

## 低密度校验码及其在图像传输中的应用<sup>1</sup>

马丕明 袁东风 杨秀梅 张海刚

(山东大学信息科学与工程学院 济南 250100)

**摘要:** 低密度校验 (Low-Density Parity-Check, LDPC) 码是一种基于图和迭代译码的信道编码方案, 性能非常接近 Shannon 极限且实现复杂度低, 具有很强的纠错抗干扰能力。该文深入研究了 LDPC 码的编码和译码基本原理, 并将其应用于移动衰落信道图像的传输中, 仿真结果表明 LDPC 码能为图像传输带来显著的性能提高, 且系统复杂度低, 译码时延短。

**关键词:** 低密度校验码, 图和迭代译码, Rayleigh 衰落信道, 图像传输

**中图分类号:** TN919.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)08-1269-07

## Low-Density Parity-Check Codes and Their Application in Image Transmission

Ma Pi-ming Yuan Dong-feng Yang Xiu-mei Zhang Hai-gang

(Information Science and Engineering School of Shandong University, Jinan 250100, China)

**Abstract** Low-Density Parity-Check (LDPC) codes are a class of channel codes based on graphs and iterative decoding whose performance is very close to the Shannon limit with low complexity and have strong error control strength. In this paper, encoding and decoding principles of LDPC codes are deeply studied. At the same time, this coding scheme is applied in image transmission system over Rayleigh fading channel. The simulation results indicate that LDPC codes can make the quality of the image highly improved with rather low system complexity and short decoding time delay.

**Key words** Low-Density Parity-Check(LDPC) codes, Graphs and iterative decoding, Rayleigh fading channel, Image transmission

### 1 引言

我们知道, 线性分组码可由生成矩阵  $G$  或校验矩阵  $H$  决定, 生成矩阵和校验矩阵二者可以互相转换。由 Gallager 首先提出的低密度校验 (LDPC) 码正是线性分组码的一种<sup>[1]</sup>, 其校验矩阵是一种稀疏矩阵, 也就是矩阵中除很少一部分元素非零外, 其他大部分的元素都是零。由于当时计算能力和存储能力的限制, 人们没有认识到 LDPC 码的优越性。1993 年 Turbo 码的研究引发了对基于图 (Graph) 的迭代译码算法 (Iterative decoding algorithm) 的研究热潮<sup>[2,3]</sup>, 从而使人们重新发现, 1962 年提出的 LDPC 码也是一种性能接近 Shannon 极限而且可以实现的编码方案, 其性能甚至可以超过 Turbo 码。文献 [4] 中, D. Mackay 从理论和实际应用两个方面详细论述了 LDPC 码的编码和解码问题, 提出了实用的概率迭代译码方法——和积算法 (Sum product algorithm), 也称置信传播算法 (Belief propagation algorithm), 或消息传递算法 (Message passing algorithm), 极大地推动了 LDPC 码的发展。文献 [5] 中, M. G. Luby 等人提出了具有更好性能的非规则 LDPC 码, 同时 T. J. Richardson 等人提出的密度进化 (Density evolution) 方法<sup>[6]</sup>, 可以从理论上分析 LDPC 码的容量、设计具有极限性能的非规则码, 这些都对 LDPC 码的研究和应用做出了重要的贡献。

<sup>1</sup> 2003-04-10 收到, 2003-10-08 改回

作为一种线性分组码, LDPC 码描述简单, 译码可完全并行实现, 译码的速度高于 Turbo 码, 适合硬件实现, 且本身具有内在的交织特性, 系统的实现复杂度低。因此 LDPC 码受到越来越多的研究者的关注, 在很多领域得到广泛应用<sup>[7-8]</sup>。本文首先介绍 LDPC 码的编译码基本原理, 构造了 3 种规则的 LDPC 码, 然后将其应用在移动衰落信道的图像传输中, 并进行了系统仿真。

## 2 LDPC 码的编码

LDPC 码的编码任务是构造校验矩阵。校验矩阵每列 1 的个数称为列重, 每行 1 的个数称为行重。如果矩阵的列重和行重都是固定的数, 则是规则 (Regular) 码, 否则是非规则 (Irregular) 码。本文以规则的 LDPC 码为重点, 非规则码的研究将在后续文章中介绍。

