

带屏蔽筒鞍形偏转线圈场参数的确定*

谢志行 黄达淦 沈庆垓
(浙江 大 学)

提 要

本文讨论了用边界元法计算、分析带屏蔽筒鞍形偏转线圈的场分布,分析了法伊(D. M. Fye, 1979)模型应用的局限性. 本文用马克劳林级数展开格林函数,给出了偏转线圈的场参数 B_0, B_2, B_4 的解析表达式. 文末用实例对计算结果与实测数据进行了比较.

一、引 言

带屏蔽筒鞍形偏转线圈的偏转磁场是一个三维场问题. 屏蔽筒的边界是旋转对称的,与其相隔一定间隙的鞍形偏转线圈的电流,分布于旋转对称曲面上,既有圆周方向分量,又有轴向和径向分量. 多年来,应用有限元法和有限差分法已成功地解决了磁聚焦系统的数值计算. 七十年代初,傅里叶谐波分析技术的引入,开辟了偏转磁场计算的新途径^[1-3]. 多极分析法用于环形偏转系统的研究是很方便的,但对于必须考虑末端圆弧效应的鞍形偏转系统,还不解决问题.

1979年法伊(D. M. Fye)^[4]采用边界元法成功地解决了铁芯与绕组间有任意空隙的磁偏转系统空间场分布的数值计算. 作者把积分方程用第二类伴随勒让德函数 $Q_{m-1/2}$ 来表示,但由此而得到的场分布函数在系统的对称轴上($r \rightarrow 0$)出现奇异性. 因此,实际上作者并未给出偏转场定域空间的全部场函数. 如所周知,轴上及其附近的偏转场分布与三级和五级偏转象差有密切关系.

本文选择马克劳林级数来表示格林函数的展开式,分析了轴上及其附近的场分布,提出了该系统的偏转场参数 B_0, B_2, B_4 的解析表达式,计算与实测结果很好地吻合.

二、鞍形偏转系统的空间磁位

带屏蔽筒鞍形偏转系统,如图1所示,其鞍形绕组与旋转对称屏蔽筒之间空隙为 Δ . 屏蔽筒用高导磁材料制成. 偏转系统内部空间任一点磁标位为:

$$\phi = \phi^{(\sigma)}(\mathbf{r}) + \phi^{(a)}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中 $\phi^{(\sigma)}(\mathbf{r})$ 和 $\phi^{(a)}(\mathbf{r})$ 分别为屏蔽筒表面磁荷 $\sigma(\mathbf{r}_c)$ 和鞍形绕组产生的磁标位. 且

* 1985年9月3日收到,1986年2月1日修改定稿.

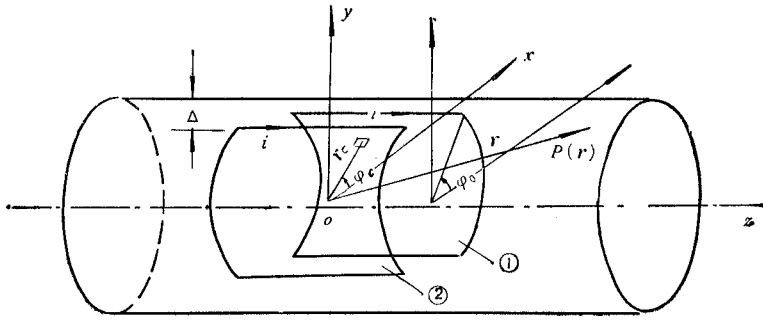


图1 带屏蔽筒鞍形偏转系统

$$\phi^{(\sigma)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \sigma(\mathbf{r}_c) \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c) d s_c, \quad (2)$$

其中 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c)$ 为格林函数, 下标 c 表示源点.

对于二极偏转系统, 只存在一个对称面和一个反对称面. 在这一情况下, 屏蔽筒表面磁荷可展开为:

$$\sigma(\mathbf{r}_c) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sigma_n(r_{cs}, z_{cs}) \cos n\varphi_{cs}, \quad (3)$$

下标 cs 表示源点位于屏蔽筒内表面.

