

## 频域 Mur 条件差分近似的构造和应用<sup>1</sup>

陈 军 洪 伟 陈忆元

(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

**摘 要** 本文构造了 Mur 条件的频域有限差分近似。结合推导的非均匀、各向异性媒质中有限差分方程,可以有效、方便地计算电大尺寸复杂媒质体的电磁散射问题。运用稀疏矩阵压缩存储技术和迭代求解算法,大大减少了所占用的计算机内存,与矩量法相比计算时间也大为减少。文中计算了几种媒质情况上圆柱和方柱的雷达散射截面,并与已有数据作了比较,结果一致性较好。

**关键词** 差分近似, Mur 条件, 电磁散射, 有限差分法, 矩量法, 雷达散射截面

**中图分类号** O441

### 1 引 言

有限差分法是最早用来进行电磁场数值计算的方法。用有限差分法分析无界域问题时主要难点在于截断边界条件的确定。一些现有的截断边界条件主要有 Merewether<sup>[1]</sup> 以及 Kunz 和 Lee<sup>[2]</sup> 提出的辐射边界条件; Yee<sup>[3]</sup> 以及 Taylok<sup>[4]</sup> 给出的吸收边界条件; Taflove 与 Brodwin<sup>[5]</sup> 提出一种经验性具有物理意义的吸收边界条件。所有这些条件的运用对解决某一类问题确有各自特点,但是每一种边界条件又是对物理概念或某些物理意义的粗略描述,没有严格的数学推导过程。因此无法确定截断边界的确切位置与计算精度的关系,只是通过计算中的经验来不断调整。

为此 G. Mur<sup>[6]</sup> 提出了一种新的吸收边界条件。这一吸收边界条件来源于对波动方程的分解。把有限差分格式引入到分解出的外向波方程中,从而获得有限差分近似下的吸收边界条件。并且根据近似程度的要求可以给出一阶、二阶、甚至二阶以上的差分近似。Mur 条件的各阶近似被广泛应用于时域有限差分法中。不过,在时域中,除一阶近似形式稍微简单外,其它阶数近似形式均较复杂,涉及到三层格式,给编程带来困难。

在频域有限差分法中,无论是差分方程还是边界条件的差分近似都较时域法简单、方便。而且在频域中不必对时间作量化处理,减少了迭代过程同时提高了计算精度。本文首次推导了频域 Mur 条件的有限差分近似。这一近似与推导的非均匀、各向异性媒质下通用的有限差分方程结合,可以计算任意截面形状的均匀或非均匀、各向同性或异性媒质的散射场。文中计算了均匀介质圆柱的雷达散射截面,以便与精确解和矩量法所求结果作比较。文中还计算了其它实例,由于运用了稀疏矩阵压缩存储技术,在相同计算条件下可以计算出大尺寸的散射问题,使软件更具实用性。

1

1994-07-29 收到, 1995-01-03 定稿

### 2 有限差分方程

设非均匀、各向异性媒质的介电常数为位置的函数  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ ，导磁率为并矢

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \xi & j\eta & 0 \\ -j\eta & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mu_0 \quad (1)$$

对于图 1(a) 所示散射体柱，设入射场为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{inc} &= \hat{z} \exp[jk_0(x \cos \theta + y \sin \theta)], & \text{TM 波;} \\ \mathbf{H}^{inc} &= \hat{z} \exp[jk_0(x \cos \theta + y \sin \theta)], & \text{TE 波.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

根据 Maxwell 方程，将各场分量之间关系式列出，注意到  $z$  方向的均匀性，不难证明，入射波为 TM 波 (TE 波) 时散射波仍为 TM 波 (TE 波)，且有下列关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \tilde{k}^2 E_z &= 0, & \tilde{k}^2 &= k^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi}; \\ H_x &= \frac{j\xi}{\omega\mu_0(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\eta}{\omega\mu_0(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial E_z}{\partial x}; \\ H_y &= -\frac{\eta}{\omega\mu_0(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{j\xi}{\omega\mu_0(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \text{TM 波} \quad (3)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 H_z &= 0, & k^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r; \\ E_x &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}; & E_y &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \text{TE 波} \quad (4)$$