Tanner 图与校验矩阵一一对应, 可以形象地刻画 LDPC 码的编译码特性。Tanner 图是一种双向图, 只有两类节点, 一类节点是位节点 (bit node, 变量节点、左节点), 对应校验矩阵的列, 同时对应码字中的位; 另一类节点是校验节点 (check node, 函数节点、右节点), 对应校验矩阵的行, 也就是校验方程。如果校验矩阵的第  $i$  行第  $j$  列元素为 1, 则 Tanner 图的第  $j$  个位节点与第  $i$  个校验节点有一条边相连, 节点的边的总数称为节点的度 (degree), 从某个节点出发又回到此节点为一循环 (cycle), 所经过的边的个数称为周长 (girth)。校验矩阵的行重和列重与节点的度一致, 度的分布完全决定了校验矩阵。图 1 给出了一个 Tanner 图的例子。

规则校验矩阵有很多种构造方法, 其中著名的是 Gallager 和 MacKay 的方法。Gallager 构造了一种  $(n, p, q)$  码的二进制矩阵<sup>[1]</sup>, 列重  $p$ , 行重  $q$ ,  $p \geq 3$ ,  $q > p$ ,  $p, q$  为较小的整数,  $n$  是码字的字长。该矩阵按行划分为  $j$  个子矩阵, 每个子矩阵中每列只有一个 1。只确定第一个子矩阵中 1 的位置, 其他  $j-1$  个子矩阵的列是第一个子矩阵的列的等概率的随机排列。MacKay 给出了 4 种  $(n, k)$  LDPC 码校验矩阵的构造方法 1A, 2A, 1B, 2B<sup>[4]</sup>,  $k$  是有用信息位的长度,  $m = n - k$ 。1A 矩阵, 选定列重, 随机构造矩阵尽可能使行重一致, 且每两列 1 的位置的重叠不超过 1。2A 矩阵  $(m/2)$  列的重量为 2, 由两个单位矩阵形成, 其他的列为此  $(m/2)$  列的随机排列构成。为保证校验矩阵中无周长的较小的循环, 在 1A, 2A 矩阵中删除一些元素, 得到 1B, 2B 矩阵。

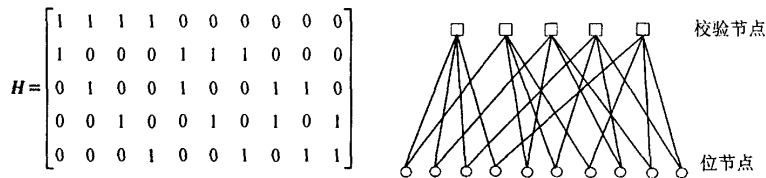


图 1 校验矩阵及其对应的 Tanner 图

本实验中构造的规则 LDPC 码近似 MacKay 的 1A 矩阵, 保证 Tanner 图中没有周长为 4 的小循环。

## 3 LDPC 码的译码

### 3.1 因子图与和乘积算法

因子图是一种双向图, 有校验节点和变量节点两类节点<sup>[2]</sup>。如果一个具有多个变量的函

数可以分解为几个因式的乘积，则可用因子图表示这种因式分解关系，如函数  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2, x_3) \cdot f_2(x_3, x_4)$  的因子图如图 2 所示。

在和积算法中，消息沿着边在节点之间传播和更新，如图 3 所示，消息的更新按下式进行：

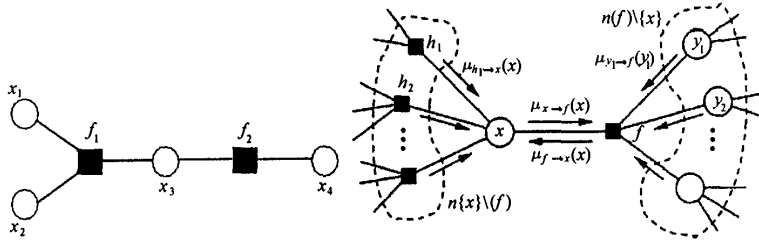


图 2 因子图举例

图 3 和积算法图示

变量节点到函数节点

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x) \tag{1}$$

函数节点到变量节点

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left[ f(X) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right] \tag{2}$$

式中  $\mu_{x \rightarrow f}(x)$  表示从节点  $x$  传向节点  $f$  的消息， $\mu_{f \rightarrow x}(x)$  表示从节点  $f$  传向节点  $x$  的消息， $n(v)$  表示与节点  $v$  相邻的节点的集合， $f(x)$  表示节点  $f$  处的因子式。和积算法表明，沿着边  $e$  从某节点  $v$  传送的消息，等于  $v$  处的因子式（如是位节点，因子式是 1）与从除  $e$  外的其他边传来的消息的乘积，再对与  $e$  相邻的所有变量节点求和。由于只有求和与乘积运算，简称为和积算法，而 LDPC 码的译码可以归结为一种和积算法。

