

基于测量多分辨预处理的信号去噪方法¹

文成林

(河南大学数学系 开封 475001)
(清华大学自动化系过程控制研究所 北京 100084)

摘 要 该文将多分辨分析方法与传统 Kalman 滤波方法相结合,以离散小波变换为工具,建立了一种基于测量多分辨预处理的信号去噪新方法。由于小波变换特有的低通滤波特性,能有效的抑制测量噪声,相应提高了测量信号的信噪比,从而获得比原来仅在单一尺度上进行信号处理获得好的处理效果。计算机仿真验证了算法的有效性。

关键词 多分辨分析, 离散小波变换, 测量预处理, Kalman 滤波, 目标跟踪
中图分类号 TN911.72

1 引 言

基于小波理论的多分辨分析方法无论在理论研究上还是在实际应用中都得到了很大的发展,但在随机动态系统估计领域中却进展不大^[1-6]。事实上,当假设测量是在某一分辨级上获得时,测量信息往往被噪声所淹没,而应用小波变换将测量值分解到低分辨级上,由于小波变换特有的低通滤波特性,能有效地抑制测量噪声,相应提高了测量的信噪比,能获得原来在单一尺度上进行信号去噪难以获得的处理效果,也是对测量数据进行预处理提高滤波精度的一个有效途径^[6]。由于 Kalman 滤波本质上要求尽可能多的利用测量信息,而多分辨分析能最大限度地提取信号中的各种有用信息。因此,本文将多分辨分析方法与传统 Kalman 滤波方法相结合,以离散小波变换为工具,建立一种基于测量多分辨预处理的信号去噪新方法 (Measurement Multiresolutional Preprocessing, MMP),并用计算机仿真验证了算法的有效性。在这里小波变换扮演着重要的角色,它是连接各分辨级之间的桥梁。

2 多分辨分析^[1]

多分辨分析的基本思想是:将待处理的信号用小波变换在不同的分辨级上进行分解,分解到低分辨级上的信号称之为平滑信号;在高分辨级上存在,而在低分辨级上消失的信号称之为细节信号。假设分辨级 $i(i = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ 上的信号空间为 $V_i \subset L^2(R)$,则由尺度函数 $\phi(x) \in L^2(R)$ 经伸缩平移形成的函数系 $\{2^{i/2}\phi(2^i t - k) | k \in Z\}$ 构成了 V_i 的一组标准正交基。引入 V_i 在 V_{i+1} 的正交补空间 D_i ,即

$$D_i \perp V_i \quad \text{且} \quad V_{i+1} = V_i \oplus D_i \quad (1)$$

显然, $\forall m, n \in Z(m \neq n)$ 的子空间 D_m 和 D_n 是正交的,且有

$$\forall f(x) \in D_0 \Leftrightarrow f(2^m x) \in D_m \quad (2)$$

¹ 2000-05-30 收到, 2000-12-08 定稿

国家自然科学基金、河南省自然科学基金及河南省高校杰出科研人才创新工程项目资助

因此

$$\begin{aligned} V_N &= V_{N-1} \oplus D_{N-1} = V_{N-2} \oplus D_{N-2} \oplus D_{N-1} = \cdots \\ &= V_s \oplus D_s \oplus \cdots \oplus D_{N-1}, \quad (-\infty < s < N) \end{aligned} \quad (3)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} D_i \quad (4)$$

其中 D_i 即为在空间 V_{i+1} (采样率为 2^i) 中存在, 而在空间 V_i (采样率为 2^{i-1}) 中消失的细节信号空间。

3 离散小波变换^[1]

在分辨级 i 上, 对给定的信号序列 $x(i, k) \in V_i \subset l^2(\mathbb{Z})$ ($k \in \mathbb{Z}$) 通过一个脉冲响应是 $h(k)$ 的低通滤波器可以获得低分辨级上的平滑信号 $x_V(i-1, k) \in V_{i-1}$ (分辨级 $i-1$),

$$x_V(i-1, k) = \sum_l h(2k-l)x(i, l) \quad (5)$$

这是一个从向量空间 $l^2(\mathbb{Z})$ 到它自身的变换, 下标 V 表示 $x(i, k)$ 在低一分辨级信号空间 V_{i-1} 上的投影。信号 $x(i, k)$ 在低通滤波器中丢失的“细节信号”可以由 $x(i, k)$ 通过一个脉冲响应是 $g(k)$ 的高通滤波器得到 $x_D(i-1, k) \in D_{i-1}$,

$$x_D(i-1, k) = \sum_l g(2k-l)x(i, l) \quad (6)$$

下标 D 表示 $x(i, k)$ 在细节信号空间 D_{i-1} 上的投影。原始信号 $x(i, k)$ 可由 $x_V(i-1, k)$ 和 $x_D(i-1, k)$ 完全重构, 但滤波器 $h(k)$ 和 $g(k)$ 除了要满足正则约束之外, 还须是一个正交组:

$$\sum_k \sum_l [h(2k-r)h(2k-l) + g(2k-r)g(2k-l)] = \delta_{rl} \quad (7)$$

当 $l=r$ 时, $\delta_{rl} = 1$; 当 $l \neq r$ 时, $\delta_{rl} = 0$ 。因此 (5) 式和 (6) 式可以看作离散小波变换的分析形式, 而

$$x(i, k) = \sum_l h(2l-k)x_V(i-1, l) + \sum_l g(2l-k)x_D(i-1, l) \quad (8)$$

则可以认为是离散小波变换的综合形式。在本文中假设滤波器 $h(k)$ 和 $g(k)$ 是有限持续脉冲响应 (FIR) 滤波器, 低通滤波器 $h(k)$ 是一个正交镜像滤波器 (QMF) 的脉冲响应, 且 $h(k)$ 和 $g(k)$ 形成一个共轭镜像滤波器对:

$$g(L-1-k) = (-1)^k h(k) \quad (9)$$

其中 L 是滤波器的长度。

4 系统描述

不失一般性, 假设系统方程、观测方程和测量均在某一分辨级 N (称为原始分辨级, 其采样

率为 2^{N-1}) 上得到.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k), \quad w(k) \sim N(0, Q(k)) \quad (10)$$

$$z(k) = C(k)x(k) + v(k), \quad v(k) \sim N(0, R(k)) \quad (11)$$

其中 $x(k) \in R^{n \times 1}$ 是状态向量, $A(k) \in R^{n \times n}$ 是状态转移矩阵, $C(k) \in R^{m \times n}$ 是系统观测矩阵, $z(k) \in R^{m \times 1}$ 是测量向量. $Q(k), R(k)$ 分别是系统噪声和测量噪声的协方差矩阵.

系统状态向量 $x(k)$ 的初始值 $x(0)$ 是一随机向量

$$E\{x(0)\} = x_0 \quad (12)$$

$$E\{[x(0) - x_0][x(0) - x_0]^T\} = P_0 \quad (13)$$

5 测量多分辨预处理^[2-6]

MMP 方法的基本思想是: 对测量信号进行离散小波变换, 根据系统的先验信息和细节信号的统计特性分析, 对细节信号作阈值处理, 再由离散小波逆变换重构测量信号, 作为后续 Kalman 滤波的测量值.

假设在原始分辨级 N 上得到测量 $Z_V(N) = [\cdots, z_V(N, 0), z_V(N, 1), \cdots, z_V(N, n), \cdots]$ 利用离散小波变换, 从原始分辨级 N 开始分解 $J(1 \leq J \leq N)$ 次. 经过 J 次分解得到分辨级 $N-1, N-2, \cdots, N-J$ 上的细节信号 $Z_D(N-1), Z_D(N-2), \cdots, Z_D(N-J)$ 和分辨级 $N-J$ 上的平滑信号 $Z_V(N-J)$.

$$Z_D(i) = [\cdots, z_D(i, 0), z_D(i, 1), \cdots, z_D(i, k), \cdots], \quad i = N-1, N-2, \cdots, N-J$$

$$Z_V(i) = [\cdots, z_V(i, 0), z_V(i, 1), \cdots, z_V(i, k), \cdots], \quad i = N-1, N-2, \cdots, N-J$$

其中

$$z_V(i-1, k) = \sum_l h(2k-l)z_V(i, l) = \sum_l h(l)z_V(i, 2k-l),$$

$$i = N, N-1, \cdots, N-J+1; \quad J = N-1, \cdots, 2, 1 \quad (14)$$

$$z_D(i-1, k) = \sum_l g(2k-l)z_V(i, l) = \sum_l g(l)z_V(i, 2k-l),$$

$$i = N, N-1, \cdots, N-J+1; \quad J = N-1, \cdots, 2, 1 \quad (15)$$

而分辨级 i 上的 $Z_V(i)$ 可由分辨级 $i-1$ 上的信号 $Z_V(i-1)$ 和 $Z_D(i-1)$ 完全重构, 因此利用分辨级 $N-m(1 \leq m \leq J)$ 上的平滑信号 $Z_V(N-m)$ 和分辨级 $N-1, N-2, \cdots, N-m$ 上的细节信号 $x_D(N-1), x_D(N-2), \cdots, x_D(N-m)$ 可重构分辨级 N 上的测量值 $Z_V^m(N)$.

$$z_V^m(i+1, k) = \sum_l h(2l-k)z_V^m(i, l) + \sum_l g(2l-k)z_D(i, l),$$

$$i = N-m, N-m+1, \cdots, N-1; \quad m = 1, 2, \cdots, J \quad (16)$$

上标 m 表示此结果是从分辨级 m 开始重构而得的. 因此, 分解 m 次后再分别从分辨级 $N-1, N-2, \cdots, N-m$ 重构到原始分辨级 N 上, 在原始分辨级 N 上可得到不同的预处理后的测量值: $Z_V^{N-1}(N), Z_V^{N-2}(N), \cdots, Z_V^{N-J}(N)$.