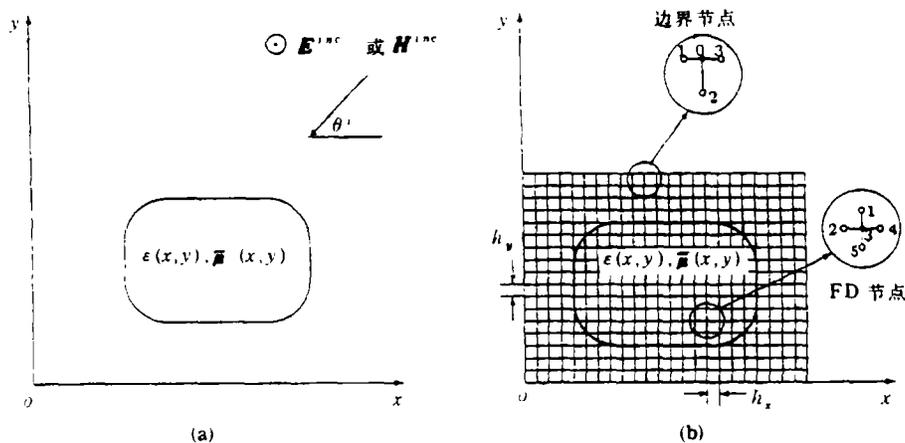


图 1 任意截面柱体及其差分网格

TM 波与 TE 波各自纵向场分量所满足的 Helmholtz 方程形式上相似, 注意到波数的不同, 可将 TE 波视为  $\xi = 1, \eta = 0$  时的一种特例。则以位函数  $\phi(x, y)$  来表示  $E_z$ (TM 波) 或  $H_z$ (TE 波), 如图 1(b) 建立差分网格, 其中  $x, y$  方向步长分别是  $h_x, h_y$ 。设网格化分足够小, 从而可以认为每一网格中媒质参数为常量, 且等于该网格中心位置对应的值。

由 (3) 式出发推导有限差分格式。采用环路积分法, 如图 2(a) 建立五点差分格式, 每一象限中媒质参数不同。图 2(b) 画出了积分路径。四个矩形环路分布在四个象限中, 每个环路边界为  $\partial S_i (i = \overline{1, 4})$  所围面积为  $S_i$ , 小矩形环路相邻边界为  $\Gamma_{ij}$  和  $\Gamma_{ji}$ , 在环路积分中代表相互反向的积分路径。四个环路构成了一个大闭合环。

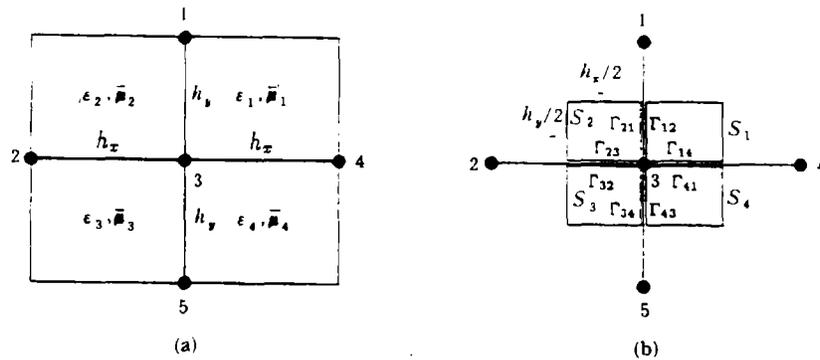


图 2 五点差分格式和环路积分路径

在每个区域  $S_i$  中 (3) 式可写成

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \tilde{k}_i^2 \phi = 0, \quad \text{域 } S_i, i = \overline{1, 4}. \tag{5}$$

在此区域上进行积分有

$$\iint_{S_i} (\nabla^2 \phi + \tilde{k}_i^2 \phi) dS = 0. \tag{6}$$

利用 Gauss 定理有

$$\int_{\partial S_i} \frac{\partial \phi}{\partial n} dl + \tilde{k}_i^2 \iint_{S_i} \phi dS = 0. \tag{7}$$

