训练测度指标为均方误差低于 0.0001。4 组网络的训练过程的均方误差下降曲线如图 3 所示, 其学习次数分别为 32, 48, 44 和 51。

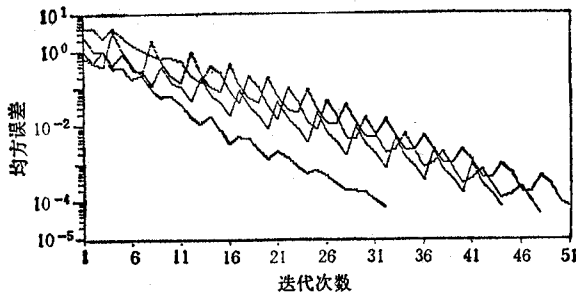


图 3 4 组网络训练过程的均方误差曲线

义逆群的反卷积最好。

$x(n)$  与各广义逆群以及  $y(n)$  的卷积的结果容易获得。容易检验 4 个广义逆群对应的泄漏系数分别为:  $\lambda_1 = 0.1329$ ,  $\lambda_2 = 0.1683$ ,  $\lambda_3 = 0.2835$ ,  $\lambda_4 = 0.3411$ 。并可验证即使在有噪声情况下, 基于第一组广

## 七、讨论和结论

本文首次提出了信号的广义逆群的新概念并建立了相应的理论。讨论了广义逆群的性质、泄漏系数和神经网络实现技术。研究表明: (1) 有限长信号存在多组有限长广义逆信号, 它们构成原信号的广义逆群(存在性), 各广义逆群由  $x(n)$  本身唯一确定; (2) 各广义逆群的泄漏系数一般不同, 因而其“病态”程度不同; (3) 由于滑动阵  $A_k$  是非奇异的, 泄漏系数为非零正实数, 必存在最小值, 最小泄漏系数广义逆群对应的反卷积最可信; (4) 最低泄漏系数广义逆群并不一定是唯一的, 如当  $A_N = A_1^T$  时,  $\lambda_N = \lambda_1$ , 此时可行的办法是任取一个最低泄漏系数广义逆群做反卷积或将所有最低泄漏系数广义逆群分别作反卷积后取平均; (5) 广义逆群是次对称阵, 可用图 1 或图 2 所示网络并行实现; 训练模式长度小于  $2N$ , 处理单元可以看成工作在线性区的 S 形神经元, 结构简单易于实现; (6) 采用单层网络, 且训练对初始权值不敏感, 对  $N \leq 20$  的问题作过大量仿真实验, 训练次数在数十次之内便可使权值收敛到可接受的精度(如均方误差小于 0.0001); (7) 基于广义逆群的反卷积是一种新的并行滤波反卷积方法, 对于离线处理, 计算(处理)时间可从  $N^2$  阶次降到  $N$  阶次, 且便于物理实现。

## 参 考 文 献

- [1] S.M. Riad, *Proc. IEEE*, 74(1986) 1, 82-85.



- [2] C. A. Berenstein, E.V. Patrick, *Proc. IEEE*, 78 (1990)4, 723—734.
- [3] Special Issue on inverse methods in electromagnetics, *IEEE Trans on AP*, AP-29 (1981)3.
- [4] M.G.M. Hussain, M. Jarach, *IEEE Trans. on CAS*, CAS-36(1989)4, 622—628.
- [5] 何明一, 基于神经网络的高可信度并行反卷积器——基本原理. 第二届全国神经网络-信号处理学术会议论文集, 南京, 1991年, 12月2—6日, 第129—133页.
- [6] 何明一, 神经计算——原理·语言·设计·应用, 西安电子科技大学出版社, 西安, 1992年, 第14章.
- [7] R.E. Blahut, *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, (1985), Chapter 11.

## GENERALIZED INVERSE GROUP OF SIGNAL AND ITS IMPLEMENTATION WITH NEURAL NETWORKS

He Mingyi

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract** A new concept, the generalized inverse group (GIG) of signal, is firstly proposed and its properties, leaking coefficients and implementation with neural networks are discussed in this paper. Theoretical analysis and computational simulation show that (1) there are a group of finite length generalized inverse signals for any finite signal, which form the GIG; (2) each inverse group has different leaking coefficients, thus different abnormal states; (3) each GIG can be implemented by a grouped and improved single-layer perceptron which appears with fast convergence. When used in deconvolution, the proposed GIG can form a new parallel finite length filtering deconvolution method. On off-line processing, the computational time is reduced to  $O(N)$  from  $O(N^2)$ . And the less leaking coefficient is, the more reliable the deconvolution will be.

**Key words** Signal processing; Neural networks; Generalized inverse group; Decowolution