

# 用谱域导抗法计算各向异性媒质加载鳍线的特性

寻培珏 吴信宝

(电子科技大学,成都) (中国电波传播研究所,新乡)

**摘要** 本文通过分析旋性介质中电磁场方程和引入傅里叶变换和坐标变换,推导得到旋电介质和旋磁介质中 TE 模和 TM 模的特性导纳,从而将谱域导抗法的分析范围扩展到旋性介质加载的鳍线结构,并得到了铁氧体加载单侧鳍线正、反向传播常数的数值解。本文的数值计算结果,对设计鳍线铁氧体器件具有参考价值。

**关键词** 鳍线;谱域导抗法;旋电介质;旋磁介质;铁氧体

## 一、引言

自 1973 年 Meier<sup>[1]</sup> 提出鳍线以来,由于它具有单模频带宽,低色散,损耗比微带小和易于与其它元件集成等优点,所以在毫米波集成电路的应用领域已引起了人们的普遍关注。Itoh 等人<sup>[2]</sup>使用谱域法对单侧鳍线进行了分析;Espes 等人<sup>[3]</sup>使用谱域法分析了波导不对称鳍线结构,并指出了它在空间技术中的应用前景;徐善驾<sup>[4]</sup>用有限元法计算了单侧鳍线的色散特性,并给出了考虑鳍金属厚度时色散特性的修正曲线;吴万春等人<sup>[5]</sup>提出用边界元法来分析鳍线的特性;Sharma<sup>[6]</sup>则用经验公式来设计鳍线。通过比较,我们认为在分析鳍线的各种精确方法中<sup>[7]</sup>,谱域法是最有效的方法之一。但是,这种方法的最大缺点是特征方程的推导过程比较复杂,尤其是当介质的层数增多时,复杂程度将大大增加。1979 年 Itoh<sup>[8]</sup>提出了谱域导抗法,简化了特征方程的推导过程。

## 二、谱域导抗法

具有介质基片加载的平面毫米波集成电路,其电磁波由 TM 模和 TE 模叠加而成。其  $E_y$  分量的傅里叶变换为

$$\tilde{E}_y(\alpha, y) \exp(-j\beta z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, y) \exp(j\alpha x - j\beta z) dx \quad (1)$$

反变换为

$$E_y(x, y) \exp(-j\beta z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(\alpha, y) \exp[-j(\alpha x + \beta z)] d\alpha \quad (2)$$

由(2)式可以看出, 在空域中沿  $z$  方向传输的  $E_y$  场分量, 映射到谱域中是一组沿与  $z$  轴构成  $\theta$  夹角方向传播的非均匀平面波的叠加:

$$\theta = \text{Arccos}(\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \quad (3)$$

为方便起见, 我们建立如图 1 所示的新坐标系  $(y, u, v)$ , 它与  $(x, y, z)$  坐标系之间的关系为

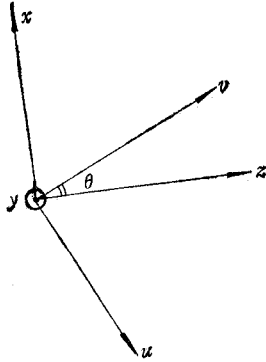


图 1 坐标变换

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $v$  是波的传输方向,  $y-u$  是与  $v$  垂直的平面。

对于每一个  $\theta$  角的非均匀平面波, 都可以将其分解为  $\text{TM}^y$  模  $(\tilde{E}_y, \tilde{H}_u, \tilde{E}_v)$  和  $\text{TE}^y$  模  $(\tilde{H}_y, \tilde{E}_u, \tilde{H}_v)$ 。它们的波导纳分别为

$$Y_{\text{TM}^i} = \tilde{H}_u / \tilde{E}_v = j\omega\epsilon_0\epsilon_{ri} / \gamma_i \quad (5)$$

$$Y_{\text{TE}^i} = -\tilde{H}_v / \tilde{E}_u = \gamma_i / (j\omega\mu_0) \quad (6)$$

式中

$$\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \mu_0\epsilon_0\epsilon_{ri}\omega^2} \quad (7)$$

而  $i$  是各不同介质区域的标号。

然后, 分别画出  $\text{TM}^y$  模和  $\text{TE}^y$  模的等效传输线电路, 并利用(4)式的坐标变换和 Galerkin 方法, 通过选择适当的基函数, 再经过数值计算, 就能求得具体鳍线结构的色散特性<sup>[9]</sup>。