作差分近似后得到下列方程

$$\tilde{k}_1^2 \frac{h_x h_y}{4} \phi_3 + \frac{h_y}{2h_x} (\phi_4 - \phi_3) + \frac{h_x}{2h_y} (\phi_1 - \phi_3) = - \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial \phi}{\partial n_1} dl - \int_{\Gamma_{14}} \frac{\partial \phi}{\partial n_1} dl, \tag{8}$$

$$\tilde{k}_2^2 \frac{h_x h_y}{4} \phi_3 + \frac{h_y}{2h_x} (\phi_2 - \phi_3) + \frac{h_x}{2h_y} (\phi_1 - \phi_3) = - \int_{\Gamma_{21}} \frac{\partial \phi}{\partial n_2} dl - \int_{\Gamma_{23}} \frac{\partial \phi}{\partial n_2} dl, \tag{9}$$

$$\tilde{k}_3^2 \frac{h_x h_y}{4} \phi_3 + \frac{h_y}{2h_x} (\phi_2 - \phi_3) + \frac{h_x}{2h_y} (\phi_5 - \phi_3) = - \int_{\Gamma_{32}} \frac{\partial \phi}{\partial n_3} dl - \int_{\Gamma_{34}} \frac{\partial \phi}{\partial n_3} dl, \tag{10}$$

$$\tilde{k}_4^2 \frac{h_x h_y}{4} \phi_3 + \frac{h_y}{2h_x} (\phi_4 - \phi_3) + \frac{h_x}{2h_y} (\phi_5 - \phi_3) = - \int_{\Gamma_{43}} \frac{\partial \phi}{\partial n_4} dl - \int_{\Gamma_{41}} \frac{\partial \phi}{\partial n_4} dl. \tag{11}$$

根据边界界面上连续性条件, 在  $\Gamma_{12}$  上  $H_y^{(1)} = H_y^{(2)}$ , 即

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} = j \frac{\eta_2}{\xi_2} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} - j \tau_{21} \frac{\eta_1}{\xi_2} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} + \tau_{21} \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}, \quad (12)$$

在  $\Gamma_{23}$  上  $H_x^{(2)} = H_x^{(3)}$ , 即

$$\frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial y} = -j \frac{\eta_3}{\xi_3} \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial x} + j \tau_{32} \frac{\eta_2}{\xi_3} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} + \tau_{32} \frac{\xi_2}{\xi_3} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y}, \quad (13)$$

同理, 在  $\Gamma_{34}, \Gamma_{41}$  上分别有

$$\frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial x} = j \frac{\eta_4}{\xi_4} \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial y} - j \tau_{43} \frac{\eta_3}{\xi_4} \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial y} + \tau_{43} \frac{\xi_3}{\xi_4} \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} = -j \frac{\eta_1}{\xi_1} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + j \tau_{14} \frac{\eta_4}{\xi_1} \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial x} + \tau_{14} \frac{\xi_4}{\xi_1} \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial y}, \quad (15)$$

其中

$$\bar{k}_i^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i \frac{\xi_i^2 - \eta_i^2}{\xi_i}, \quad \tau_{ij} = \frac{\eta_i^2 - \xi_i^2}{\eta_j^2 - \xi_j^2}. \quad (16)$$