绕组闭合电流元产生的磁标位:

$$\phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{4\pi} \int \mathbf{n}_c \cdot \nabla_c G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c) d s_c, \quad (4)$$

\mathbf{n}_c 是以闭合电流元为周界的表面的单位法线向量, 其指向与电流元方向构成右手螺旋系统. 式中格林函数

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|}. \quad (5)$$

在文献[4]中给出了圆柱坐标系中以第二类伴随勒让德函数 $Q_{m-1/2}$ 表示的表达式.

对图1给出的模型, 采用点匹配矩量法^[5]将屏蔽筒表面沿母线方向划分成 $(L-1)$ 个子区间 $[z_{sl}, z_{s(l+1)}]$ ($l=1, 2, 3, \dots, L-1$), (1)–(5)式经过适当代换, 运算, 归并化简, 便得到带屏蔽筒鞍形偏转系统任意一点空间的磁标位:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} [\phi_m^{(\sigma)}(r, z) + \phi_m^{(a)}(r, z)] \cos m\varphi, \quad (6)$$

其中表面磁荷产生的谐波磁标位(推导见附录 I):

$$\phi_m^{(\sigma)}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{L-1} \left(\frac{R_l}{r}\right)^{1/2} \sigma_{lm}(R_l, z_{sl}) \int_{z_{sl}-\frac{1}{2}h_l}^{z_{sl}+\frac{1}{2}h_{l+1}} Q_{m-1/2}[\alpha(r, z; R_l, z_{sl})] d z_{sl}, \quad (7)$$

其中积分限 $\frac{1}{2} h_l$, $\frac{1}{2} h_{l+1}$ 分别表示第 l 和 $(l+1)$ 个匹配子区间的半宽度.

鞍形绕组产生的谐波磁标位(推导见附录 I):

$$\phi_m^{(a)}(r, z) = \frac{NI \sin m\varphi_0}{\pi m} \cdot \frac{1}{\pi(rR)^{1/2}} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{R^2 - r^2 - (z - z_c)^2}{rR} \cdot Q'_{m-1/2}[\alpha(r, z; R, z_c)] \right\}$$

$$- Q_{m-1/2}[\alpha(r, z; R, z_c)] \} dz_c, \quad (8)$$

其中 $Q'_{m-1/2} = \frac{d}{d\alpha} [Q_{m-1/2}(\alpha)]$, R_s, R 分别是屏蔽筒和线圈的半径, φ_0 为鞍形线圈的半张角. 这里的 $\phi_m^{(a)}$ 业已考虑了图 1 所示的双极系统. $\sigma_{lm}(R_s, z_{cs})$ 表示屏蔽筒母线上第 l 个子区间磁荷谐波系数.

在屏蔽筒材料的磁导率很高时, 在通常工作条件下, 其内表面为一等磁位面, 令 (6) 式的屏蔽筒表面合成磁位为零, 这样, 进而便可用绕组在屏蔽筒内表面产生的磁标位作为匹配点上的边值, 解 (6)–(8) 式, 求出 $\sigma_{lm}(R_s, z_{cs})$.

图 2 是线圈绕组在屏蔽筒表面产生的一次、三次和五次谐波磁标位分布.

实践表明, 用第二类伴随勒让德函数 $Q_{m-1/2}$ 表示的格林函数展开式, 在计算远轴区磁标位分布时, 有收敛快, 精度高的优点, 因为函数 $Q_{m-1/2}$ 可以任意加密. 但是在电子光学领域中, 我们更关心的是近轴区域的场分布, 这时 (7) 式和 (8) 式便不再适用.

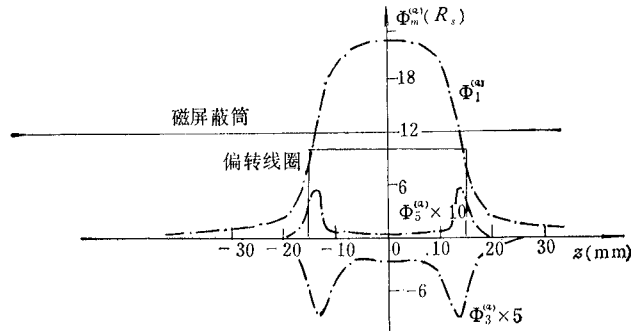


图 2 绕组在屏蔽筒表面产生的磁标位

三、近轴区磁标位和场参数

圆柱坐标系 (r, φ, z) 中的格林函数展开式为:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} = [r^2 + r_c^2 + (z - z_c)^2 - 2rr_c \cos(\varphi - \varphi_c)]^{-1/2}. \quad (9)$$

