

有限字长对自适应噪声对消器 输出信噪比的限制

赵淑清

(哈尔滨工业大学无线电工程系, 哈尔滨 150006)

摘要 本文讨论了 LMS 自适应噪声对消器的有限字长效应。推导了包括量化噪声和截断噪声的输出信噪比的理论公式。如果某个量化字长能反映出输出弱信号的变化, 输出信噪比主要取决于自适应运算的字长。

关键词 自适应滤波器; 自适应噪声对消器; 量化噪声

1. 引言

用最小均方(LMS)算法实现自适应噪声对消器, 其输出信噪比除了与参考输入的信噪比有关外, 还受权噪声和有限字长产生的截断噪声的限制。一般情况下, 输出信噪比达不到理论上的最佳值。首先输出信噪比取决于选取的字长。在字长足够长的条件下, 主要的限制则是梯度估计误差引起的权噪声。两种因素的影响使得自适应噪声对消器的对消能力受到限制, 有时甚至难以正常工作。近年来, 人们对 LMS 算法的舍入误差和量化误差进行了一些研究^[1,2]。本文将讨论量化误差和有限字长截断误差对 LMS 自适应噪声对消器输出信噪比的影响。

本文关于字长效应的讨论虽然是针对 LMS 自适应滤波器用于噪声对消情况, 字长效应的分析方法同样适用于其他用途的自适应滤波器, 如谱线增强和自适应预测等。

2. 有限字长引起的权系数截断噪声

由 LMS 算法的递推公式^[3], 自适应横向滤波器的权系数向量为

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + 2\mu\epsilon(k)\mathbf{X}(k) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{X}(k)$ 为参考输入向量, μ 是自适应收敛系数。自适应噪声对消器的输出

$$\epsilon(k) = d(k) - \mathbf{W}^T(k)\mathbf{X}(k) \quad (2)$$

式中 $d(k)$ 为主输入信号。

为了仿真有限字长定点运算, 对 (1) 式在第 k 次迭代时附加一个量化噪声向量 $\mathbf{N}_w(k)$, 并用 $\mathbf{W}'(k)$ 表示有限字长运算时的权向量

$$\mathbf{W}'(k) = \mathbf{W}'(k-1) + 2\mu\epsilon(k-1)\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{N}_w(k) \quad (3)$$

将第 $k-1$ 次迭代时的输出 $\epsilon(k-1)$ 代入上式, 先不考虑第 $k-1$ 次迭代输出存在的截断噪声

$$\mathbf{W}(k) = \mathbf{W}'(k-1) + 2\mu[d(k-1) - \mathbf{W}'^T(k-1)\mathbf{X}(k-1)]\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{N}_w(k) \quad (4)$$

假定所有存贮器和运算器都是 b 位字长,那么 $\mathbf{X}(k)$ 和 $\mathbf{W}(k)$ 的每个元素以及 $d(k)$ 也具有 b 位字长, $\mathbf{W}'^T(k-1)\mathbf{X}(k-1)$ 具有 $2b$ 位字长,必须截取 b 位参加运算。对(4)式运算共需要 $2L+1$ 次乘法,等效有 $2L+1$ 个截断噪声。

若 $n_{1i}(k)$ 为 $w_i(k-1)x_i(k-1)$ 的截断噪声, $i=1,2,\dots,L$;

$n_2(k)$ 为 $2\mu[d(k-1) - \mathbf{W}'^T(k-1)\mathbf{X}(k-1)]$ 的截断噪声;

$n_3(k)$ 为 $2\mu[d(k-1) - \mathbf{W}'^T(k-1)\mathbf{X}(k-1)]\mathbf{X}(k-1)$ 的截断噪声。由(4)式

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(k) = \mathbf{W}'(k-1) + \{2\mu[d(k-1) - \mathbf{W}'^T(k-1)\mathbf{X}(k-1) + \sum_{i=1}^L n_{1i}(k)] \\ + n_2(k)\}\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{N}_3(k) \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式整理后与(4)式比较,得到

$$\mathbf{N}_w(k) = n(k)\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{N}_3(k) \quad (6)$$

其中 $n(k)$ 为标量

$$n(k) = 2\mu \sum_{i=1}^L n_{1i}(k) + n_2(k)$$

对以上截断噪声的假设与奥本海姆^[9]对误差的假设相同。如果是舍入运算,还可进一步假设截断噪声均值为零。此外,一般还假设参考输入是方差为 σ_x^2 的零均值平稳序列,相继采样之间是不相关的。

