

# 二维数字滤波器的一种快速设计法\*

易克初

(西北电讯工程学院)

贾裕民

(西安近代化学研究所)

## 提 要

本文概述了设计二维数字滤波器的已有的几种主要的设计方法,提出了一种简单的设计方法——组合设计法。这种方法具有计算代价低、易于实现线性相移、便于向多维推广等优点。实验结果表明:这种方法比二维窗口法计算代价还低、设计效果更好。它不仅适于在图像处理或其他计算机系统中作为应用软件使用,也适于在涉及二维或多维数字滤波的研究工作中采用。

## 一、引 言

在地质、地震、雷达、遥感、生物学等领域中的图像处理、图形识别和数据处理等方面,常常涉及二维和多维滤波问题。由一维滤波向二维滤波推广,并不简单直截,而是复杂问题。因此近年来二维数字滤波一直是一个引人注目的研究课题<sup>[1,2]</sup>。

关于二维数字滤波器的设计问题,对于二维无限冲击响应(简称2D-IIR)滤波器而言,关键是解决稳定性问题<sup>[3,4]</sup>;对于二维有限冲击响应(简称2D-FIR)滤波器而言,关键是解决降低设计计算代价与改善设计效果之间的矛盾。这里所说的计算代价包括两个方面:(1)程序的复杂程度以及对计算机内存容量的要求;(2)总的计算量的大小。

众所周知,在图像处理方面,滤波器的相移必须具有较好的线性,而FIR滤波器能精确地实现线性相移或零相移,所以本文重点考虑2D-FIR滤波器。第二节介绍已有的五种设计方法,并分析它们的优缺点和适用范围;第三节介绍组合设计法的原理、特点和实施步骤;第四节给出几个实验结果并作一些说明;第五节讨论组合设计法的计算代价和误差的估计,并与窗口法进行对比。

## 二、2D-FIR 滤波器的几种设计方法

**1. 窗口法** 所谓窗口法就是用一个窗函数对希望达到的滤波器(即原型滤波器)的单位冲击响应进行截取,以便得到一个与原型滤波器的频率响应相近似的FIR滤波器。把一维窗口法推广到二维窗口法有三种方法:(1)黄氏圆对称二维窗<sup>[5]</sup>;(2)卡笛逊乘积窗<sup>[6]</sup>;(3)保型圆对称窗<sup>[7]</sup>。文献[6]对前两种窗作了详细的评论和实验比较。

\* 1984年8月20日收到,1984年12月15日修改定稿。

**2. 频率抽样法** 一维情形的频率抽样法是这样的: 如果  $H_1(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ ) 是希望达到的频率响应在一个周期内的  $K$  个均匀间隔上的抽样, 那么用  $z$  变换插值公式即可得到一个长度为  $K$  的 FIR 滤波器的传递函数:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{K-1} H_1(k) \cdot A(k, z), \quad (1)$$

其中  $A(k, z) = (1 - z^{-K}) / [K(1 - z^{-1} e^{j2\pi k/K})]$  称做内插函数。并由此进而得到频率响应函数:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{K-1} H_1(k) \cdot \varphi(k, \omega), \quad (2)$$

其中  $\varphi(k, \omega) = (1 - e^{-j\omega K}) / [K(1 - e^{j(2\pi k/K - \omega)})]$  称做频率内插函数。为了改善设计效果, 还可以将  $H_1(k)$  在过渡带中的那些值不规定死而当作变量用线性规划技术进行优化设计<sup>[8]</sup>。频率抽样法可以直接推广到二维。

**3. 切比雪夫逼近设计法** 与一维时的情况相似, 二维滤波器也可以用切比雪夫逼近法进行设计, 而得到最大误差最小的等波纹最优滤波器。但它比一维情形要复杂得多, 计算代价也要大得多。主要原因是二维情形不再满足哈尔 (Haar) 条件, 交错点定理也不再成立, 因而不能采用高效率的雷梅兹 (Remez) 互换算法, 并且常发生不收敛的麻烦<sup>[9, 10]</sup>。