将 (12)~(15) 式代入 (8)~(11) 式, 消去积分项, 得到五点差分方程

$$\sum_{i=1}^5 c_i \phi_i = 0, \quad (17)$$

其中  $c_1 = (\tau_{31}\xi_1 + \tau_{32}\xi_2)h_x/(2h_y) + j\tau_{32}\xi_2\zeta_{21}$ ,  $c_2 = (\tau_{32}\xi_2 + \tau_{33}\xi_3)h_y/(2h_x) + j\tau_{33}\xi_3\zeta_{32}$ ,  
 $c_4 = (\tau_{34}\xi_4 + \tau_{31}\xi_1)h_y/(2h_x) + j\tau_{31}\xi_1\zeta_{14}$ ,  $c_5 = (\tau_{33}\xi_3 + \tau_{34}\xi_4)h_x/(2h_y) + j\tau_{34}\xi_4\zeta_{43}$ ,  
 $c_3 = (h_x h_y/4)(\tau_{31}\xi_1 \bar{k}_1^2 + \tau_{32}\xi_2 \bar{k}_2^2 + \tau_{33}\xi_3 \bar{k}_3^2 + \tau_{34}\xi_4 \bar{k}_4^2) - [h_y/(2h_x) + h_x/(2h_y)](\tau_{31}\xi_1 + \tau_{32}\xi_2 + \tau_{33}\xi_3 + \tau_{34}\xi_4) - j(\tau_{31}\xi_1\zeta_{14} + \tau_{32}\xi_2\zeta_{21} + \tau_{33}\xi_3\zeta_{32} + \tau_{34}\xi_4\zeta_{43})$ , 且  $\zeta_{ij} = (\eta_i - \eta_j \tau_{ij})/(2\xi_i)$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ 。

对 TE 波, 代入  $\xi = 1, \eta = 0$ , 有  $\zeta = 0$ , 则

$$c_1 = (\varepsilon_3/\varepsilon_1 + \varepsilon_3/\varepsilon_2)h_x/(2h_y), \quad c_2 = (\varepsilon_3/\varepsilon_2 + \varepsilon_3/\varepsilon_3)h_y/(2h_x),$$

$$c_4 = (\varepsilon_3/\varepsilon_1 + \varepsilon_3/\varepsilon_4)h_y/(2h_x), \quad c_5 = (\varepsilon_3/\varepsilon_3 + \varepsilon_3/\varepsilon_4)h_x/(2h_y),$$

$c_3 = (h_x h_y/4)[k_1^2(\varepsilon_3/\varepsilon_1) + k_2^2(\varepsilon_3/\varepsilon_2) + k_3^2(\varepsilon_3/\varepsilon_3) + k_4^2(\varepsilon_3/\varepsilon_4)] - [h_y/(2h_x) + h_x/(2h_y)](\varepsilon_3/\varepsilon_1 + \varepsilon_3/\varepsilon_2 + \varepsilon_3/\varepsilon_3 + \varepsilon_3/\varepsilon_4)$ , 式中  $k_i^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ 。

### 3 频域 Mur 条件

非均匀、各向异性媒质柱并不改变散射波的性质。TM 激励时, 散射波为 TM 波; TE 波激励时, 散射波为 TE 波。因此, 散射波纵向场分量满足 Helmholtz 方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \right) \phi(x, y) = 0, \quad (18)$$

式中  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\phi(x, y)$  表示纵向场分量  $E_z$  (TM 波) 或  $H_z$  (TE 波)。

设截断边界在  $x = 0$  平面处 (如图 3)。将 (18) 式写成

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \right) \phi(x, S) = 0, \quad (19)$$

其中

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2} = - \left( 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

不失一般性, 假定 (19) 式的边界条件为

$$\phi(x, S)|_{x=0} = \varphi(S) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi(S) \quad (22)$$

则方程 (19) 的通解为

$$\phi(x, S) = \frac{\varphi(S - k_0 x) + \varphi(S + k_0 x)}{2} + \frac{1}{2k_0} \int_{S - k_0 x}^{S + k_0 x} \psi(\xi) d\xi. \quad (23)$$

不难看出 (23) 式中含有沿  $S$  方向, 波数为  $k_0$  的外向波和内向波。其中外向波在  $x$  轴上沿  $-\hat{x}$  方向穿过  $x = 0$  平面; 内向波在  $x$  轴上沿  $\hat{x}$  方向穿过  $x = 0$  平面, 因此, 可将 (19) 式分解成两部分算子对  $\phi(x, S)$  的作用结果

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - k_0 \frac{\partial}{\partial S} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + k_0 \frac{\partial}{\partial S} \right) \phi(x, S) = 0. \quad (24)$$

而由 (20) 式知

$$\frac{\partial}{\partial S} = j \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}. \quad (25)$$