当 $r \approx r_c$ 时, (9) 式可用马克劳林级数展开 (推导见附录 II):

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c) = & \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2 r_c^2}{L^5} + \frac{105}{64} \cdot \frac{r^4 r_c^4}{L^9} + \dots \right) + \left(\frac{r r_c}{L^3} + \frac{15}{8} \cdot \frac{r^3 r_c^3}{L^7} \right. \\ & \left. + \frac{315}{64} \cdot \frac{r^5 r_c^5}{L^{11}} + \dots \right) \cos(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{r^2 r_c^2}{L^5} + \frac{35}{16} \cdot \frac{r^4 r_c^4}{L^9} + \dots \right) \\ & \times \cos 2(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{r^3 r_c^3}{L^7} + \frac{315}{128} \cdot \frac{r^5 r_c^5}{L^{11}} + \dots \right) \cos 3(\varphi - \varphi_c) \\ & + \left(\frac{35}{64} \cdot \frac{r^4 r_c^4}{L^9} + \dots \right) \cos 4(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{63}{128} \cdot \frac{r^5 r_c^5}{L^{11}} + \dots \right) \\ & \times \cos 5(\varphi - \varphi_c) + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $L^2 = r^2 + r_c^2 + (z - z_c)^2$.

将(10)式代入(2)–(4)式,经过繁复的微分、变换和化简,得到表面磁荷在空间任意一点产生的磁标位:

$$\phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \phi_m^{(a)}(r, z) \cos m\varphi, \quad (11)$$

其各次谐波磁位为:

$$\phi_1^{(a)}(r, z) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{L-1} \sigma_{l1} \int_{z_{sl}-\frac{1}{2}h_l}^{z_{sl}+\frac{1}{2}h_{l+1}} \left(\frac{rR_s^2}{L^3} + \frac{15}{8} \frac{r^3R_s^4}{L^7} + \frac{315}{64} \cdot \frac{r^5R_s^6}{L^{11}} + \dots \right) dz_{cs}, \quad (12)$$

$$\phi_3^{(a)}(r, z) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{L-1} \sigma_{l3} \int_{z_{sl}-\frac{1}{2}h_l}^{z_{sl}+\frac{1}{2}h_{l+1}} \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{r^3R_s^4}{L^7} + \frac{315}{128} \frac{r^5R_s^6}{L^{11}} + \dots \right) dz_{cs}. \quad (13)$$

$$\phi_5^{(a)}(r, z) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{L-1} \sigma_{l5} \int_{z_{sl}-\frac{1}{2}h_l}^{z_{sl}+\frac{1}{2}h_{l+1}} \left(\frac{63}{128} \cdot \frac{r^5R_s^6}{L^{11}} + \dots \right) dz_{cs}, \quad (14)$$

其中 $L^2 = R_s^2 + r^2 + (z - z_{cs})^2$, σ_{l1} , σ_{l3} , σ_{l5} 分别是屏蔽筒表面磁荷在第 l 个子区间上第 1, 3, 5 次谐波系数.

同样,鞍形绕组产生的磁标位:

$$\phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \phi_m^{(a)}(r, z) \cos m\varphi, \quad (15)$$

其各次谐波磁位为:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(a)}(r, z) = & -\frac{NI}{2\pi} \sin \varphi_0 \int_{z_1}^{z_2} \left[2 \left(\frac{rR}{L_a^3} - \frac{3rR^3}{L_a^5} \right) + \frac{15}{4} \left(\frac{3r^3R^3}{L_a^7} - \frac{7r^5R^5}{L_a^9} \right) \right. \\ & \left. + \frac{315}{32} \left(\frac{5r^5R^5}{L_a^{11}} - \frac{11r^7R^7}{L_a^{13}} \right) + \dots \right] dz_{ca}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi_3^{(a)}(r, z) = & -\frac{NI}{6\pi} \sin 3\varphi_0 \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{5}{4} \left(\frac{3r^3R^3}{L_a^7} - \frac{7r^5R^5}{L_a^9} \right) \right. \\ & \left. + \frac{315}{64} \left(\frac{5r^5R^5}{L_a^{11}} - \frac{11r^7R^7}{L_a^{13}} \right) + \dots \right] dz_{ca}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\phi_5^{(a)}(r, z) = -\frac{NI}{10\pi} \sin 5\varphi_0 \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{63}{64} \left(\frac{5r^5R^5}{L_a^{11}} - \frac{11r^7R^7}{L_a^{13}} \right) + \dots \right] dz_{ca}, \quad (18)$$

