

平面波在三维完全匹配层中的传播特性¹

马国忠 许家栋 H. Henke*

(西北工业大学电子工程系 西安 710072)

*(University Of Berlin, Germany, Berlin D-10587)

摘要 完全匹配层 (PML) 良好的吸波特性已成功地用于 FDTD 问题。Katz 给出了三维问题分量场所满足的 12 个微分方程, 但未对波在 PML 中的传播特性进行讨论。本文基于 Katz 的微分方程组, 推导出了平面波解、波数及其阻抗。

关键词 完全匹配层, 吸收边界条件, 时域有限差分, 截断面

中图分类号 TN011

1 引言

在时域有限差分 (FDTD) 的计算中, 对于开域问题, 差分迭代不能在无限域内完成, 必需给计算域一个截断。在每个截断面上要建立人工的边界条件。它使向外传播的波在穿过截断面时, 无反射发生。为了达到这一目的, 在 70 年代中期, Lindman 和 Engquist 等人创立了吸收边界条件 (ABC's) 的理论^[1,2]。这种传统的吸收边界条件是由单向波动方程导出, 把截断面上的场用一个特殊的一阶或高阶差分式表示。但是它仅能在有限的几个入射方向有良好的吸波特性, 如果要使所有方向的外行波都能被有效地吸收, 截断面必需远离散射体或辐射源。1994 年 Berenger 引进了完全匹配层 (PML) 的概念^[3]。它是应用某种依赖于方向的、满足匹配条件的导电和导磁媒质来吸收反射波。通常在计算域的截断面之外布置完全匹配层, 当波进入 PML 中时, 因波阻抗保持不变而无反射发生, 波幅度随波传播的距离增加而迅速衰减。当外行波到达 PML 的最外层时, 其幅度近似衰减为零。微弱的反射波在此产生, 反射波要传播到计算域之前, 又要经过完全匹配层的再次衰减。这样进入计算域的反射波是十分微弱的。与 ABC's 相比, PML 有更多的优点, 它能够对所有的频率和入射方向的波进行吸收。自然使散射或辐射体结构与截断边界的距离大为缩小。更为重要的是, 与常规的二阶或三阶吸收边界条件相比, 它的反射系数可减小为原值的 1/400 到 1/1000^[3-5]。并且可通过调节匹配层的厚度和电导率来控制反射误差。

2 在三维完全匹配层中的平面波

完全匹配层是一种特殊的媒质, 它的电导率和磁导率依赖于波的传播方向, 它们可表示为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 和 $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$ 。矢量场的每一个分量 E_x, E_y, E_z ; H_x, H_y, H_z 可分解成两个子分量 $E_{xy}, E_{xz}, E_{yx}, E_{yz}, E_{zx}, E_{zy}$, $H_{xy}, H_{xz}, H_{yx}, H_{yz}, H_{zx}, H_{zy}$ 。这些子分量满足文献 [4] 给出的 12 个微分方程组。假定一个平面波在完全匹配层中传播, 不失一般性, 令 z 方向的电场分量为零, 每一个分量场满足如下形式:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \Psi, & H_y &= H_0 \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \Psi, & H_z &= H_0 \cdot \cos \theta \cdot \Psi, \\ E_x &= -E_0 \cdot \sin \varphi \cdot \Psi, & E_y &= E_0 \cdot \cos \varphi \cdot \Psi, & E_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹ 1997-01-30 收到, 1997-10-05 定稿

这里

$$\Psi = e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}. \quad (2)$$

因为所有的子分量 $E_{xy}, E_{xz}, E_{yx}, E_{yz}, E_{zx}, E_{zy}, H_{xy}, H_{xz}, H_{yx}, H_{yz}, H_{zx}, H_{zy}$ 是由 (1) 所表示的分量场分解而得。所以它们也可用类似的形式表示:

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta_0} \cdot \Psi, \\ H_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta_0} \cdot \Psi, \end{aligned} \right\} \alpha\beta = xy, xz, yx, yz, zx, zy. \quad (3)$$