### 三、旋电介质的波导纳

在实际的鳍线结构中, 所使用的旋电介质是单轴各向异性电介质, 主光轴与  $y$  轴平行, 其介电常数矩阵表示为

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

其麦克斯韦方程式变成

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mu_0\mathbf{H} = 0 \quad (10)$$

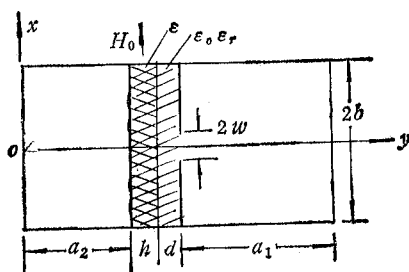
$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\bar{\epsilon}\mathbf{E} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \bar{\epsilon}\mathbf{E} = 0 \quad (12)$$

将(9)–(12)式在直角坐标系中展成分量形式, 通过适当运算, 得到下列两个关于  $E_y$  和  $H_y$  的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_y E_y = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_x H_y = 0 \quad (14)$$

图 2 旋电介质加载鳍线的横截面图(图中心  $o$  应为  $\delta$ )

如图 2 所示,如果在(13)式中引入下述傅里叶变换

$$\tilde{E}_y(\alpha, y) = \int_{-b}^b E_y(x, y) e^{j\alpha x} dx \quad (15)$$

并考虑因子  $e^{j(\omega t - \beta z)}$ , 则(13)式变成

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} - \frac{\epsilon_t}{\epsilon_y} (\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2 \epsilon_y) \right] \tilde{E}_y(\alpha, y) = 0 \quad (16)$$

式中

$$\alpha = \begin{cases} 2n\pi/(2b), & n = 0, 1, 2, \dots, E_z \text{ 是奇模} \\ (2n-1)\pi/(2b), & n = 1, 2, 3, \dots, E_z \text{ 是偶模} \end{cases} \quad (17)$$

同理,(14)式变成

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2 \epsilon_t) \right] \tilde{H}_y(\alpha, y) = 0 \quad (18)$$

由(16)和(18)式, 我们就能求得谱域中的 TM 模 ( $\tilde{H}_y = 0$ ) 和 TE 模 ( $\tilde{E}_y = 0$ ) 在  $y$  方向的传播常数分别为

$$\gamma_{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\epsilon_t}{\epsilon_y} (\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2 \epsilon_y)} \quad (19)$$

$$\gamma_{\text{TE}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2 \epsilon_t} \quad (20)$$

因此求得旋电介质的波导纳

$$Y_{\text{TM}} = j\omega\epsilon_0\epsilon_t/\gamma_{\text{TM}} \quad (21)$$

$$Y_{\text{TE}} = \gamma_{\text{TE}}/(j\omega\mu_0) \quad (22)$$

这样, 在使用谱域导抗法分析具有旋电介质加载的鳍线结构时, 就可以直接使用(21)和(22)式的波导纳表达形式。如令  $\epsilon_t = \epsilon_y = \epsilon_r$ , 即各向同性介质加载的情形, 则(21)和(22)式就自动变成了(5)和(6)式, 这说明各向同性介质的波导纳是旋电介质波导纳的特殊情况。Shalaby 等人<sup>[11]</sup>使用谱域导抗法分析了蓝宝石 ( $\epsilon_t = 9.4, \epsilon_y = 11.6$ ), 氮化硼 ( $\epsilon_t = 5.12, \epsilon_y = 3.4$ ) 和 Epsilam-10 ( $\epsilon_t = 13, \epsilon_y = 10.2$ ) 等旋电介质加载单侧鳍线结构, 并给出了数值计算结果。

#### 四、旋磁介质的波导纳

如果将图 2 中的旋电介质用铁氧体代替, 并在  $x$  方向施加外磁场  $H_0$ , 则介质的磁导

率具有张量形式

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -j\mu_a \\ 0 & j\mu_a & \mu \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中

$$\mu = \mu_0 [1 + \omega_c \omega_m / (\omega_c^2 - \omega^2)] \quad (24)$$

$$\mu_a = \mu_0 \omega \omega_m / (\omega_c^2 - \omega^2) \quad (25)$$

$$\omega_c = \gamma H_0, \quad \omega_m = \gamma M_0 \quad (26)$$

此处  $\gamma$  是旋磁比。当  $\omega_m = 0$ ，即无外磁场时， $\bar{\mu}$  变成标量  $\mu_0$ 。

通过与第三节类似的推导，得到下列两个将  $E_x$  和  $H_x$  联系在一起的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F \mu_{\perp} E_x = \frac{\omega \mu_0 \mu_a}{\mu} \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (27)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_F H_x = - \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_F \mu_a}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (28)$$