用传统 Kalman 滤波的方法对系统的状态进行最优估计^[7]。为了开始计算, 我们假设已得到基于测量值 $Z_V^{N-m}(N, k)$ ($m = 1, 2, \dots, J$) 状态 $x(k)$ 的估计值 $\hat{x}^{N-m}(k|k)$ 及估计误差方差阵 $P^{N-m}(k|k)$, 那么

$$\hat{x}^{N-m}(k+1|k+1) = \hat{x}^{N-m}(k+1|k) + K^{N-m}(k+1)[z_V^{N-m}(N, k+1) - \hat{z}_V^{N-m}(N, k+1|k)] \quad (17)$$

其中

$$\hat{x}^{N-m}(k+1|k) = A(k)\hat{x}^{N-m}(k|k) \quad (18)$$

$$\hat{z}_V^{N-m}(N, k+1|k) = C(k+1)\hat{x}^{N-m}(k+1|k) \quad (19)$$

$$K^{N-m}(k+1) = P^{N-m}(k+1|k)C^T(k+1) \times [C(k+1)P^{N-m}(k+1|k)C^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (20)$$

$$P^{N-m}(k+1|k) = A(k)P^{N-m}(k|k)A^T(k) + Q(k) \quad (21)$$

$$P^{N-m}(k+1|k+1) = [I - K^{N-m}(k+1)C(k+1)]P^{N-m}(k+1|k) \quad (22)$$

因此, 我们得到了状态 $x(N, k)$ 分别基于 $Z_V^{N-m}(N)$ ($m = 1, 2, \dots, J$) 的 J 个估计值 $\hat{x}^{N-m}(N, k|k)$ ($m = 1, 2, \dots, J$)。同时, 我们也可以在原始尺度 N 上直接进行 Kalman 滤波, 得到其估计值 $\hat{x}(N, k|k)$ 。

6 例子与仿真

本节以多目标跟踪为背景给出二维空间上一个目标的具体动态系统, 状态变量

$$x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dot{x}_1(k), \dot{x}_2(k)]^T,$$

系统的状态转移矩阵和测量矩阵分别为

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 T 是采样间隔。系统噪声的协方差阵和测量噪声协方差阵分别为

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 1/(4T^4) & 0 & 1/(2T^3) & 0 \\ 0 & 1/(4T^4) & 0 & 1/(2T^3) \\ 1/(2T^3) & 0 & T^2 & 0 \\ 0 & 1/(2T^3) & 0 & T^2 \end{bmatrix} \sigma^2, \quad R(k) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

在本例中, 采用的参数值分别为 $N = 4$, $J = 3$, $T = 1\text{s}$, $\sigma = 2 \times 9.8\text{m/s}^2$, $r = 10000\text{m}^2$ 。初始值是

$$x_0 = [20000 \quad 100000 \quad -400 \quad 0]^T,$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}.$$

采用 Daubechies 4 小波系数对系统进行计算机仿真实验, 结果表明: MMP 算法能显著地提高 Kalman 滤波的精度, 达到了预处理的目的。图 1 是目标的真实轨迹, 图 2 是真实的测量信号, 图 3 是在分辨级 4 上直接 Kalman 滤波的结果, 图 4 是采用 MMP 算法基于测量值 $Z_k^{1-3}(N)$ 的 Kalman 滤波结果。