把 12 个子分量代入 Katz 所给出的方程组^[4], 可得到平面波在三维 PML 中的解:

$$k_x = (\cos \varphi / \eta \cdot \cos \theta) [\eta^2 - (\omega \mu_0 - j \sigma_z^*) / (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_x) \sin^2 \theta] \cdot (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_x), \quad (4a)$$

$$k_y = (\sin \varphi / \eta \cdot \cos \theta) [\eta^2 - (\omega \mu_0 - j \sigma_z^*) / (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_x) \sin^2 \theta] \cdot (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_y), \quad (4b)$$

$$k_z = -(1/\eta) \sin \theta \cdot (\omega \mu_0 - j \sigma_z^*), \quad (4c)$$

$$\eta^2 = \left(\frac{E_0}{H_0} \right)^2 = \cos^2 \theta \left/ \left[\cos^2 \varphi \frac{\omega \varepsilon_0 - j \sigma_x}{\omega \mu_0 - j \sigma_x^*} + \sin^2 \varphi \frac{\omega \varepsilon_0 - j \sigma_y}{\omega \mu_0 - j \sigma_y^*} \right] + \frac{\omega \mu_0 - j \sigma_z^*}{\omega \varepsilon_0 - j \sigma_x} \cdot \sin^2 \theta. \right. \quad (4d)$$

η 为平面波在 PML 中的波阻抗, 用 Z_0 表示自由空间波阻抗。当匹配条件满足时,

$$k_x = Z_0 \cos \varphi \cos \theta \cdot (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_x), \quad (5a)$$

$$k_y = Z_0 \sin \varphi \cos \theta \cdot (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_y), \quad (5b)$$

$$k_z = -Z_0 \sin \theta \cdot (\omega \varepsilon_0 - j \sigma_z). \quad (5c)$$

把 (5a) ~ (5c) 式代入 (2) 式, 得到平面波解的表达式:

$$\begin{aligned} \Psi &= \exp j\omega \left(t - \frac{x \cos \varphi \cos \theta + y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \theta}{c} \right) \exp \left(\frac{-\sigma_x \cos \varphi \cos \theta}{c \varepsilon_0} x \right) \\ &\times \exp \left(\frac{-\sigma_y \sin \varphi \cos \theta}{c \varepsilon_0} y \right) \exp \left(\frac{\sigma_z \sin \theta}{c \varepsilon_0} z \right). \end{aligned} \quad (6)$$

上式中 c 为平面波在自由空间传播的速度, (1) 式定义的平面波的玻印廷矢量很易求出, 其 z 分量是 $-\sin \theta$, 故第四项表示波的传播方向始终是在 $-z$ 方向传播。特别当 $\theta = 0$, 三维的平面波就变为 Berenger 所讨论的二维 TE 波的情况^[3]。

3 计算结果

为了测试 PML 的误差精度, 通常采用一个脉冲点源作为辐射源, 它定义为^[6]

$$E(0, t) = \begin{cases} \alpha \cdot (10 - 15 \cos \omega_1 t + 6 \cos \omega_2 t - \cos \omega_3 t), & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases} \quad (7)$$

这里 0 是源的位置, 幅度 $\alpha = 1/320$, 脉冲宽度为 $\tau = 10^{-9} s$, 角频率 $\omega_m = 2\pi m/\tau$ rad/s ($m=1,2,3$), 时间间隔 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-11} s$, 网格尺度为 $\delta = 2 \cdot c \cdot \Delta t$ 。

取两个嵌套的区域 Ω_b 和 Ω_s , 如图 1 所示。在这两个区域中可采用 FDTD 迭代公式计算出脉冲源的辐射场。最长的测试时间 T 要适当地选取, 在 T 时刻之前, 脉冲源的辐射场

的波峰要通过 Ω_s 的截断边界, 但测试脉冲不能传播到 Ω_b 的截断边界。这样在小区域 Ω_b 的边界上需要用 PML, 相应算出 T 时刻的场 E_s^{n+1} 耦合了截断边界的反射波。而通过大的迭代域 Ω_b , 算出 Ω_s 内相应点场 E_b^{n+1} 是不受反射波干扰的, 因为辐射场没有波及到 Ω_b 的截断边界。一般采用计算全局误差 (Global Error) 来检验 PML 的精度 [6], 它定义为

$$\text{error} = \sum_i \sum_j \sum_k [E_b^{n+1}(i, j, k) - E_s^{n+1}(i, j, k)]^2. \quad (8)$$