式中

$$\mu_{\perp} = \mu - \mu_a^2 / \mu \quad (29)$$

其中  $\epsilon_F$  是铁氧体材料的相对介电常数。由(27)和(28)式，得

$$L_f(E_x) = 0 \quad (30)$$

$$L_f(H_x) = 0 \quad (31)$$

式中， $L_f$  是四阶微分算子，其表达式为

$$\begin{aligned} L_f = & \nabla_{ir}^4 + \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left(1 + \frac{\mu_0}{\mu}\right) \nabla_{ir}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F (\mu_0 + \mu_{\perp}) \nabla_{ir}^2 \\ & + 2\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_F \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^4 \mu_0 \epsilon_0^2 \epsilon_F^2 \mu_{\perp} \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\nabla_{ir}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2$$

如果在(30)和(31)式中分别引入下述傅里叶变换

$$\tilde{E}_x(\alpha, y) = \int_{-b}^b E_x(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (33)$$

$$\tilde{H}_x(\alpha, y) = \int_{-b}^b H_x(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (34)$$

并考虑因子  $e^{j(\omega t - \beta z)}$ ，则(32)式的四阶微分算子在谱域中变成了两个二阶微分算子的乘积，即

$$\tilde{L}_f = (\nabla_{ir}^2 + f_1^2)(\nabla_{ir}^2 + f_2^2) \quad (35)$$

其中  $f_1$  和  $f_2$  是四次方程式

$$f^4 - pf^2 + q = 0 \quad (36)$$

的根。式中

$$p = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F (\mu_0 + \mu_{\perp}) - \alpha^2 (1 + \mu_0 / \mu) \quad (37)$$

$$q = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_F (\omega^4 \epsilon_0 \epsilon_F \mu_{\perp} - 2\omega^2 \alpha^2 + \alpha^4 / (\mu \epsilon_0 \epsilon_F)) \quad (38)$$

解得(36)式的两个根为

$$f_{1,2}^2 = [\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F (\mu_0 + \mu_{\perp}) - (1 + \mu_0 / \mu) \alpha^2] / 2 \pm Q \quad (39)$$

式中

$$Q = \sqrt{[\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F (\mu_{\perp} - \mu_0) - (1 - \mu_0 / \mu) \alpha^2]^2 / 4 + \alpha^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_F \mu_a^2 / \mu^2} \quad (40)$$

由(35)式可知,  $\tilde{E}_x(\alpha, y, z)$  满足方程

$$\nabla_{y,z}^2 \tilde{E}_x + f_{1,2} \tilde{E}_x = 0 \quad (41)$$

设

$$\tilde{E}_x(\alpha, y, z) = \tilde{e}_x(\alpha, y) e^{-i\beta z} \quad (42)$$

由此解得

$$\gamma_F = \sqrt{\beta^2 - f_{1,2}} \quad (43)$$

$$\tilde{E}_x = A \sinh \gamma_F y + B \cosh \gamma_F y \quad (44)$$

其中  $A, B$  是任意常数。

使用旋磁介质中麦克斯韦方程的直角坐标分量形式, 还可以求出谱域中的其它场分量, 诸如  $\tilde{E}_y, \tilde{H}_x$  和  $\tilde{H}_z$ , 由此得

$$\tilde{E}_y = \tilde{E}_x \sin \theta - \tilde{E}_z \cos \theta = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tilde{E}_x / \beta \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y &= \tilde{H}_x \cos \theta + \tilde{H}_z \sin \theta \\ &= \frac{[\alpha^2(\mu^2 - \mu_a^2) + \mu_0 \mu \beta^2] \gamma_F + \beta \mu_0 \mu_a (\alpha^2 + \beta^2)}{j\omega \mu_0 \beta (\mu^2 - \mu_a^2) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \tilde{E}_x \end{aligned} \quad (46)$$

由(45)和(46)式, 求得  $\text{TE}^y$  模的波导纳为

$$Y_{\text{TE}} = -\frac{\tilde{H}_y}{\tilde{E}_x} = \frac{\alpha^2(\mu^2 - \mu_a^2) + \mu_0 \mu \beta^2}{j\omega \mu_0 (\mu^2 - \mu_a^2) (\alpha^2 + \beta^2)} \gamma_F + \frac{\mu_a \beta}{j\omega (\mu^2 - \mu_a^2)} \quad (47)$$