为模拟外向波在截断边界上被吸收的过程, 取 (24) 式中表示外向波的算子为

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - j \sqrt{k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) \phi(x, y)|_{x=0} = 0. \quad (26)$$

注意到  $\sqrt{k_0^2 + \partial^2/\partial y^2}$  可以展成下列级数<sup>2</sup>

$$\sqrt{k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}} = k_0 + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{8k_0^3} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \dots, \quad (27)$$

<sup>2</sup> 由  $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\phi = -k_0^2\phi$  出发, 视左算子  $L_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , 右算子为  $L_2 = -k_0^2$ , 则  $\|L_1\| = \|L_2\|$ , (其中  $\|\cdot\|$  为范数且  $\|L\| = \|L\phi\|/\|\phi\|$ ) 即  $\|\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\| = \|k_0^2\| = k_0^2$ ; 再由二阶微分算子正实性可得  $\|\partial^2/\partial y^2\| < \|\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\| = k_0^2$ , 故  $\|\partial^2/\partial y^2\| < k_0^2 \rightarrow \|(1/k_0^2)\partial^2/\partial y^2\| < 1$ 。故级数收敛。

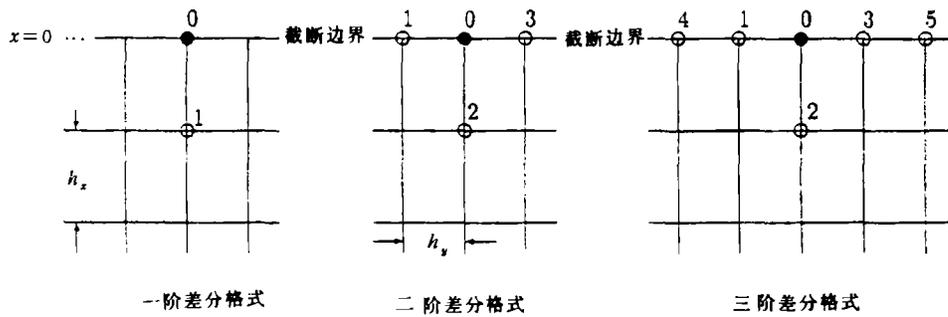


图 3 Mur 条件的差分格式

则 (22) 式取一阶近似方程为

$$(\partial/\partial x - jk_0)\phi|_{x=0} = 0. \tag{28}$$

取二阶近似方程为

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - j \left( k_0 + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \phi \Big|_{x=0} = 0. \tag{29}$$

取三阶近似方程为

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - j \left( k_0 + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{8k_0^3} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \right] \phi \Big|_{x=0} = 0. \tag{30}$$

对 (24) 式可以很容易求得

$$\phi_0 = \phi_1 \exp(-jk_0 h_x). \tag{31}$$

这就是广泛使用的吸收边界条件，是对散射波的一阶近似。从 (25) 式出发，可构造二阶近似。代入二阶差商有

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} - jk_0 \phi \right]_{x=0} = j \frac{1}{2k_0} \frac{\phi_3 - 2\phi_0 + \phi_1}{h_y^2}. \tag{32}$$

视偏导数为全导数可求得

$$\sum_{i=0}^3 c_i \phi_i = 0, \tag{33}$$

其中  $c_0 = 2 \exp(jk_0 h_x) - 2k_0^2 h_y^2 \exp(jk_0 h_x) - 2$ ,  $c_1 = 1 - \exp(jk_0 h_x)$ ,

$c_2 = 2k_0^2 h_y^2$ ,  $c_3 = 1 - \exp(jk_0 h_x)$ 。

若完全以差商代导数解 (25) 式有  $c_0 = 2jh_x - 2jk_0^2 h_x h_y^2 - 2k_0 h_y^2$ ,  $c_1 = -jh_x$ ,  $c_2 = 2k_0 h_y^2$ ,