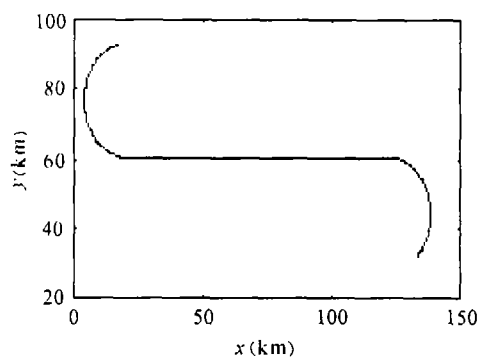


图 1 目标状态的真实轨迹

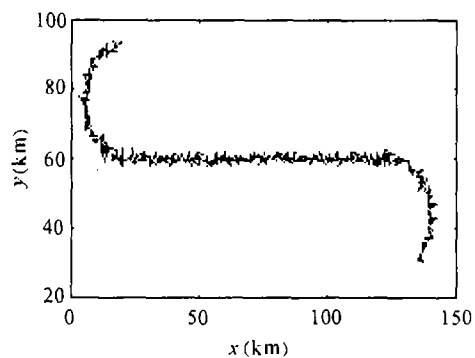


图 2 分辨级 4 上的实际测量结果

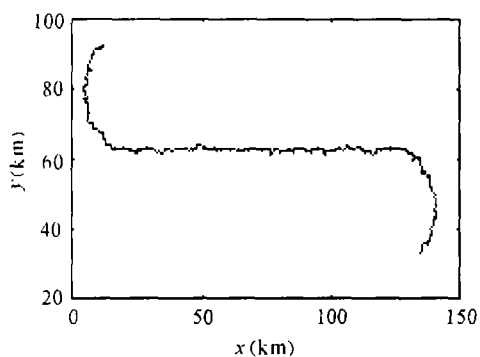


图 3 在分辨级 4 上直接 Kalman 滤波的结果

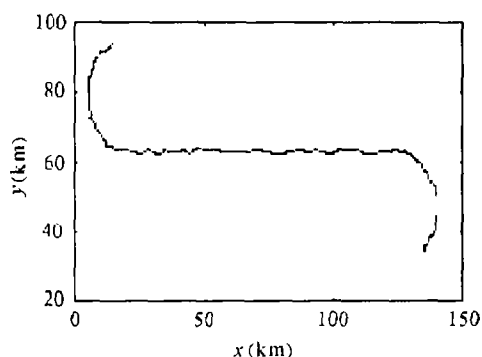


图 4 分解 3 次重构后在分辨级 4 上 Kalman 滤波的结果

7 结论与展望

在测量预处理过程中引进多分辨分析的思想是一种全新的方法, 在不增加计算量的数量级的情况下, 预处理后的 Kalman 滤波精度有明显的提高。由于具体应用背景的不同, 对采样率的要求也将不同, 如何根据不同的应用背景选择相应的分辨级将是非常有意义的; 而在自然界和工程实践中, 许多现象和过程都具有多尺度 (分辨) 特征或多尺度 (分辨) 效应, 因此人们对现象或过程的观察及测量往往也是在不同尺度 (分辨级) 上进行的, 如何将不同分辨级上的测量结果进行恰当的信息融合将具有更大的实际意义; 这些工作将是一个有意义的研究方向。

参 考 文 献

- [1] I. Daubechies, Orthonormal bases of compact support wavelets, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 1988, 41, 909-996.
- [2] 王永德, 何培宇, 赵刚, 一种基于小波变换的自适应滤波新方案, *电子科学学刊*, 1999, 21(2), 212-218.
- [3] 徐科, 徐金梧, 一种新的基于小波变换的白噪声消除方法, *电子科学学刊*, 1999, 21(5), 706-709.
- [4] 陈哲, 冯天瑾, 小波分析与神经网络结合的研究发展, *电子科学学刊*, 2000, 22(3), 496-504.
- [5] 潘泉, 张洪才, 戴冠中, 基于阈值决策的子波域滤波算法研究, *电子学报*, 1998, 26(1), 583-586.
- [6] 郑容, 文成林, 施晨鸣, 张洪才, 多分辨多模型机动目标跟踪, *电子学报*, 1998, 26(12), 115-117.
- [7] 周宏仁, 敬忠良, 王培德, 编著, *机动目标跟踪*, 北京, 国防工业出版社, 1991年8月, 50-70.

MEASUREMENT MULTIREOLUTIONAL PREPROCESSING
METHOD IN SIGNAL DENOISING

Wen Chenglin

*(Dept. of Math., Henan University, Kaifeng 475001, China)**(Dept. of Automatic Control, Tsinghua University, Beijing 100084, China)*

Abstract This paper combines the methods of multiresolution analysis with the approaches of Kalman filtering using the tool of wavelet transform, the measurement multiresolutional preprocessing method for signal denoising is proposed. Because the wavelet transform possesses the characteristic of lowpass, it can effectively restrain noises and increase the signal to noise ratio, thereby, by use of wavelet transform the good estimation results for signal processing are obtained. Computer simulation shows that the algorithm is feasible and effective.

Key words Multiresolutional analyses, Discrete wavelet transform, Measurement preprocessing, Kalman filtering, Target tracking

文成林: 男, 1963年生, 现在清华大学自动化系控制科学与工程博士后流动站工作, 主要研究领域为函数逼近论、多尺度估计理论、多传感器信息融合、故障诊断理论与应用等。已发表论文60余篇, 出版教材5部。