**4. 降维设计法** 所谓降维设计法就是把二维问题转化为一维问题来进行处理<sup>[2, 11, 12]</sup>。降维法既可设计 2D-FIR 滤波, 也可设计 2D-IIR 滤波器。它主要有两种做法: (1) 投影法, 就是把希望达到的频率响应逐行扫描变成一维序列, 从而把二维滤波器投影为一维多带滤波器来进行设计; (2) 分离变量法, 就是把希望达到的频率响应(用矩阵表示)直接分块或者用奇异值分解定理分解成若干个变量可分离的二维子滤波器之和, 然后用一维设计技术设计这些子滤波器, 再将它们相加即得到要设计的滤波器<sup>[12]</sup>。

**5. 广义麦克莱伦 (McClellan) 变换设计法** 这种方法的基本思想是用一种增维变换把一个用切比雪夫逼近法设计得到的一维滤波器原型, 映射为二维滤波器<sup>[13, 14]</sup>。这种方法可以得到准最优的 2 D-FIR 滤波器, 而其计算代价却比直接用二维切比雪夫逼近法低得多。

以上各种方法各有各的特点和适用场合。窗口法的主要优点是简单方便, 但是设计效果不佳, 并且达到的指标较难预测<sup>[6]</sup>。频率抽样法的主要优点是对于窄带滤波器而言, 不仅设计简单, 而且存在一种递归实现 FIR 滤波器的方式<sup>[15]</sup>, 因此特别适于设计窄带滤波器。对于非窄带滤波器, 频率抽样法计算代价较大, 而设计效果也并不好。切比雪夫逼近设计法虽能得到最大误差最小的最优滤波器, 但是计算代价太高, 只能在某些特殊场合中采用。降维设计法在某些特别情况中非常有用。例如当希望达到的频率响应的可分离性很好时, 用奇异值分解法只须很少几项就可以足够精确地逼近它, 这就使得设计和实现都变得十分简单。但是对于分离性不好的滤波器, 采用这种方法是很不合算的。麦克莱伦变换设计法的主要优点是能以较低的计算代价得到准最优的二维滤波器。此外, 这种滤波器可以用递归方式快速实现。它的主要不足之处是一般只适用于象限对称的情况, 对于半平面对称的情况虽然也可应用, 但只能用一阶变换, 设计效果也就差一些<sup>[16]</sup>。

总之,二维数字滤波器的设计和实现,情况复杂而且计算代价高,加之因滤波系数多不便于脱机利用,限制了这些方法的应用。在一般的图象处理系统中还没有普遍配备上上述各种方法的应用软件。因此另外探索一种简单快速的实用方法仍然是必要的。

### 三、组合设计法

从(2)式可以看出,用频率抽样法设计的滤波器的频率响应函数是希望达到的频率响应的抽样值的加权线性组合,其权函数就是频率内插函数 $\varphi(k, \omega)$ 。窗口法也有类似的特点,因为窗口法设计的滤波器的频率响应函数等于希望达到的频率响应 $H_1(\omega)$ 与窗函数频率响应 $W(\omega)$ 的卷积,即

$$H(\omega) = H_1(\omega) * W(\omega) = \sum_{\omega_k} H_1(\omega_k) \cdot W(\omega - \omega_k). \quad (3)$$

显然(3)式和(2)式是相似的,只不过(3)式中的权函数是窗函数频率响应的循环移位产物 $W(\omega - \omega_k)$ 。窗口法和频率抽样法这一特点使它们很适于设计频率特性非分段恒定的滤波器,也正是这一特点,使之能与另一种更好的一维设计方法结合起来进行二维设计。这就是组合设计法的基本思想。

组合法存在多种组合形式,其中最具有实用价值的有两种形式:(1)一维窗口法与一维切比雪夫逼近设计法相结合;(2)一维频率抽样法与 IIR 设计法相结合。下面具体介绍它们的实施步骤。

设希望达到的频率响应可表示为矩阵 $\{H_1(m, n)\}_{M \times N}$ 即:

$$H_1(m, n) = \begin{cases} 1, & (m, n) \in \text{通带}; \\ 0, & (m, n) \in \text{阻带}. \end{cases} \quad (4)$$

如果采用第一种组合方式,则设计步骤如下:

(1) 将 $\{H_1(m, n)\}$ 的每行都看作是一个一维滤波器,用切比雪夫逼近法设计这 $N$ 个一维滤波器,得: $H_n(m); n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M$ 。实际上,因为 $\{H_1(m, n)\}$ 中有一些行处在二维滤波器的阻带之中,其值全为零,对这些行也就无需进行设计。可见当二维滤波器原型的通带很窄时,就只需要设计很少几个一维滤波器。