由以上假设,截断噪声向量的相关阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{N_w} = E\{[n(k)\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{N}_3(k)][n(k)\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{N}_3(k)]^T\} \\ = \left\{4\mu^2 \sum_{i=1}^L E[n_{1i}^2(k)] + E[n_2^2(k)]\right\} \mathbf{R}_X + \mathbf{R}_{N_3} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 \mathbf{R}_X 和 \mathbf{R}_{N_3} 分别为 $\mathbf{X}(k)$ 和 $\mathbf{N}_3(k)$ 的自相关阵。尽管是对不同量纲的量进行有限字长截断,但截断噪声的大小只与字长 b 有关。若用 σ_n^2 表示每个截断噪声的方差,(7)式可表示为

$$\mathbf{R}_{N_w} = (4\mu^2 L\sigma_n^2 + \sigma_n^2)\mathbf{R}_X + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (8)$$

式中 \mathbf{I} 为 L 阶单位矩阵。因此权系数总的截断噪声功率等于

$$tr \mathbf{R}_{N_w} = L\sigma_n^2(1 + 4\mu^2 L\sigma_x^2 + \sigma_x^2) \quad (9)$$

这里 tr 表示矩阵的迹, σ_x^2 是输入信号的方差。

3. 有限字长对输出的影响

如果用 $\varepsilon'(k)$ 表示第 k 次的迭代时有限字长运算的输出,并设输出端总的截断噪声为 $n_0(k)$, (2)式改写为

$$\varepsilon'(k) = d(k) - \mathbf{X}^T(k)\mathbf{W}'(k) + n_0(k) \quad (10)$$

类似前面的分析,输出端总的截断噪声为

$$n_0(k) = \mathbf{X}^T(k)\mathbf{N}_w(k) + \sum_{i=1}^L n_{4i}(k) \quad (11)$$

式中 $n_{4i}(k)$ ($i=1,2,\dots,L$) 表示对乘积截断产生的截断噪声。由此可得到输出端截

断噪声的总功率

$$\begin{aligned} E[n_0^2(k)] &= E[\mathbf{X}^T(k)\mathbf{N}_w(k)]^2 + E\left[\sum_{i=1}^L n_{i_i}(k)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^L E[x_i^2(k)]E[n_{w_i}^2(k)] + \sum_{i=1}^L E[n_{i_i}^2(k)] \end{aligned} \quad (12)$$

上式利用了 $\mathbf{X}(k)$ 的各分量与 $\mathbf{N}_w(k)$ 的各分量之间是不相关的假设。仍用 σ_n^2 表示截断噪声 $n_{i_i}(k)$ 的方差, 并考虑到失调系数 M 与 μ 的关系

$$E[n_0^2(k)] = \sigma_n^2(L + L\sigma_x^2 + L\sigma_x^4 + 4M^2) \quad (13)$$

对于补码截尾运算, 每个截断噪声的均方值为 $2^{-2b}/3$, 输出总的截断噪声功率为

$$E[n_0^2(k)] = (2^{-2b})(L + L\sigma_x^2 + L\sigma_x^4 + 4M^2)/3 \quad (14)$$

上式中失调系数 M 一般取 10% 左右, 因此 $4M^2$ 项可忽略。它与 (4) 式中 $\mathbf{W}^T(k-1)\mathbf{X}(k-1)$ 乘积的截断噪声功率有关。而在 (4) 式中没有考虑的第 $k-1$ 次迭代时输出引入的截断噪声

$$n_0(k-1) = \varepsilon'(k-1) - \varepsilon(k-1) \quad (15)$$

反映到输出端也带有 $4M^2$ 因子。一般情况下, $E[n_0^2(k-1)]$ 又很小, 忽略它同样是合理的。

如果选自适应滤波器的阶数 $L=3$, 参考输入的功率为 0.5, 主输入端信号分量的功率为 4×10^{-3} 。理论上输出的信噪比是参考输入信号/干扰比 (SIR)_{ref} 的倒数, 但当字长 $b=7$ 时, 输出端信号与截断噪声功率之比 (SNR)_{out} 为 15.8dB, 即使不考虑其他噪声分量, 输出信噪比也达不到理论最佳值。当 $b=10$ 时, (SNR)_{out} = 33.9dB, 截断噪声对输出信噪比影响相对小些。若将主输入信号分量的功率减至 4×10^{-5} , 即便 10bit 字长也只能使输出信噪比达到 13.9dB。每增加一位字长, 信噪比增加 6dB。可见自适应运算的字长对输出信噪比起着关键的作用。当信号很弱时, 尤其应该选择合适的字长。