这里 $L_a^2 = R^2 + r^2 + (z - z_c)^2$, R 为鞍形线圈的半径, 下标“ a ”表示线圈绕组, 下标“ ca ”表示源点位于线圈绕组上, 积分区间 z_1, z_2 为鞍形绕组的轴向长度. 显然(11)和(15)式的代数和与(16)式具有同样的物理意义.

由于

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 [\nabla \phi(\mathbf{r})], \quad (19)$$

便得到图 1 所示的垂直偏转场在直角坐标系中的磁感强度分量 $B_x|_{x=0}$ 与谐波磁位的关系:

$$B_x|_{x=0} = -\mu_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m}{y} \sin \frac{m\pi}{2} \phi_m(y, z), \quad (20)$$

通常,沿轴($r \rightarrow 0$)磁感强度 $B_0(z) = B_x|_{x=0}$ 及其横向变化率 $B_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n B_x}{\partial y^n} \right)_{x=y=0}$

($n > 0$) 决定了偏转系统的电子光学特性^[6].

由(20)式按下列求导^[7]

$$B_0(z) = \frac{\partial}{\partial y} (yB_x) \Big|_{x=y=0}, \quad (21a)$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 (yB_x)}{\partial y^3} \Big|_{x=y=0}, \quad (21b)$$

$$B_4(z) = \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 (yB_x)}{\partial y^5} \Big|_{x=y=0}. \quad (21c)$$

经过颇为繁复的推导、化简整理,便得到磁荷产生的场参数:

$$B_0^{(\sigma)}(z) = -\frac{\mu_0}{4} \sum_{l=1}^{L-1} \sigma_{ll} J_{l3}, \quad (22a)$$

$$B_2^{(\sigma)}(z) = -\frac{\mu_0}{8R_l^2} \sum_{l=1}^{L-1} \left[\sigma_{ll} \left(\frac{1}{4} J_{l7} - J_{l5} \right) + \frac{3}{4} \sigma_{l3} J_{l7} \right], \quad (22b)$$

$$B_4^{(\sigma)}(z) = -\frac{\mu_0}{48R_l^4} \sum_{l=1}^{L-1} \left[\sigma_{ll} \left(3J_{l7} - \frac{15}{4} J_{l9} + \frac{3}{8} J_{l11} \right) - 9\sigma_{l3} \left(5J_{l9} - \frac{3}{16} J_{l11} \right) + \frac{1}{16} \sigma_{l5} J_{l11} \right]. \quad (22c)$$

线圈绕组产生的场参数:

$$B_0^{(a)}(z) = \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \sin \varphi_0 (J_3 - J_5), \quad (23a)$$

$$B_2^{(a)}(z) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^3} \left[2 \sin \varphi_0 (J_7 - J_9) - \frac{3}{2} \sin 3\varphi_0 \left(\frac{1}{8} J_7 - J_9 \right) \right], \quad (23b)$$

$$B_4^{(a)}(z) = \frac{\mu_0 NI}{24\pi R^5} \left[15 \sin \varphi_0 \left(\frac{1}{3} J_7 - J_9 \right) - \frac{27}{2} \sin 3\varphi_0 \left(\frac{1}{3} J_{11} - J_9 \right) + \frac{15}{8} \sin 5\varphi_0 \left(\frac{8}{15} J_{11} - J_{13} \right) \right], \quad (23c)$$

式中算符:

$$J_3 = [\sin u]_{u_1}^{u_2}, \quad (24a)$$

$$J_5 = [(\cos^2 u + 2) \sin u]_{u_1}^{u_2}, \quad (24b)$$

$$J_7 = [(4\cos^4 u + 4\cos^2 u + 8) \sin u]_{u_1}^{u_2}, \quad (24c)$$

$$J_9 = [(5\cos^6 u + 6\cos^4 u + 8\cos^2 u + 18) \sin u]_{u_1}^{u_2}, \quad (24d)$$

$$J_{11} = [(35\cos^8 u + 40\cos^6 u + 48\cos^4 u + 6\cos^2 u + 128) \sin u]_{u_1}^{u_2}, \quad (24e)$$

$$J_{13} = [(63\cos^{10} u + 70\cos^8 u + 80\cos^6 u + 94\cos^4 u + 128\cos^2 u + 256) \sin u]_{u_1}^{u_2}, \quad (24f)$$

$$u_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_1}{R} \right), \quad (25a)$$

$$u_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_2}{R} \right), \quad (25b)$$