(2) 将上一步得到的 $N$ 个一维滤波器仍按原来次序排列成二维阵列:

$$H_{II}(m, n) = H_n(m); m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N.$$

显然 $\{H_{II}(m, n)\}$ 已经是一个与希望达到的滤波器相近似的二维滤波器,见图1。但是

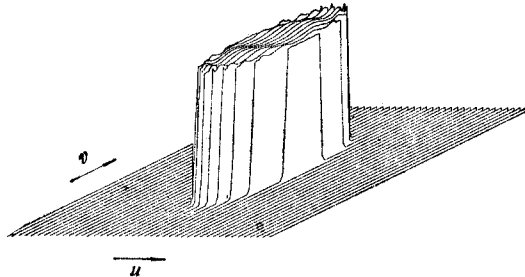


图1  $v$ 方向用 IIR 技术设计, $u$ 方向为理想滤波器

它在列的方向存在突变现象,如果不进一步采取措施就会出现吉布斯(Gibbs)现象。

(3) 为了消除吉布斯现象,在 $u$ 方向对 $\{H_{II}(m, n)\}$ 进行加窗处理,也就是用(3)式进行加权线性组合,得:

$$H(m, n) = \sum_m H_{II}(m_1, n) \cdot W(m - m_1). \quad (5)$$

这就是最终结果。它可以用于设计频域滤波器。不难设想,这一设计结果与二维窗口法比起来,达到同样的指标所需的阶数可以低一些,因为它在一个方向上运用了切比雪夫逼近法。

如果采用第二种组合方式,其设计步骤是:

(1) 将 $\{H_I(m, n)\}_{M \times N}$ 隔 $q$ 行抽样成 $M \times K$ 的矩阵 $\{H_{II}(m, k)\}_{M \times K}$ ,其中 $N = q \cdot K$ , $q$ 和 $K$ 都是正整数。

(2) 将 $\{H_{II}(m, k)\}$ 的每一行看作是一个一维滤波器,并且用 IIR 设计法进行设计,得到 $K$ 个一维 IIR 滤波器,设其频率响应为:

$$H_k(m); k = 1, 2, \dots, K; m = 1, 2, \dots, M.$$

同理,其中也有许多行因处在阻带中而全为零,无需进行设计。

(3) 将上述 $K$ 个设计好的一维滤波器的频率响应函数排列成二维阵列,得:

$$H_{III}(m, k) = H_k(m); k = 1, 2, \dots, K; m = 1, 2, \dots, M.$$

然后将 $\{H_{III}(m, k)\}$ 的每一列看作是一维滤波器的频率响应的 $K$ 个抽样值,用 $K$ 点频率抽样法进行加权线性组合,得

$$H(m, n) = \sum_{k=1}^K H_{II}(m, k) \cdot \varphi_1(k, n), \quad (6)$$

其中

$$\varphi_1(k, n) = (1 - e^{-j2\pi nK/N}) / [K(1 - e^{j2\pi(k/K - n/N)})], \quad (7)$$

$\{H(m, n)\}$ 就是所得滤波器的频率响应。

上式第二种组合方式设计的滤波器,因为它在两个方向上都可以用递归方式进行滤波,因此完成上述第一步之后就可以得到递归滤波的计算流图,如图2所示。如果不需要计算频率响应,那么第二步、第三步都可以不做。图2中 $H_k(z_1)$ ( $k = 0, 1, 2, \dots, Q-1$ )就是第一步得到的 $K$ 个1D-IIR滤波器的传递函数中 $Q$ 个非零的传递函数。显然,原型滤波器在 $z_2$ 方向的通带越窄, $Q$ 的值就越小,滤波流图就越简单。此外,如果这 $Q$ 个非零传递函数中有两个相同,那就可以将这两个分支合并为一个分支。特别是当希望达到的频率响应是完全可分离的时候,则 $Q$ 个传递函数全都相同,那就演变成图3所示的流图。这时就只要做两次一维滤波了,即在 $z_1$ 方向用IIR递归滤波,在 $z_2$ 方向用递归方式实现FIR滤波。图2和图3中有 $[H_k(z_1)]^2$ ,平方的意义是指用传递函数为 $H_k(z_1)$ 的滤波器进行双向滤波,以便实现零相位,这时如果 $A(k, z_2)$ 也是设计成线性相移的,那么整个二维滤波器就成为线性相移的。