同理, 可求得  $\text{TM}^y$  模的波导纳为

$$Y_{\text{TM}} = \tilde{H}_y / \tilde{E}_y = j\omega \epsilon_0 \epsilon_F / \gamma_F \quad (48)$$

式中

$$\begin{aligned} \gamma_F^2 &= \beta^2 - [\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F (\mu_0 + \mu_{\perp}) - (1 + \mu_0 / \mu) \alpha^2] / 2 \\ &\pm \sqrt{[\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_F (\mu_0 - \mu_{\perp}) - (1 - \mu_0 / \mu) \alpha^2]^2 / 4 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_F \alpha^2 \mu_a^2 / \mu^2} \end{aligned} \quad (49)$$

设  $\mu_a = 0, \mu = \mu_0$ , 即各向同性介质情形, (48)、(47)和(49)式就分别变成(5)、(6)和(7)式。

至此, 就求得了旋电介质和旋磁介质的波导纳。实际上就是将最初提出来仅可以分析各向同性介质加载平面传输线结构的谱域导抗法, 推广到旋电介质和旋磁介质加载的应用领域。从上面的分析还可以看出, 用谱域导抗法分析介质加载的平面传输线结构, 主要的区别在于介质的波导纳形式。介质不同, 波导纳的表达式也就不同。

## 五、数值计算结果

待分析的铁氧体加载单侧鳍线的横截面图示于图2, 其对应的  $\text{TM}^y$  模和  $\text{TE}^y$  模的

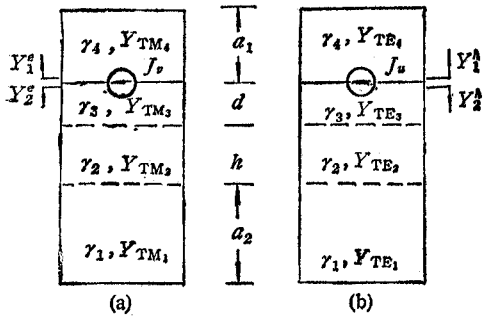


图3 TM<sup>y</sup> 模(a)和 TE<sup>y</sup> 模(b)的等效传输线

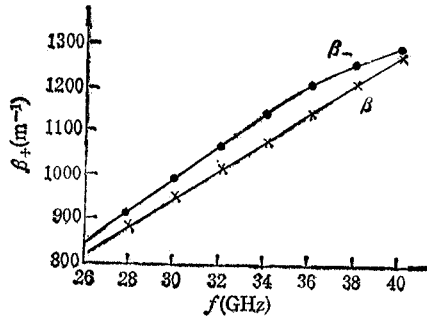


图4 数值计算结果

等效传输线如图3所示。在 \$y\_0 = a\_2 + h + d\$ 平面，电流密度和电场强度之间的关系为

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_u(\alpha, y_0) \\ \tilde{J}_v(\alpha, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{||}^h & 0 \\ 0 & Y_{||}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_u(\alpha, y_0) \\ \tilde{E}_v(\alpha, y_0) \end{bmatrix} \quad (50)$$

式中

$$Y_{||}^e = Y_1^e + Y_2^e \quad (51)$$

$$Y_1^e = Y_{TM_4} \coth(\gamma_4 a_1) \quad (52a)$$

$$Y_2^e = Y_{TM_3} [Y_{TM_3} + Y_3^e \coth(\gamma_3 d)] / [Y_3^e + Y_{TM_3} \coth(\gamma_3 d)] \quad (52b)$$

$$Y_3^e = Y_{TM_2} [Y_{TM_2} + Y_4^e \coth(\gamma_2 h)] / [Y_4^e + Y_{TM_2} \coth(\gamma_2 h)] \quad (52c)$$

$$Y_4^e = Y_{TM_1} \coth(\gamma_1 a_2) \quad (52d)$$

只要在式(52)中用 \$Y\_{TE\_i}\$ 代替 \$Y\_{TM\_i}\$，就能求得 \$Y\_{||}^h\$ 的表达式。

在鳍线的槽口处，令

$$\tilde{E}_x(\alpha) = \sum_{i=1}^M c_i \xi_i(\alpha) \quad (53)$$

$$\tilde{E}_z(\alpha) = \sum_{l=1}^N d_l \eta_l(\alpha) \quad (54)$$

应用 Galerkin 法和 Parseval 定理，求得关于待定常数 \$c\_i\$ 和 \$d\_l\$ 的齐次方程组：

$$\sum_{i=1}^M K_{pi}^{11} c_i + \sum_{l=1}^N K_{pl}^{12} d_l = 0, \quad p = 1, 2, \dots, M \quad (55)$$

$$\sum_{i=1}^M K_{qi}^{21} c_i + \sum_{l=1}^N K_{ql}^{22} d_l = 0, \quad q = 1, 2, \dots, N \quad (56)$$