$c_3 = -jh_x$ 。

不难发现将  $\exp(jk_0 h_x)$  作为二阶近似

$$\exp(jk_0 h_x) \approx 1 + jk_0 h_x. \tag{34}$$

代入 (30)~(33) 式得到  $c_i$  值。说明 (30)~(33) 近似精度更高, 计算中也证明了这一点。

用同样的方法在 (26) 式中代入四阶差商, 求得差分近似为

$$\sum_{i=0}^5 c_i \phi_i = 0, \quad (35)$$

其中  $c_0 = 6 - 6 \exp(jk_0 h_x) + 8k_0^2 h_y^2 - 8k_0^2 h_y^2 \exp(jk_0 h_x) + 8k_0^4 h_y^4 \exp(jk_0 h_x)$ ,

$c_1 = c_3 = 4[1 - \exp(jk_0 h_x)](1 + k_0^2 h_y^2)$ ,  $c_2 = 8k_0^4 h_y^4$ ,  $c_4 = c_5 = e^{jk_0 h_x} - 1$ 。

至此, 我们得到了一到三阶频域 Mur 条件的差分近似。由于 (33) 式较其它近似有简单、准确的特点, 在计算中采用此式。

#### 4 数值计算

利用 (17) 式建立内节点差分方程, 通过 (33) 式建立边界节点差分方程, 可以十分方便地对任意截面的散射体进行计算。

在程序处理中, 采用了压缩存储技术处理稀疏矩阵。对  $N \times N$  单元矩阵只存储其中的约  $5 \times N$  单元非零元素并压缩到一维矩阵中。当  $N$  较大时, 可节省相当可观的内存单元, 从而可用于求解电大尺寸问题。均匀介质柱的 RCS 可由本征级数求和得到精确解, 但这一级数收敛很慢。为便于比较, 本文计算了半径为  $\lambda_0$ ,  $\epsilon_r = 2$ ,  $\mu_r = 1$  时均匀介质圆柱的 RCS, 与精确解、矩量法 (MM) 相比较, 计算结果一致性很好。当截断边界逐渐远离散射体表面, 即  $N_l$  扩大时, 计算结果十分稳定。在此边界条件下, 将截断边界尽可能取得靠近散射体也同样有较好结果 (如图 4 所示)。

基于边界积分方程的矩量法只能分析均匀柱的散射问题, 当  $N_l = 4$  时, 对应  $N \times N = 2025$  阶矩阵, 矩量法用时 300s, 而有限差分法只用 179s, 当  $N_l = 6$  时, 对应  $N \times N = 2601$  阶矩阵, 矩量法需用 436s, 而有限差分法只需 260s。对于非均匀介质柱问题, 采用矩量法必须在整个截面上剖分, 所占内存较边界积分方程基础上的矩量法又大大增加, 且满秩矩阵求逆时间与  $N^3$  成正比; 而非均匀情况下, 有限差分法只需在每个网格中取相应的介质参数即可, 内存和计算时间不变, 稀疏矩阵求逆时间与  $N^2$  成正比, 所以节省了内存和机时。

用平面波测试边界条件 (29) 式的残差。如图 5 所示, 当网格步长减小时, 残差以  $h^3$  速度收敛 ( $h = \max(h_x, h_y)$ ), 这高于其它现有的边界条件收敛速度 ( $O(h^2)$ ), 图中  $\theta$  角为平面波从  $x$  轴起绕边界节点 0 旋转的角度 (入射角)。

本文给出了各种媒质参数组合情况下圆柱体和方柱体的 RCS 实例。图 6 计算了半径为  $\lambda_0$  的圆柱体 RCS, 媒质参数分别为  $\epsilon_r = 2.0$ ,  $\xi = 1.0$ ,  $\eta = 0$  均匀介质;  $\epsilon_r = 2.0$ ,  $\xi = 2.0$ ,  $\eta = 1.5$  的均匀、各向异性介质;  $\epsilon_r = 4.0 - 2.0r$ ,  $\xi = 1.0$ ,  $\eta = 0$  的非均匀、各向同性介质; 和  $\epsilon_r = 4.0 - 2.0r$ ,  $\xi = 2.0$ ,  $\eta = 1.5$  的非均匀、各向异性介质 (其中  $r$  为半径,  $0 < r < 1$ ) 时 RCS 的变化曲线。