上述两种组合设计法的计算量主要在第一步,因为需要用切比雪夫逼近法或IIR设计法设计多个不同带宽的滤波器,这还是比较费时间的。如果需要把组合设计法做成应

用软件在图像处理系统中使用的话,可以事先设计好各种带宽的滤波器,将其系数存起来备用。当要进行二维设计时,可以随时选择所需的系数。这样,实际应用时的计算代价就可大大降低。

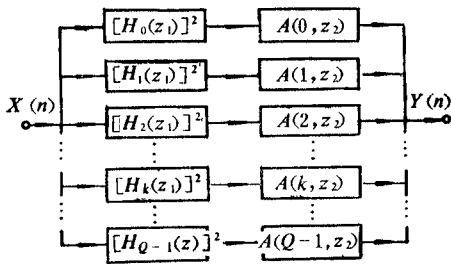


图2 频率抽样法与 IIR 设计法相结合设计的二维滤波器递归实现的计算流程图

组合设计法并不要求希望达到的频率

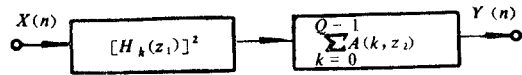


图3 频率抽样法与 IIR 法设计的可分离的二维滤波器递归实现的计算流程图

响应具有何种对称性,也不限于设计低通滤波器。根据全通减低通得到高通,低通减低通得到带通等规则,可以设计任意形式的二维滤波器。

除了上述两种组合方式之外,还有两种组合方式值得提及:(1)一维窗口法与一维窗口法相结合,就是前述卡笛逊乘积窗;(2)一维频率抽样法与一维频率抽样法相结合,就是二维频率抽样法。这些都是容易理解的。由此也就不难想象到,以窗口法或频率抽样法为基础,结合另一种更好的一维设计方法进行二维设计的做法,与二维窗口法或二维频率抽样法相比,它的设计效果肯定能好一些,如果运用得适当的话。

组合设计法很容易推广应用于多维滤波器的设计,例如把一个最优二维滤波器组合成三维滤波器,是不会出现什么新问题的。

组合设计法本质上也是一种降维设计法,它把原型滤波器划分成许多个很窄的条形滤波器,每个子滤波器当然可以看作是变量可分离的二维滤波器。由于这些子滤波器的通带很窄,所以即使希望达到的频率响应分离性不好,用组合法也能足够精确地逼近它,而得到较好的设计效果,这一点它比分离变量法优越。另一方面,如果希望达到的滤波器的可分离性很好的话,用组合法进行设计时也会变得简单,所以它又保留了分离变量法的优点。同时它的计算代价却比分离变量法低。这主要有两个原因:(1)它在划分子滤波器时是以一种固定不变的方式(即按行划分)进行的,因此容易编成简单的通用程序;(2)在逐行进行一维设计时,其原型都是理想滤波器,能用通用程序进行,而在列的方向进行加权组合时,权函数的计算可以设法简化,只需算出一个权函数在各频率点上的值,其他各权函数即可用那个权函数进行循环移位得到。例如,如果(7)式中的内插函数  $\varphi_1(0, n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) 的  $N$  个值已经求出,那么通过循环移位法即可得到其它各权函数的值,即

$$\varphi_1(k, n) = \begin{cases} \varphi_1(0, n - qk), & \text{当 } n > qk \text{ 时;} \\ \varphi_1(0, n - qk + N), & \text{当 } n \leq qk \text{ 时;} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $k = 1, 2, \dots, K-1, N = qk$ 。(3)式中的窗函数频率响应  $W(\omega - \omega_k)$  的计算也可用类似的方法减少计算量。

以上就是组合设计法的具体做法和基本特点。

#### 四、实验结果和讨论

图 4 是用第二种组合方式设计的椭圆低通滤波器的幅度-频率响应, 其原型滤波器, 即希望达到的滤波器的频率响应为:

$$H_1(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \left(\frac{u}{0.125}\right)^2 + \left(\frac{v}{0.25}\right)^2 \leq 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } \left(\frac{u}{0.125}\right)^2 + \left(\frac{v}{0.25}\right)^2 > 1 \text{ 时;} \end{cases} \quad (9)$$