### 3.2 AWGN 信道下概率域的 LDPC 码的译码

根据校验矩阵，确定了 Tanner 图，则 LDPC 码的译码可通过节点之间消息的传递进行。如采用概率域消息，有关符号说明如下： $r_{ji}(b)$  ( $b = 0, 1$ ) 表示校验节点  $j$  传给位节点  $i$  的外部概率信息，即在给定  $c_i = b$  及其它位节点具有独立概率分布条件下，校验方程  $j$  满足的概率； $q_{ij}(b)$  表示位节点  $i$  传给校验节点  $j$  的外部概率信息，即在得到所有校验节点和信道的外部信息后，判断信息位  $c_i = b$  的概率； $C(i)$  表示与位节点  $i$  相连的校验节点的集合， $R(j)$  表示与校验节点  $j$  相连的位节点的集合； $C(i) \setminus j$  表示除  $j$  外与位节点  $i$  相连的校验节点的集合， $R(j) \setminus i$  表示除  $i$  外与校验节点  $j$  相连的位节点的集合。

在 AWGN 信道下，采用 BPSK 调制方式，二进制位 0, 1 分别映射为 +1, -1，通过信道接收  $y_i = x_i + n_i$ ， $n_i$  是 Gauss 分布、功率谱密度  $\sigma^2$  的白噪声，信道的转移概率密度函数为

$$p(y_i|x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[ -\frac{(y_i - x_i)^2}{2\sigma^2} \right] \tag{3}$$

具体译码步骤如下：

(1) 对所有位节点和校验节点初始化

$$\left. \begin{aligned} q_{ij}(0) &= 1 - P_i = \Pr(x_i = 1|y_i) = \frac{e^{2y_i/\sigma^2}}{1 + e^{2y_i/\sigma^2}} \\ q_{ij}(1) &= P_i = \Pr(x_i = -1|y_i) = \frac{1}{1 + e^{2y_i/\sigma^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(2) 所有位节点和校验节点消息的更新

校验节点传给位节点的消息的更新

$$r_{ji}(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{i' \in R_j \setminus i} [1 - 2q_{i'j}(1)], \quad r_{ji}(1) = 1 - r_{ji}(0) \quad (5)$$

位节点传给校验节点的消息的更新

$$q_{ij}(0) = K_{ij}(1 - P_i) \prod_{j' \in C_i \setminus j} r_{j'i}(0), \quad q_{ij}(1) = K_{ij}P_i \prod_{j' \in C_i \setminus j} r_{j'i}(1) \quad (6)$$

$K_{ij}$  是归一化因子, 使得  $q_{ij}(0) + q_{ij}(1) = 1$ .

(3) 对所有位节点计算  $c_i = 0$  和  $c_i = 1$  的概率, 并判断此位节点是 0 还是 1

$$Q_i(0) = K_i(1 - P_i) \prod_{j \in C_i} r_{ji}(0), \quad Q_i(1) = K_iP_i \prod_{j \in C_i} r_{ji}(1) \quad (7)$$

$K_i$  是归一化因子, 使得  $Q_i(0) + Q_i(1) = 1$ . 如  $Q_i(0) > 0.5$ , 则此位节点为 0; 否则为 1.

(4) 如所有位节点的值满足校验方程, 或到达最大的迭代次数, 程序结束; 否则转向 (2), 继续迭代.

### 3.3 AWGN 信道下 LOG 概率域的 LDPC 码的译码

如果采用概率的对数似然比参数作为节点之间传递的消息, 可以将乘法运算转变为加法运算, 简化运算.

$$L(c_i) = \ln \frac{\Pr\{x_i = 1|y_i\}}{\Pr\{x_i = -1|y_i\}}, \quad L(r_{ji}) = \ln \frac{r_{ji}(0)}{r_{ji}(1)}, \quad L(q_{ij}) = \ln \frac{q_{ij}(0)}{q_{ij}(1)}, \quad L(Q_i) = \ln \frac{Q_i(0)}{Q_i(1)} \quad (8)$$

(1) 对所有位节点和校验节点初始化

$$L(q_{ij}) = L(c_i) = 2y/\sigma^2 \quad (9)$$

(2) 所有位节点和校验节点消息的更新

校验节点传给位节点的消息的更新

$$L(r_{ji}) = \left[ \prod_{i' \in R_j \setminus i} \alpha_{i'j} \right] \varphi \left[ \prod_{i' \in R_j \setminus i} \varphi(\beta_{i'j}) \right] \quad (10)$$

其中

$$\alpha_{ij} = \text{sgn}(L(q_{ij})), \quad \beta_{ij} = |L(q_{ij})|, \quad \varphi(x) = \log \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad (11)$$