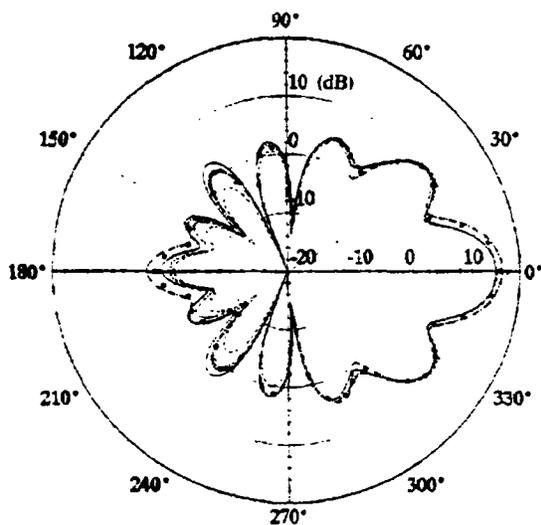


图4 介质圆柱 RCS 的计算比较  
 ---MM, .....  $N_l = 4$ , - -  $N_l = 6$ , \*  $N_l = 9$ , \* 精确解

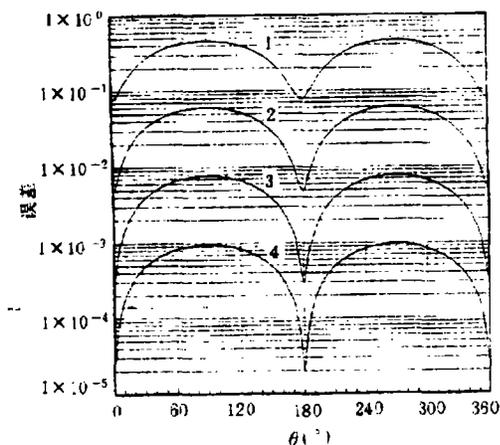


图5 平面波测试边界条件的残差计算  
 1  $h_x = 0.1000, h_y = 0.1000$ ,  
 2  $h_x = 0.0500, h_y = 0.0500$ ,  
 3  $h_x = 0.0250, h_y = 0.0250$ ,  
 4  $h_x = 0.0125, h_y = 0.0125$ .

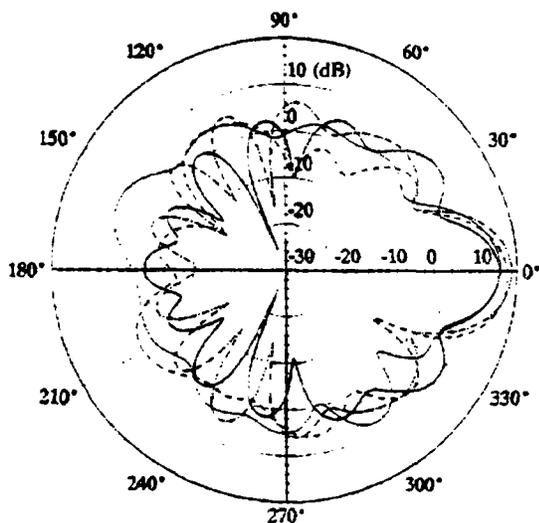


图6 媒质参数变化时圆柱体的 RCS  
 -  $\epsilon_r = 2.0, \xi = 1.0, \eta = 0$   
 - -  $\epsilon_r = 2.0, \xi = 2.0, \eta = 1.5$   
 - - -  $\epsilon_r = 4 - 2r, \xi = 2.0, \eta = 1.5$   
 - - -  $\epsilon_r = 4 - 2r, \xi = 2.0, \eta = 1.5$