其中  $u, v$  为归一化频率. 在这个实验中,  $u$  方向用 41 点频率抽样法,  $v$  方向用 6 阶切比雪夫 IIR 滤波器. 如果用图 2 所示的流图进行递归滤波, 则一共需要 6 个支路, 即  $Q=6$ . 设其中第  $k$  个支路的传递函数为:

$$H_k(z_1) = \frac{1 + a_1 z_1^{-1} + b_1 z_1^{-2}}{1 + c_1 z_1^{-1} + d_1 z_1^{-2}} \cdot \frac{1 + a_2 z_1^{-1} + b_2 z_1^{-2}}{1 + c_2 z_1^{-1} + d_2 z_1^{-2}} \cdot \frac{1 + a_3 z_1^{-1} + b_3 z_1^{-2}}{1 + c_3 z_1^{-1} + d_3 z_1^{-2}},$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (10)$$

相应的内插函数为:

$$A(k, z_2) = (1 - z_2^{-41}) / (1 - z_2^{-1} e^{-j2\pi k/41}).$$

上述各系数的值列于表 1.

这个滤波器的过渡带两侧有 2dB 左右的过冲现象, 一般地说这不影响大局. 如果希望进一步减小过冲, 可以将原型滤波器考虑成下大上小的台形, 这样加宽过渡带, 可使过冲现象进一步减小.

图 5 也是用第二种组合方式设计的矩形滤波器. 因为它是变量可分离的, 所以设计和实现过程都非常简单. 图中  $v$  方向仍然用 IIR 滤波器,  $u$  方向仍然用 41 点频率抽样法.

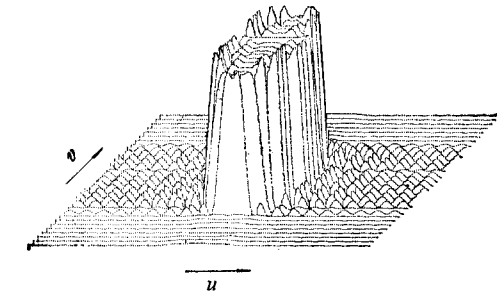


图 4  $u$  方向用频率抽样法,  $v$  方向为 6 阶 IIR 滤波器

这里运用了线性规划技术进行优化设计, 所以误差比较小. 它可以用图 3 所示的流图进行递归滤波. 当然这种变量可分离的滤波器也可以两个方向都用 IIR 滤波器. 但这时为了要得到零相移而在两个方向上都用双向滤波法进行 IIR 滤波的话, 会使稳定性问题变得严重, 幅度响应的偏差也会变大.

图 6 是用第一种组合方式设计的结果. 原型滤波器仍然用 (9) 式,  $v$  方向用 23 阶切比雪夫逼近法设计, 一共需要设计 17 个 FIR 滤波器;  $u$  方向用 69 点凯泽窗进行加权线性组合, 其窗函数的频率响应为<sup>[27]</sup>:

$$W(u) = \begin{cases} \frac{2N \cdot \text{sh}[\alpha \sqrt{1 - (u/u_a)^2}] / [\alpha \cdot I_0(\alpha) \sqrt{1 - (u/u_a)^2}]}{2N \cdot \sin[\alpha \sqrt{(u/u_a)^2 - 1}] / [\alpha \cdot I_0(\alpha) \cdot \sqrt{(u/u_a)^2 - 1}]}, & \text{当 } u > u_a; \\ \frac{2N \cdot \sin[\alpha \sqrt{(u/u_a)^2 - 1}] / [\alpha \cdot I_0(\alpha) \cdot \sqrt{(u/u_a)^2 - 1}]}{2N \cdot \text{sh}[\alpha \sqrt{1 - (u/u_a)^2}] / [\alpha \cdot I_0(\alpha) \sqrt{1 - (u/u_a)^2}]}, & \text{当 } u < u_a; \\ 2N / I_0(\alpha), & \text{当 } u = u_a; \end{cases}$$

其中  $I_0(\alpha)$  为第一类零阶修正贝塞尔函数,  $u_a$  为临界频率, 参数取  $\alpha = 2.117, N = 34$ .