式中 (i, j, k) 是 Ω_s 内所有网格节点的坐标。

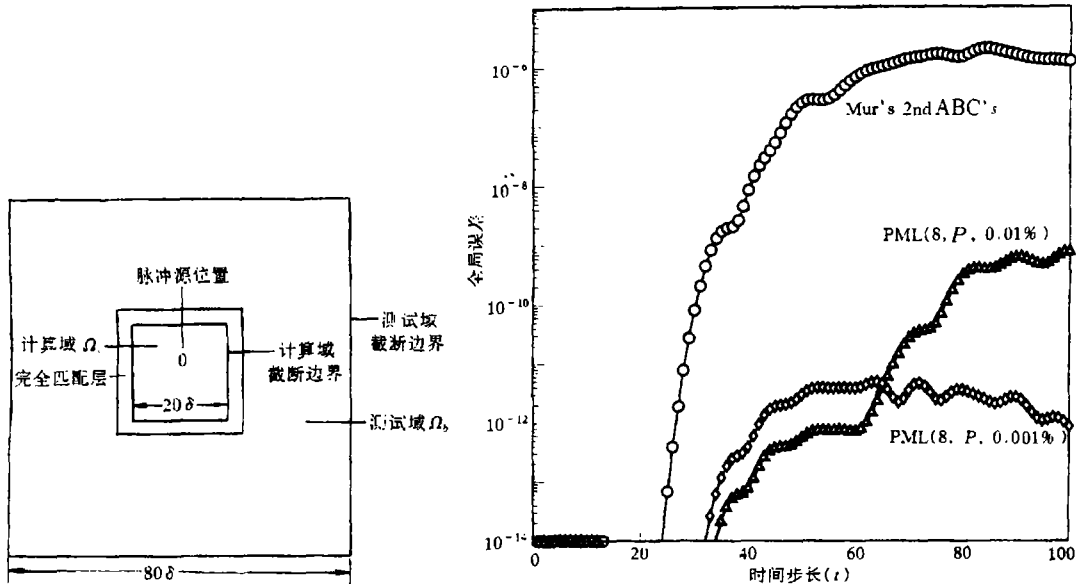


图 1 应用完全匹配层的计算域 Ω_s 和误差计算的测试域 Ω_b 。

图 2 对比应用完全匹配层和 Mur's 二阶吸收边界条件所产生的全局误差

取 $\Omega_s = 21\delta \times 21\delta \times 21\delta$, 在 Ω_s 的每一侧布置 8 层 PML。 $\Omega_b = 81\delta \times 81\delta \times 81\delta$, 脉冲源放在这两个嵌套的区域中心。在 Ω_b 内, 入射波用了 2×40 个时间步长才到达区域的截断面, 一般取此为最长测试时间。考虑到反射波进入到 Ω_s , 还需 $2 \times 30\Delta t$ 。因此, 测试时间上限可以略加放宽, 这里取 $100\Delta t$ 作为测试时间。

图 2 给出了脉冲源在应用完全匹配层和二阶 Mur's 吸收边界条件下的全局误差 [7]。Mur 方法的误差是 10^{-6} 量级, PML(8, P, 0.001%) 的误差是 10^{-12} 。这里 P 表示导电率随匹配层厚度的平方变化, 反射误差控制在 0.001%。计算结果比文献 [4] 给出的结果更好。文献 [3,5] 给出的二维问题的结论也验证了 PML 的有效性。

参 考 文 献

- [1] Lindman E L. Free-space boundary conditions for the time dependent wave equation. J.Comput. Phys., 1975,18(1): 66-78.
- [2] Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. Math.Comp., 1977, 31(139): 629-651.
- [3] Berenger J P. Perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic wave. J. Comput. Phys., 1994, 114(2): 185-220.

- [4] Katz D S, *et al.* Validation and extension to three dimension of the Berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 1994, 4(8): 268-270.
- [5] Andrew W V, *et al.* *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 1995, 5(6): 192-194.
- [6] Moor T G, *et al.* Theory and application of radiation boundary operators. *IEEE Trans. on AP*, 1988, AP-36(12): 1797-1812.
- [7] Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. on EMC*, 1981, EMC-23(4): 377-382.

PROPAGATION CHARACTERS OF PLANE WAVE IN THE PERFECTLY MATCHED LAYER

Ma Guozhong Xu Jiadong H. Henke*

(Department of Electronic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**(University of Berlin, Germany, Berlin D-10587)*

Abstract The Perfectly Matched Layer(PML)is very effective in absorbing propagating wave, so that it has been successfully applied in FDTD research. Katz(1994) derived 12 differential equations in three-dimensional PML, but there is no conclusion for the propagation characters of plane wave in PML such as wave expression ,wave number and wave impedance. These characters are investigated in this paper.

Key words Perfectly matched layer, Absorbing boundary conditions, Finite difference time domain, Truncation

马国忠：男，1960年生，副教授，从事天线和电磁数值方法的研究。

许家栋：男，1948年生，教授，博士生导师，信息工程学院院长。从事电磁场和微波技术的研究。

H.Henke：男，1944年生，德国工学博士，从事加速器物理、电磁理论和算法等研究。