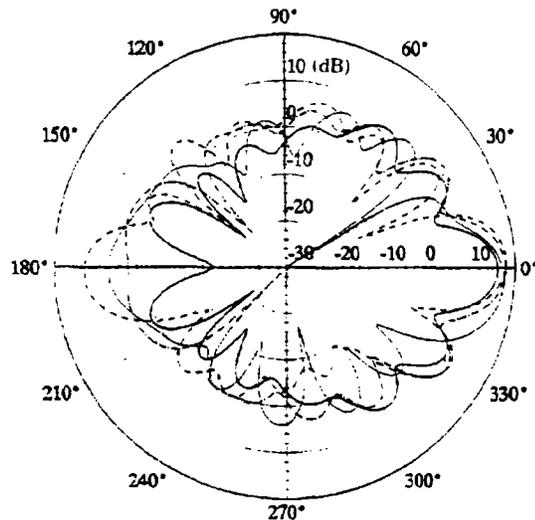


图7 媒质参数变化时方柱体的 RCS  
 -  $\epsilon_r = 2.0, \xi = 1.0, \eta = 0$   
 - -  $\epsilon_r = 2.0, \xi = 2.0, \eta = 1.5$   
 - - -  $\epsilon_r = 4 - 2\sqrt{2}, \xi = 1.0, \eta = 0$   
 - - -  $\epsilon_r = 4 - 2\sqrt{2}, \xi = 2.0, \eta = 1.5$

图7 计算的是边长为  $2\lambda_0$  的方柱体 RCS，介质参数变化同前例，其中  $\epsilon_r = 4.0 - 2\sqrt{2}r$ ， $r$  为点到方柱中心的距离。

## 5 结 论

本文推导了频域 Mur 条件的有限差分近似。计算结果证明, 这一方法是方便、有效的, 结合稀疏矩阵的压缩存贮技术, 可对电大尺寸非均匀、各向异性电磁散射问题进行计算。这一方法还可用到其它电磁场问题中去, 这方面工作正在进行。

## 参 考 文 献

- [1] Mekewether D E. IEEE Trans. on EMC, 1971, EMC-13(1): 41-44.
- [2] Kunz K S, Lee K M. IEEE Trans. on EMC, 1978, EMC-20(2): 328-333.
- [3] Yee K S. IEEE Trans. on AP, 1966, AP-14(5): 302-307.
- [4] Taylor C D, Lam D H, Shumpert T H. IEEE Trans. on AP, 1969, AP-17(9): 585-589.
- [5] Taflove A, Brodwin M E. IEEE Trans. on MTT, 1975, MTT-23 (8): 623-630.
- [6] Mur G. IEEE Trans. on EMC, 1981, EMC-23(4): 377-382.
- [7] Canning F X. IEEE Trans. on AP, 1990, AP-38(5): 740-745.
- [8] Jin J M, Volakis J L, Liepa V V. IEEE Trans. on AP, 1989, AP-37(1): 118-123.
- [9] Areadt S, Umashankar K R, Taflove A, *et al.* IEEE Trans. on AP, 1989, AP-38(7): 1551-1558.
- [10] Jankovic D J, Chang D C, Dunn J M, *et al.* IEEE Trans. on AP, 1993, AP-42(9): 1215-1222.
- [11] Sun W, Balanis C A. IEEE Trans. on AP, 1993, AP-42(5): 627-632.

## FINITE-DIFFERENCE APPROXIMATIONS IN FREQUENCY-DOMAIN FOR MUR'S CONDITIONS AND ITS APPLICATIONS

Chen Jun    Hong Wei    Chen Yiyuan

(*State Key Lab. of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210096*)

**Abstract** Novel finite-difference approximations of Mur's conditions are presented in frequency-domain. Combined with the FD-FD equations deduced, the new conditions are convenient and effective to solve EM problems of inhomogeneous anisotropic media. By use of the compressed storage sparse matrix technique and iteration algorithm, the computer memories demanded are decreased and the CPU time is shortened compared with those obtained by moment method (MM). RCS of cylinders and rectangular posts are given with several kinds of media. The results of cylinder are in good agreement with those of MM.

**Key words** Difference approximations, Mur's conditions, FD-TD, Moment method, RCS

陈 军: 男, 1969 年生, 博士生, 从事电磁场计算、电波传播特性、微波网络和通信系统设计等方面的研究。

洪 伟: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁场边值问题、天线理论、毫米波固态源等方面的研究。

陈亿元: 男, 1952 年生, 副教授, 主要从事微波有源、无源电路、微波网络、电磁场数值计算等方面的研究。