其中如 $J_3 = [\sin u]_{u_1}^{u_2} = \sin u_2 - \sin u_1$, 余依此类推,若取

$$u_{ll} = \operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_{sl} + \frac{1}{2} h_l}{R_l} \right), \quad (26a)$$

$$u_{2l} = \arctg\left(\frac{z - z_{sl} - \frac{1}{2}h_{l+1}}{R_s}\right), \quad (26b)$$

去替换 $J_k (k = 3, 5, 7, 9, 11, 13)$ 各式中的积分限 u_1, u_2 , 则得到点匹配子区间上各个 J_{lk} 的表达式。

偏转系统中任意一点的场参数可据场的叠加原理, 求其相应的 $B_n^{(\sigma)}$ 和 $B_n^{(a)}$ 代数和得到。

四、计算结果

利用(22)一(26)式给出的场参数表达式, 对图 3(a) 所示的带屏蔽筒鞍形偏转线圈的场参数进行了计算和实验测定, 所获结果, 吻合良好, 如图 4 所示。



(a) 绕组端耳垂直 z 轴 (b) 绕组端耳与 z 轴倾斜

图 3 鞍形绕组的两种形式

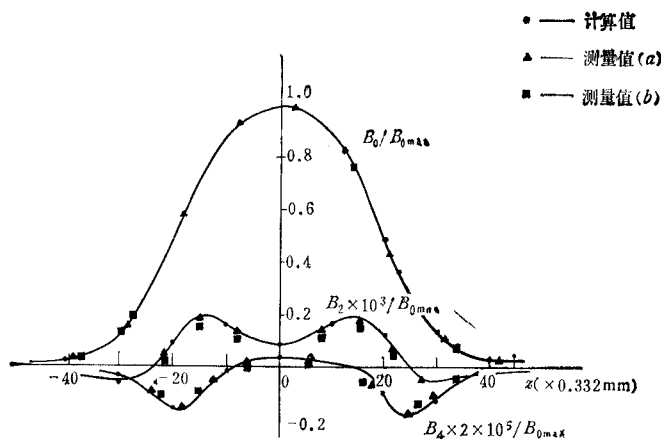


图 4 带屏蔽筒鞍形偏转线圈场参数

对图 3(b) 所给出的模型进行了实验测定, 发现其端部场参数与图 3(a) 有差异, 如图 4 中标“■”号所示。若将 (4) 式的被积函数作相应变换, 便可获得图 3(b) 这类绕组端耳与 z 轴倾斜时的场参数计算式, 但已属于另外一种偏转结构, 我们将另文讨论。

实测和计算结果同时表明屏蔽筒的存在使偏转灵敏度提高了 60%。

有关象差的计算分析, 将在另一篇文章: “磁偏转线圈优化设计”中讨论。

附 录 I

在偏转系统内任意一点由表面磁荷产生的磁标位可由式

$$\phi^{(\sigma)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{L-1} \int_{s_l} \sigma_l(r_{cs}) \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{cs}) ds_l \quad (I.1)$$

确定; 式中 $s_l (l = 1, 2, 3, \dots, L-1)$ 是第 l 环子磁极的表面积; $\sigma_l(r_{cs})$ 是屏蔽筒表面磁荷密度, 这是一个未知量, 我们把匹配点选在每一子磁环的中点、并强加边界条件, 则可用子磁环上的集总磁荷密度去逼近它的连续分布。

将表面磁荷密度展开为傅里叶级数, 在二极偏转场内可以写成:

$$\sigma_l(\mathbf{r}_{cs}) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sigma_{ln}(r_{cs}, z_{cs}) \cos n\varphi_{cs}. \quad (I.2)$$