4. 输入量化噪声对输出的影响

一般情况下, 内部噪声不能通过自适应运算对消掉。我们将两个输入信号的量化噪声做为两个不相关的内部噪声源处理。此时自适应噪声对消器的模型如图 1 所示。自适应噪声对消器的两路输入信号为

$$d(k) = s(k) + n(k) + m_0(k) \quad (16)$$

$$x(k) = s(k) * g(k) + n(k) * h(k) + m_1(k) \quad (17)$$

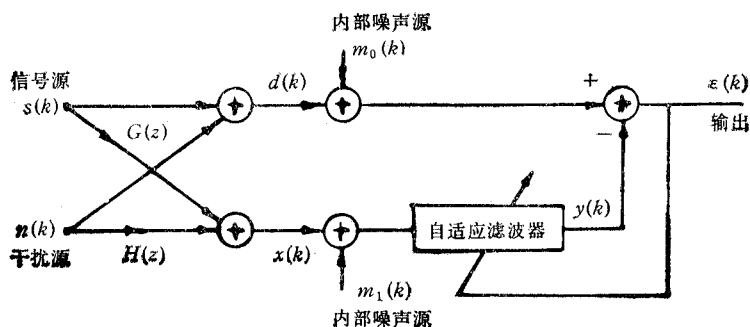


图 1 自适应噪声对消器的一般模型

式中 * 表示卷积, $s(k)$ 为信号源, $n(k)$ 是与 $s(k)$ 和内部噪声 $m_0(k), m_1(k)$ 互不相关的外部干扰源。 $g(k)$ 和 $h(k)$ 分别是信号源和外部干扰源到参考输入端传输函数的单位冲激响应。 Widrow 等人^[3]给出了最佳权系数

$$W^*(z) = \frac{S_s(z)G(z^{-1}) + S_n(z)H(z^{-1})}{S_s(z)|G(z)|^2 + S_n(z)|H(z)|^2} \quad (18)$$

其中 $S_s(z)$ 是信号功率谱, $S_n(z)$ 是干扰功率谱。由图 1, 从信号源到对消器输出的传输函数是 $1 - G(z)W^*(z)$, 从干扰源到输出的传输函数为 $1 - H(z)W^*(z)$ 。一般情况下, $|G(z)|$ 往往要比 $|H(z)|$ 小得多, $S_s(z)$ 也比 $S_n(z)$ 小得多。简化后, 求得输出信号分量的功率谱

$$(S_s(z))_{\text{out}} = S_s(z) \quad (19)$$

输出的干扰和噪声分量功率谱

$$(S_n(z))_{\text{out}} = \frac{S_s^2(z)|G(z)|^2}{S_n(z)|H(z)|^2} + S_{m_0}(z) + S_{m_1}(z) \frac{1}{|H(z)|^2} \quad (20)$$

以及输出信号/(干扰+噪声)

$$(\text{SINR})_{\text{out}} = \frac{(\text{SIR})_{\text{out}}}{1 + \frac{S_{m_0}(z)}{S_s(z)} \frac{1}{(\text{SIR})_{\text{ref}}} + \frac{S_{m_1}(z)}{S_s(z)} \frac{1}{(\text{SIR})_{\text{ref}}} \frac{1}{|H(z)|^2}} \quad (21)$$

如果分别用 $m_0(k), m_1(k)$ 表示 $d(k), x(k)$ 的量化噪声, 即可利用上式求出量化噪声对输出噪声的贡献。

假定传输函数 $|H(z)| = 1$, 信号源功率为 4×10^{-3} , 主输入信干比 $(\text{SIR})_{\text{pri}}$ 和参考输入信干比 $(\text{SIR})_{\text{ref}}$ 分别为 -20dB 和 -40dB , 最佳输出信干比 $(\text{SIR})_{\text{out}}$ 应是 40dB 。但是当字长 $b = 7$ 时, 量化噪声 $m_0(k), m_1(k)$ 对 $(\text{SINR})_{\text{out}}$ 的影响是 20.06dB 。无论如何, 输出信噪比也不会超过 19.94dB 。若字长 $b = 12$, 即可忽略量化噪声对输出信噪比的影响。如果信号功率降为 4×10^{-5} 时, 要使输出信噪比不受量化噪声影响, 就需要选取 15bit 加符号位。

当信号分量很弱时, 有限量化字长对输出信噪比限制很大。输入的量化字长只需反映出弱信号的变化, 继续加长量化字长并不能带来多大益处。输出信噪比的改善取决于自适应运算的字长。随着运算器的字长增长, 可使输出信噪比有所提高。可用(13)式和(21)式估计运算字长和量化字长对输出信噪比的限制。

参 考 文 献

- [1] C. Caraiscos, B. Liu, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-32 (1984)2, 34—41.
- [2] Neil J. Bershad, *IEEE Trans. on Assp*, ASSP-37 (1989) 10, 1504—1512.
- [3] B. Widrow et al., *Proc. IEEE*, 63 (1975) 12, 1692—1716.
- [4] A. V. Oppenheim, R.W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1975), Ch. 9.

THE RESTRICTION ON OUTPUT SNR BY FINITE WORD LENGTH IN ADAPTIVE NOISE CANCELLER

Zhao Shuqing

(*Harbin Institute of Technology, Harbin 150006*)

Abstract The effects of finite word length in LMS adaptive noise canceller are discussed. The theoretical formula of output signal-to-noise ratio involving quantization noise and round-off noise are derived. If the variation of input weak signal can be reflected by certain word length, the output SNR mainly depends on the word length of adaptive operations.

Key words Adaptive filter; Adaptive noise canceller; Quantization noise