位节点传给校验节点的消息的更新

$$L(q_{ij}) = L(c_i) + \prod_{j' \in C_i \setminus j} L(r_{j'i}) \tag{12}$$

(3) 对所有位节点计算其是 0 和 1 的概率的对数似然比参数，并判断此位节点是 0 还是 1

$$L(Q_i) = L(c_i) + \prod_{j \in C_i} L(r_{ji}) \tag{13}$$

如  $L(Q_i) > 0$ ，则此位节点为 0；否则为 1。

(4) 如果所有位节点的值满足校验方程，或到达最大的迭代次数，程序结束；否则转向 (2)，继续迭代。

### 3.4 平坦 Rayleigh 衰落信道下 LDPC 码的译码

在平坦衰落信道下，采用 BPSK 调制方式，二进制位 0, 1 分别映射为 +1、-1，通过信道接收到  $y_i = ax_i + n_i$ ， $n_i$  是 Gauss 分布、功率谱密度  $\sigma^2$  的白噪声，而  $a$  是均方值归一化的 Rayleigh 分布的随机变量，其概率密度函数为  $p(a) = 2ae^{-a^2}$ ， $a \geq 0$ ，则信道的转移概率密度函数为

$$p(y_i|x_i, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_i - ax_i)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{14}$$

$a$  的特性称为信道的状态信息 (State Information, SI)。在得到 SI 的情况下，LOG 概率域 LDPC 译码的初始化为  $L(q_{ij}) = L(c_i) = 2ya/\sigma^2$ ；在无 SI 时，近似初始化为  $L(q_{ij}) = L(c_i) = 2yE[a]/\sigma^2$ ，其中  $E[a] = 0.8862$ ，以下的译码步骤与 AWGN 信道中相同。

## 4 LDPC 码在图像传输中的应用

多媒体图像的高可靠性传输是下一代移动通信的目标，而移动衰落信道环境恶劣，长突发错误的产生降低了图像传输的质量，因此有必要采用信道编码方案对图像数据进行冗余保护。LDPC 码是一种性能卓越的信道编码，我们研究了在 Rayleigh 衰落信道下 LDPC 码作为信道编码的图像传输系统。

图 4 是仿真采用的系统模型，图像信源采用未压缩的标准 Lenna 灰度图像，调制方式为 BPSK，LDPC 码内在的交织特性使系统不需要交织器，复杂度大大降低，而性能只有很少的损失 [7]。



图 4 仿真系统框图

### 4.1 仿真结果和分析

实验中我们构造了 3 种规则的 LDPC 码，码参数在表 1 中给出，其中  $H: (K, N)$  的  $K$  为校验矩阵的行数 (对应码中校验位的个数)， $N$  为校验矩阵的列数 (对应码的长度)， $R$  为码率， $p$  为列重， $q$  为行重，并设定译码的最大迭代次数为 500 次。

峰峰信噪比 (PSNR) 是衡量图像质量的一个重要参数，对每一种码，我们计算了在不同输入信噪比 (SNR)  $E_b/N_0$  下恢复图像的 PSNR 的数值，分别在表 2，表 3，表 4 中给出，可见随

着 SNR 值的微小增加, PSNR 值有较大提高. 在平均迭代次数为 6.3, 9.1, 10.9 时, 3 种 LDPC 码分别在 6.2 dB, 5.5 dB, 4.5 dB 下可将图像恢复至很好的效果, 如图 5 所示. 图像信源数据在不同 SNR 值时的误比特率在图 6 给出, 当 SNR 小于 3 dB 时, 3 种码的性能差别不大, 随着 SNR 的增加, 低码率的码 3 的优势表现明显. 码 3 在 SNR 为 4 dB 时误比特率可达到  $10^{-3}$ , 比码 2 和码 1 大约有 0.9 dB 和 1.3 dB 的增益. 尽管码长和码率的不同会带来性能上的差异, 但是它们均能够在较低信噪比下得到低的误比特率, 码 2 在误比特率为  $10^{-4}$  时比未编码的 BPSK 图像传输有大约 28 dB 的增益.