表 1

参数 \ $k$	0	1	2	3	4	5
$a_1$	0.28152	0.225897	0.0580436	-0.253931	-0.742181	-1.46383
$b_1$	1	1	1	1	1	1
$c_1$	0.0439462	-0.0152099	-0.1919	-0.500725	-1.00645	-1.77711
$d_1$	0.92211	0.920826	0.911208	0.911872	0.904832	0.916975
$a_2$	0.617738	0.568846	0.418942	0.125762	-0.349661	-1.13749
$b_2$	1	1	1	1	1	1
$c_2$	-1.0857	-1.59968	-0.311578	-0.561892	-0.991547	-1.67151
$d_2$	0.00944	0.649809	0.643828	0.636745	0.646301	0.764749
$a_3$	1.645028	1.62873	1.57629	1.45816	1.23023	0.644257
$b_3$	1	1	1	1	1	1
$c_3$	0.0416862	-0.45	-0.54725	-0.68965	-1.00711	-1.61037
$d_3$	0.1302	0.177426	0.192325	0.218683	0.319534	0.657423

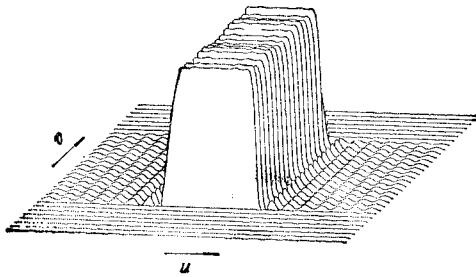


图 5 矩形滤波器  
 $v$  方向用 IIR 技术设计,  $u$  方向用线性规划技术  
设计成 41 点频率抽样滤波器

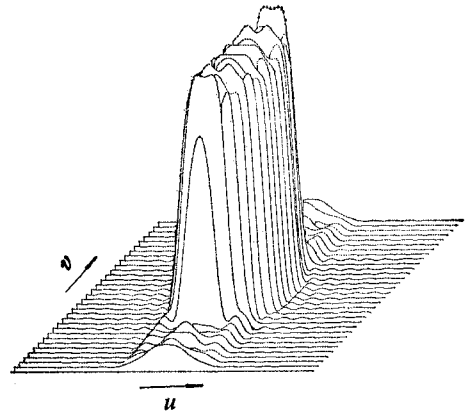


图 6  $v$  方向用切比雪夫逼近法设计成 23 阶  
FIR 滤波器,  $u$  方向用 69 点凯泽窗进行组合  
设计

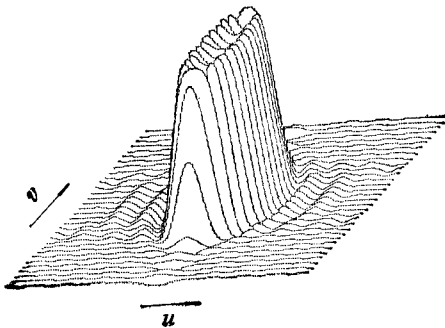


图 7 用组合法设计的  $41 \times 41$  的凯泽-  
卡窗二维窗滤波器

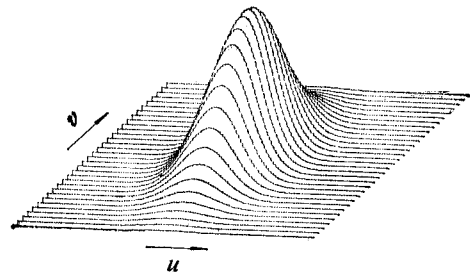


图 8 二维高斯  
滤波器

图 7 是用  $41 \times 41$  点凯泽-卡窗二维窗设计的 2D-FIR 滤波器。它的大小与上一个滤波器差不多, 即  $41 \times 41 \approx 23 \times 69$ ; 但在通带和阻带的偏差与上一个滤波器相当的

情况下,其过渡带比前者宽得多.这说明组合法比窗口法好一些.顺便指出,在设计这个滤波器时,也运用了组合设计法的原理,即直接计算加权线性组合,这就避免了运用二维傅里叶变换(以下简称 2D-FFT),降低了计算代价.对于频带不是很宽的二维滤波器而言这样做是合算的.

图 8 是一个二维高斯滤波器.做出这个图的目的是为了与上述几种滤波器作对比,以说明目前在数字图像处理系统中广为采用的高斯滤波器并不是一种好的选频滤波器.它之所以得到广泛应用,只不过是它的计算代价低以及具有高频或低频提升性能而已.

## 五、计算代价和误差估计

以上各实验都是在一台内存仅为 64 kB (byte) 的 Z-80 微机上进行的.除用第一种组合方式设计图 6 所示的滤波器计算时间较长之外,其它各个实验包括绘立体图的时间都不超过 20 分钟.