式中，\$K\_{pi}^{11}\$、\$K\_{pl}^{12}\$、\$K\_{qi}^{21}\$ 和 \$K\_{ql}^{22}\$ 的意义请参看文献[7]。通过选择适当的基函数 \$\xi\_i(\alpha)\$ 和 \$\eta\_l(\alpha)\$<sup>[12,15]</sup>，就能由(55)、(56)式求得铁氧体加载鳍线正、反向传播常数的数值解。(52)式中的 \$Y\_{TM\_i}\$ 由(48)式给出，\$Y\_{TM\_1}\$、\$Y\_{TM\_3}\$ 和 \$Y\_{TM\_4}\$ 均由(5)式表示，只是 \$\epsilon\_{ri}\$ (\$i = 1, 3, 4\$) 不同。

根据以上分析，我们用 FORTRAN 77 结构化程序设计语言编写程序在 VAX-11/780 小型机上进行了数值计算，并假定导波系统无损耗。

首先，对传播常数 \$\beta\$ 的收敛情况进行了研究，其结果请参看文献[9]。其次，我们还研究了根的个数，由于本文仅限于讨论基模，并没有出现多于一个根的情况。

经过上述研究, 我们得到了传播常数 ( $\beta_{\pm}$ ) 的数值计算结果示于图 4。其数值计算结果与 Geshiro 等人<sup>[14]</sup> 的基本一致。

## 六、结 论

从旋性介质的麦克斯韦方程出发, 通过引入傅里叶变换, 求得了旋电介质和旋磁介质中场分量的电动力学表达式。经过坐标变换, 最终得到了上述两种介质的 TM<sup>y</sup> 模和 TE<sup>y</sup> 模波导纳。这样, 就将谱域导抗法的分析范围扩展到旋电介质或旋磁介质加载的平面传输线结构。最后, 用该方法分析了铁氧体加载单侧鳍线, 并得到了正、反向传播常数的数值计算结果。这些数值计算结果, 对设计鳍线铁氧体器件具有参考价值。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] P. J. Meier, *Electron. Lett.*, 9(1973)7, 162--163.
- [ 2 ] L. P. Schmidt, T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-28**(1980)9, 981—985.
- [ 3 ] P. Espes, et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-37**(1989)2, 289—298.
- [ 4 ] 徐善驾, 应用科学学报, **1**(1983)2, 135—141.
- [ 5 ] 吴万春等, 西北电讯工程学院学报, **11**(1984)3, 1—11.
- [ 6 ] A. K. Sharma, et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-31**(1983)4, 350—361.
- [ 7 ] B. Bath, S. K. Koul, *Analysis, Design and Applications of Fin-Lines*, Artech House, Inc., (1987).
- [ 8 ] T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-28**(1980)7, 733—736.
- [ 9 ] 寻培珏, 电子科技大学学报, **18**(1989)2, 205—211.
- [ 10 ] A. G. Gurevich, *Ferrites at Microwave Frequencies*, New York, Consultants Bureau, (1963).
- [ 11 ] A. -A. T. K. Shalaby, et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35**(1987)4, 448—450.
- [ 12 ] P. J. Xun (寻培珏), The Propagation constants of Unilateral Finlines with Magnetized Ferrite Substrate, Proc. Second Asia-Pacific Microwave Conf., Beijing, (1988), 139—140.
- [ 13 ] P. J. Xun, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-37**(1989)10, 1647—1650.
- [ 14 ] M. Geshiro, T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35**(1987)12, 1377—1381.

# A SPECTRAL-DOMAIN IMMITTANCE APPROACH FOR THE CHARACTERISTICS OF FINLINES LOADED WITH ANISOTROPIC MEDIUM

Xun Peijue

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu)

Wu Xinbao

(China Research Institute of Radiowave Propagation, Xinxiang)

**Abstract** The equations of electrodynamics for a gyrotropic medium by using Maxwell's equations are deduced. Through Fourier transformation, the admittances of TM and TE modes in the electrically gyrotropic substrate and the magnetically gyrotropic substrate are given. Numerical results of the dominant mode in magnetized ferrite-loaded double-layered finlines are presented which could be used in designing finline ferrite devices.

**Key words** Finlines; Spectral-domain immittance approach; Electrically gyrotropic medium; Magnetically gyrotropic medium; Ferrite