(I.1) 式中的格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{cs})$ 在圆柱坐标系中以第二类伴随勒让德函数表示的表达式为^[4]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{cs}) = \frac{1}{\pi(r r_{cs})^{1/2}} \left\{ Q_{-\frac{1}{2}}[\alpha(r, z; r_{cs}, z_{cs})] + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_{cs}) Q_{m-\frac{1}{2}}[\alpha(r, z; r_{cs}, z_{cs})] \right\}. \quad (I.3)$$

将 (I.3) 式、(I.2) 式和 $ds_l = r_{cs} dz_{cs} d\varphi_{cs}$ 代入 (I.1) 式, 并注意正交函数集:

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi_{cs} \cos m(\varphi - \varphi_{cs}) d\varphi_{cs} = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \pi \cos m\varphi, & n = m. \end{cases} \quad (I.4)$$

进行积分、化简整理得:

$$\phi^{(\sigma)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \phi_m^{(\sigma)}(r, z) \cos m\varphi. \quad (I.5)$$

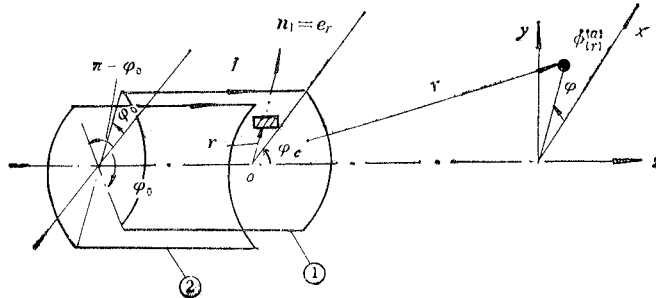
其 m 次谐波磁位:

$$\phi_m^{(\sigma)}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{L-1} \left(\frac{r_{cs}}{r}\right)^{1/2} \sigma_{lm}(r_{cs}, z_{cs}) \int_{z_l - \frac{1}{2}h_l}^{z_l + \frac{1}{2}h_l} Q_{m-1/2}(\alpha(r, z; r_{cs}, z_{cs})) dz_{cs}. \quad (I.6)$$

考虑到源点位于屏蔽筒内表面, 因而 $r_{cs} \rightarrow R_s$, (7) 式得证。

另一方面, 鞍形绕组产生的磁标位为:

$$\phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \phi_1^{(a)}(\mathbf{r}) + \phi_2^{(a)}(\mathbf{r}), \quad (I.7)$$



附图1 鞍形绕组结构

下标 1, 2 分别表示绕组①和②, 如附图 1 所示.

在圆柱坐标系中, 格林函数的梯度的径向分量为:

$$\left[\nabla_c \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} \right]_r = \nabla_c \left\{ \frac{1}{\pi(r r_c)^{1/2}} \left[Q_{-1/2}(\alpha(r, z; r_c, z_c)) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_c) Q_{m-1/2}(\alpha(r, z; r_c, z_c)) \right] \right\}_r, \quad (1.8)$$

这里宗量

$$\alpha(r, z; r_c, z_c) = 1 + \frac{(r - r_c)^2 + (z - z_c)^2}{2r r_c}. \quad (1.9)$$

对 (1.8) 式微分, 化简得:

$$\left[\nabla_c \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} \right]_r = \frac{1}{2\pi(r r_c)^{1/2}} \left[\left(2\bar{\alpha} Q'_{-1/2} - \frac{1}{r_c} Q_{-1/2} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_c) \left(2\bar{\alpha} Q'_{m-1/2} - \frac{1}{r_c} Q_{m-1/2} \right) \right], \quad (1.10)$$

其中

$$\bar{\alpha} = \frac{r_c^2 - r^2 - (z - z_c)^2}{2r r_c^2}. \quad (1.11)$$

注意到绕组①、②对称放置且结构全同, 其单位法向矢量的径向分量分别为:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_r. \quad (1.12)$$

它们的方位角在附图 1 的符号规则下有

$$\varphi_{c1} \in [-\varphi_0, \varphi_0]; \quad \varphi_{c2} \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]. \quad (1.13)$$

将以上各关系代入(4)式, 得到 $\phi_1^{(a)}$ 和 $\phi_2^{(a)}$ 的表达式:

$$\phi_1^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} r_c dz_c \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \mathbf{e}_r \cdot \left[\nabla_c \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} \right]_r d\varphi_c, \quad (1.14)$$

$$\phi_2^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} r_c dz_c \int_{\pi-\varphi_0}^{\pi+\varphi_0} -\mathbf{e}_r \cdot \left[\nabla_c \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} \right]_r d\varphi_c. \quad (1.15)$$