现以图 4 所示的滤波器作为例子予以说明.它用的是第二类组合方式.第一步需要设计 6 个 IIR 滤波器,然后用 (6), (7) 式求出频率响应,即可用于二维频域滤波.而如果用二维窗口法设计,则需要用逆 2D-FFT 将原型滤波器的频率响应变换到时域;然后用二维窗函数逐点相乘,再用 2D-FFT 将它变换回到频域,才能得到频率响应;其计算量显然比前者大得多.另外,由于进行 2D-FFT 要做大矩阵转置,因此对存贮容量的要求也比前者大得多.所以组合法比窗口法计算代价低.

实际上,组合设计法还可以用预存系数的办法进一步降低计算代价.这是因为前面介绍的两种组合方式都是在第一步设计多个一维滤波器时花时间最多;如果事先设计出各种带宽的滤波器,将其滤波系数存起来备用,在进行二维设计时,便可以选用这些系数组合成各式各样的滤波器;这样就可使计算代价大为降低.这样做实际上并不需要存贮很多系数.例如,将归一化频率区间划分为 25 等分,得到通带分别为  $0-0.02$ ,  $0-0.04$ ,  $0-0.06$ ,  $\dots$ ,  $0-0.50$  等 25 个一维低通滤波器;对这 25 个低通滤波器加以适当选择,就可以足够精确地组合成各种形式的二维滤波器.如果用 23 阶切比雪夫 FIR 滤波器来设计这 25 个滤波器,每个滤波器需要存 12 个系数,总共只需 300 个系数,如果用 6 阶 IIR 椭圆滤波器来设计这 25 个滤波器,每个滤波器也是要存 12 个系数(参见(10)式),总共也是只需 300 个系数.本文虽然尚未做这一工作,但是不难设想这样做的计算代价是很低的.例如,对于第二种组合方式,如果用上述预存系数的办法来进行,并用图 3 所示的流图进行递归滤波的话,  $H_k(z_1)$  中的系数全部可从上述 300 个系数中找到,而  $A(k, z_2)$  的那几个系数很容易用 (11) 式求得.这样,只要编一个包含几十个语句和 300 个数据的小程序,就可以高速度地设计任意形式的二维滤波器.这种方法在价格昂贵的交互图像处理系统中,无疑是有实用价值的,因为这时的主要矛盾是设计速度.

用组合设计法设计二维滤波器的误差是不难估计的.下面以第二类组合方式为例,给出误差分析方法.

由 (6) 式容易看出,当  $n = n_0$  固定不变时,所得滤波器的频率响应中的第  $n_0$  列  $H$



$(m, n_0)$  相当于一个用频率抽样法设计的一维滤波器, 只不过其一维原型滤波器  $H_{II}(m, n_0)$  不是理想滤波器, 而是一个在通带中有误差的滤波器。这是因为在  $m$  方向已经用 IIR 技术逐行进行过一维设计。因此要估计  $H(m, n)$  的最大偏差, 可以逐列地估计各一维滤波器  $H(m, n)$  的最大偏差。估计  $H(m, n_0)$  的最大偏差可以分两步进行:

(1) 先假定  $H(m, n)$  是由一个理想滤波器原型用频率抽样法得到的, 那么其最大偏差不难从 (2) 式求出, 设其值为  $\Delta_1$ 。

(2) 将 (6) 式中  $H_{II}(m, k)$  看作自变量, 求  $H(m, n)$  的微分, 并以增量代替微分, 得:

$$\Delta H(m, n_0) = \sum_{k=1}^K \varphi_1(k, n_0) \cdot \Delta H_{III}(m, k).$$

$\Delta H(m, n_0)$  就是因原型滤波器  $H_{III}(m, n_0)$  在通带中存在偏差而使  $H(m, n_0)$  产生的附加偏差。考虑到  $\{H_{III}(m, n_0)\}$  中只有  $Q$  行是不全为零的, 于是求得  $\Delta H(m, n_0)$  的上限为:

$$\begin{aligned} \Delta H(m, n_0) &= \sum_{k=1}^K \varphi_1(k, n_0) \cdot \Delta H_{III}(m, k) = \sum_{q=0}^{Q-1} \varphi_1(q, n_0) \cdot \Delta H_{III}(m, q) \\ &\leq \sum_{q=0}^{Q-1} |\varphi_1(q, n_0)| \cdot |\Delta H_{III}(m, q)| \\ &\leq \Delta_{\max} \sum_{q=0}^{Q-1} |\varphi_1(q, n_0)| \leq Q \cdot \Delta_{\max}, \end{aligned}$$