表 1 LDPC 码的参数

	$H: (K, N)$	$R$	$p$	$q$
码 1	(512,1024)	1/2	3	6
码 2	(1024,2048)	1/2	3	6
码 3	(1536,2048)	1/4	3	4

表 2 码 1 的 PSNR 数值

$E_b/N_0$	4.5	5	5.5	6
PSNR	23.1753	30.4261	39.0656	44.2391

表 3 码 2 的 PSNR 数值

$E_b/N_0$	4	4.5	5	5.4
PSNR	18.8841	25.3526	37.1738	42.5335

表 4 码 3 的 PSNR 数值

$E_b/N_0$	3	3.5	4	4.4
PSNR	17.1956	24.4784	34.6660	43.3157



(a) 码 1 4.5dB (b) 码 1 5.5dB (c) 码 2 4.5dB (d) 码 2 5.5dB (e) 码 3 4.5dB

图 5 采用 3 种 LDPC 码纠错后的恢复图像

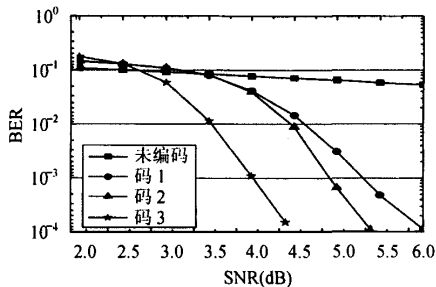


图 6 3 种 LDPC 码在 Rayleigh 衰落信道下的误比特率性能

## 4.2 结论

仿真结果表明: (1) LDPC 码不仅在 AWGN 信道下有很好的纠错性能, 在 Rayleigh 信道下同样可以对数据起到很好的保护作用; (2) LDPC 码对于 Rayleigh 衰落信道下图像传输有很好的纠错性能, 能在低信噪比下获得高的峰峰值和低的误比特率. 当采用码长为 2048, 码率为 1/2 的规则码时, 误比特率为  $10^{-4}$ , 比未编码的 BPSK 方案可得到大约 28 dB 的增益; (3) 由于 LDPC 码内在的交织特性和采用迭代概率译码算法, 系统设计的复杂度和译码时延比其他编码方案有较大降低, 建议在实时性要求较高的传输系统中采用 LDPC 码进行信道纠错.

## 5 结束语

LDPC 码在具有好的性能的同时实现的复杂度低, 是一种性能卓越的纠错编码方案, 在未来的通信系统特别是移动多媒体通信系统中具有极大的应用前景. 本文初步研究了规则 LDPC 码在移动平坦衰落信道下图像传输中的应用, 发现 LDPC 码对图像数据具有很强的保护能力. LDPC 码在图像传输中的应用, 包括处在更复杂的信道环境下、采用更高效的调制方式、根据信道特性和图像信号的特点设计相应的 LDPC 码以及改用性能更好的非规则 LDPC 码等方面, 还有待于在后续工作中展开.

## 参 考 文 献

- [1] Gallager G R. Low-density parity-check codes. *IRE Trans. on Info. Theory*, 1962, 8(1): 21-28.
- [2] McEliece R J, MacKay D J C, Cheng Jung-Fu. Turbo decoding as an instance of Pearl's belief propagation algorithm. *IEEE J. on Selected Areas in Communications*, 1998, 16(2): 140-152.
- [3] Kschischang F R, Frey B J, Loeliger H. Factor graphs and the sum-product algorithm. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 498-519.
- [4] MacKay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1999, 45(3): 399-431.
- [5] Luby M G, Mitzenmacher M, Shokrollahi M A, Spielman D A. Efficient erasure correcting codes. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 569-584.
- [6] Richardson T J, Urbanke R L. The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 599-618.
- [7] Hou Ji-lei, Siegel P H, Milstein L B. Performance analysis and code optimization of low density parity-check codes on Rayleigh fading channels. *IEEE J. on Selected Areas in Communications*, 2001, 19(5), 924-934.
- [8] Lu Ben, Wang Xiao-dong, Narayanan K R. LDPC-based space-time coded OFDM systems over correlated fading channels: performance analysis and receiver design. *IEEE Trans. on Communications*, 2002, 50(1): 74-88.

马丕明: 女, 1970 年生, 讲师, 博士生, 研究方向: 数字移动通信编码理论与技术、通信信号处理、低密度校验码的编译码等.

袁东风: 男, 1958 年生, 工学博士, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 中国通信学会、中国电子学会高级会员, 已在多种国家级学术刊物及 IEEE 组织的国际会议上发表论文 190 余篇, 其中 82 篇论文被 SCI、EI、ISTP 收入. 主要研究方向: 信息理论与技术、移动衰落信道的纠错编码、编码调制结合抗干扰技术、多输入多输出系统、时空编码调制技术、Turbo-Code、LDPC code 及迭代译码、正交频分复用等.

杨秀梅: 女, 1979 年生, 硕士生, 研究方向: 数字移动通信编码理论与技术、低密度校验码的编译码等.