将 (1.10) 式代入 (1.14), (1.15), 经积分, 化简整理, 得:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(a)}(\mathbf{r}) &= \frac{NI}{8\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r_c}{\pi(r r_c)^{1/2}} \left[\left(2\bar{\alpha} Q'_{-1/2} - \frac{1}{r_c} Q_{-1/2} \right) \cdot 2\varphi_0 \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi_0}{m} \cos m\varphi \cdot \left(2\bar{\alpha} Q'_{m-1/2} - \frac{1}{r_c} Q_{m-1/2} \right) \right] dz_c, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(a)}(\mathbf{r}) &= \frac{NI}{8\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r_c}{\pi(r r_c)^{1/2}} \left[\left(\frac{1}{r_c} Q_{-1/2} - 2\bar{\alpha} Q'_{-1/2} \right) \cdot 2\varphi_0 \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi_0}{m} \cos m\varphi \left(2\bar{\alpha} Q'_{m-1/2} - \frac{1}{r_c} Q_{m-1/2} \right) \right] dz_c, \end{aligned} \quad (1.17)$$

式中 $Q'_{-1/2}$, $Q'_{m-1/2}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) 表示勒让德函数对宗量 α 的微分.

对 (1.16), (1.17) 两式求和, 经整理便得:

$$\phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m^{(a)}(r, z) \cos m\varphi, \quad (\text{I.18})$$

其中 m 次谐波磁位:

$$\phi_m^{(a)}(r, z) = \frac{NI \sin m\varphi_0}{\pi m} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\pi(r r_c)^{1/2}} (2\bar{\alpha} r_c Q'_{m-1/2} - Q_{m-1/2}) dz_c. \quad (\text{I.19})$$

当源点坐标 $r_c \rightarrow R$ 时, 使得(8)式。当 $r \rightarrow R_s$, $z \rightarrow z_s$ 时, 便得到绕组在屏蔽筒内表面产生的磁标位计算式。

附 录 II

圆柱坐标系中格林函数可表为:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^{-1} &= [(r \cos \varphi - r_c \cos \varphi_c)^2 + (r \sin \varphi - r_c \sin \varphi_c)^2 + (z - z_c)^2]^{-1/2} \\ &= [r^2 + r_c^2 + (z - z_c)^2 + 2r r_c \cos(\varphi - \varphi_c)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

其中

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (\text{II.2})$$

$$\mathbf{r}_c = r_c \cos \varphi_c \mathbf{i} + r_c \sin \varphi_c \mathbf{j} + z_c \mathbf{k}. \quad (\text{II.3})$$

设

$$L^2 = r^2 + r_c^2 + (z - z_c)^2, \quad (\text{II.4})$$

(II.1) 可改写为:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^{-1} = [L^2 - 2r r_c \cos(\varphi - \varphi_c)]^{-1/2} = L^{-1} \left[1 - \frac{2r r_c}{L^2} \cos(\varphi - \varphi_c) \right]^{-1/2}. \quad (\text{II.5})$$

当 $r \approx r_c$ 时, 上式可展开为马克劳林级数, 考虑到二极偏转场的对称性, 展开式仅取保留到五次的奇次项, (II.5) 可表为:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^{-1} &= \frac{1}{L} \left\{ 1 + \frac{r r_c}{L^2} \cos(\varphi - \varphi_c) + \frac{5}{2} \cdot \frac{r^3 r_c^3}{L^6} \cos^3(\varphi - \varphi_c) \right. \\ &\quad \left. + \frac{63}{8} \cdot \frac{r^5 r_c^5}{L^{10}} \cos^5(\varphi - \varphi_c) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

利用

$$\cos^2(\varphi - \varphi_c) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\varphi - \varphi_c)], \quad (\text{II.7})$$

$$\cos^3(\varphi - \varphi_c) = \frac{1}{4} [3 \cos(\varphi - \varphi_c) + \cos 3(\varphi - \varphi_c)], \quad (\text{II.8})$$

$$\cos^5(\varphi - \varphi_c) = \frac{5}{8} \cos(\varphi - \varphi_c) + \frac{5}{16} \cos 3(\varphi - \varphi_c) + \frac{1}{16} \cos 5(\varphi - \varphi_c) \quad (\text{II.9})$$