其中  $\Delta_{\max}$  是  $\Delta H_{III}(m, n_0)$  的最大值, 也就是在第一步设计 IIR 一维滤波器时产生的最大偏差。综合考虑上述两种误差, 即得到总误差的上限为:

$$\Delta_{\text{sup}} = \Delta_1 + Q \cdot \Delta_{\max}.$$

例如图 4 所示的滤波器,  $\Delta_{\max} = 0.035$ , 即 0.3 dB;  $Q = 6$ ;  $\Delta_1$  约为 0.15, 即 1.2dB; 于是总偏差的上限为  $\Delta_{\text{sup}} = 0.36$ , 即 2.67 dB。这个误差上限值在最坏情况下也是不会超出的, 实际误差往往比它小得多。如图 4 的最大偏差只在过渡带两侧出现 2 dB 左右的过冲。

用第一类组合方式设计的二维滤波器也可以用类似的方法估计误差。

## 六、结 束 语

上述理论分析和实验结果表明: 组合设计法是一种计算代价低、设计效果能达到实用要求的简单方法。与二维窗口法相比, 它的计算代价更低, 设计效果也更好。因此这种方法除了适于在交互作用图像处理系统中作为应用软件使用之外, 还适于在某些研究性实验中采用, 对频带比较窄的情况特别有利。例如, 在消除遥感图像中云雾干扰的研究工作中<sup>[3]</sup>, 需要灵活易变的二维窄带滤波器, 有时还要用到三维滤波器, 如果采用上述第二种组合方式进行设计和实现滤波将是特别方便的。

## 参 考 文 献

[1] R. M. Mersereau, et al., *Proc. IEEE*, 63(1975), 610.

- [ 2 ] R. E. Twogood, Design and Implementation Techniques for Two-Dimensional Digital Filters, Ph. D. Thesis, University of California, Nov. 1979.
- [ 3 ] J. L. Shank, et al., *IEEE Trans. on AU*, AU-20(1972), 115.
- [ 4 ] 黄煦涛, 图片处理和数字滤波, 科学出版社, 1980.
- [ 5 ] T. S. Huang, *IEEE Trans on AU*, AU-20(1972), 88.
- [ 6 ] T. C. Speke, et al., *IEEE Int. Conf. on ASSP*, 1979, 5.
- [ 7 ] Haruo Kato, et al., *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-29(1981), 926.
- [ 8 ] L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [ 9 ] D. W. Tuffs, *Proc. IEEE*, 63(1975), 1618.
- [ 10 ] D. B. Harris and R. M. Mersereau, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-25(1977), 492.
- [ 11 ] R. M. Mersereau, et al., *ibid*, ASSP-22(1974), 320.
- [ 12 ] R. E. Twogood, et al., *ibid*, ASSP-25(1977), 165.
- [ 13 ] J. H. McClellan, Proc. 7-th Annual Princeton Conf. on Information Science and Systems, 1973, 247.
- [ 14 ] R. M. mersereau, et al., *IEEE Trans. on CAS*, CAS-23(1976), 405.
- [ 15 ] W. F. G. Mecklenbräuker, et al., *ibid*, CAS-23(1976), 414.
- [ 16 ] R. M. Mersereau, *ibid*, CAS-27(1980), 142.
- [ 17 ] R. W. Hamming, Digital Filters, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [ 18 ] 易克初, 王文涛, 电子科学学刊, 5(1983), 271.

## A RAPID METHOD FOR DESIGNING 2-D DIGITAL FILTERS

Yi Keehu

(Northwest Telecommunication Engineering Institute)

Jia Yumin

(Xi'an Modern Chemistry Institute)

The existing methods for designing two-dimensional digital filters are outlined and a new method—composite method—is proposed. This method has following advantages: (1) its computation cost is low; (2) it is easy to acquire linear phase performance; (3) it is conient to be generalized to multi-dimensional ones; and so on. Some experimental results show that it can get better results with lower computation cost than two-dimensional window method. Therefore, it applies no only to image processing systems or other computer systems for programming software, but also to some reseach work that involve two-dimensional or multi-dimensional digital filtering.