等关系, 代入(II.6), 经整理化简得到:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^{-1} &= \left(\frac{1}{L} + \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2 r_c^2}{L^5} + \frac{105}{64} \cdot \frac{r^4 r_c^4}{L^9} + \dots \right) + \left(\frac{r r_c}{L^3} + \frac{15}{8} \cdot \frac{r^3 r_c^3}{L^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{315}{64} \cdot \frac{r^5 r_c^5}{L^{11}} + \dots \right) \cdot \cos(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{r^2 r_c^2}{L^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{35}{16} \cdot \frac{r^4 r_c^4}{L^9} + \dots \right) \cdot \cos 2(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{r^3 r_c^3}{L^7} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{315}{128} \cdot \frac{r^5 r_c^5}{L^{11}} + \dots) \cdot \cos 3(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{35}{64} \cdot \frac{r^4 r_c^4}{L^9} + \dots \right) \\
& \cdot \cos 4(\varphi - \varphi_c) + \left(\frac{63}{128} \frac{r^5 r_c^3}{L^{11}} + \dots \right) \cdot \cos 5(\varphi - \varphi_c). \quad (\text{II.10})
\end{aligned}$$

附 录 III

在完成第二节中(12)–(18)式的各谐波磁位积分时,将遇到定积分:

$$J_k = \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz_c}{L^k} = \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz_c}{[r^2 + r_c^2 + (z - z_c)^2]^{k/2}}, \quad (\text{III.1})$$

$$k = 3, 5, 7, 9, 11, 13.$$

设 $a^2 = r^2 + r_c^2$, $t = z - z_c$, 则 $dz_c = -dt$, 于是

$$J_k = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-dt}{(a^2 + t^2)^{k/2}}. \quad (\text{III.2})$$

令 $t = atgu$, 则 $dt = a \sec^2 u du$, 故

$$\begin{aligned}
J_k &= - \int_{u_1}^{u_2} \frac{a \sec^2 u du}{(a^2 \sec^2 u)^{k/2}} = \frac{1}{a^{k-1}} \left[\frac{1}{k-2} \cos^{(k-3)} u \cdot \sin u \right]_{u_1}^{u_2} \\
&+ \frac{k-3}{k-2} \int_{u_1}^{u_2} (\cos u)^{(k-4)} du, \quad (\text{III.3})
\end{aligned}$$

其中积分限:

$$u_1 = \text{arctg} \left(\frac{z - z_c + \frac{1}{2} h_l}{R_s} \right), \quad (\text{III.4})$$

$$u_2 = \text{arctg} \left(\frac{z - z_l - \frac{1}{2} h_{l+1}}{R_s} \right). \quad (\text{III.5})$$

对于绕组的积分限为:

$$u_1 = \text{arctg} \left(\frac{z - z_1}{R} \right), \quad (\text{III.6})$$

$$u_2 = \text{arctg} \left(\frac{z - z_2}{R} \right). \quad (\text{III.7})$$

取相应幂次,完成对(III.3)式积分,便得到(24)式.

参 考 文 献

- [1] W. Schwertfeger and E. Kasper, *Optik*, 4(1974), 160.
- [2] E. Munro, *J. Vac. Sci. Techn.*, 12(1975), 1146.
- [3] 西门纪业, 陈文雄, *物理学报*, 28(1979), 201.
- [4] D. M. Fye, *J. Appl. Phys.*, 50(1979), 17.
- [5] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, MacMillon, New York, 1968.
- [6] E. F. Ritz, *Advances in Electronics and Electron Physics*, Vol. 49, Academic Press, 1979, p. 297.
- [7] 丁守谦, *物理学报*, 30(1981), 459.

THE DETERMINATION OF THE FIELD PARAMETERS OF SADDLE DEFLECTION YOKE WITH A FERROMAGNETIC SHIELD

Xie Zhixing, Huang Daquan, Shen Qinggai
(*Zhejiang University*)

The analysis and computation of the field distribution of the saddle deflection coil with a ferromagnetic shield by the boundary element method are described, and the limitations of the model proposed by D. M. Fye (1979) is pointed out. The Green's function is expanded by the Maclaurin series, and the analytical forms of the field parameters B_0 , B_2 and B_4 are given. The results obtained agree well with the experimentally measured values.