

确定三维运动参数的张量分析方法*

李象霖 陈小平**

(中国科技大学研究生院,北京 100039)

(国家模式识别实验室,北京)

摘要 利用中心投影图象序列估计三维运动参数, 需要知道空间运动物体的特征与图象平面上投影坐标之间的对应关系。为了避免利用特征对应关系, 本文给出在仿射变换系统中的张量分析方法, 也给出模拟实验结果数据。

关键词 信号处理; 图象序列分析; 三维运动分析; 张量分析方法

一、引言

三维运动分析(即图象序列分析)是在图象处理基础上发展起来的重要课题之一。它的基本内容是利用空间运动物体在二维图象平面上的投影坐标, 分析和估计物体在空间的运动参数, 确定物体的结构。在已有三维运动分析的模型中, 多是基于刚体的运动模型。虽然物体在三维空间中运动时, 是在观察者的可视范围以内, 不应有任何遮挡。但是, 确定物体运动前后相继两幅投影图象上点之间的对应关系, 是一个较为复杂的问题。找出特征对应关系, 是三维运动分析中的一个难题。为了避开特征对应问题, 我们在仿射坐标系中, 对不同时刻的投影图象进行仿射变换, 求出图象的二阶矩函数, 然后利用张量分析方法, 进一步求解物体的运动参数。在分析过程中, 我们给出虚正交投影(IOP)平面的假设, 即假设运动物体与投影图象平面之间的距离大于物体表面结构。本文最后给出模拟实验数据结果。

二、一般三维运动分析

在三维运动分析的研究中, 美国伊利诺大学黄煦涛教授等^[1,2]首先给出了特征点对应的三维运动分析模型, 它的几何图形如图1所示。图1中 x, y, z 表示三维空间坐标; p_i 表示空间运动物体上一个特征点 (sharp point), 它的空间坐标为 (x_i, y_i, z_i) ; p'_i 表示物体运动后的特征点, 它的空间坐标为 (x'_i, y'_i, z'_i) 。 p_i 和 p'_i 是物体上同一特征点, p_i 表示物体运动前, 在 t_1 时刻; p'_i 表示物体运动后, 在 t_2 时刻。 P_i 是 p_i 在图象平面上的投影点, 坐标为 (X_i, Y_i) ; 同样, P'_i 是 p'_i 的投影点, 坐标为 (X'_i, Y'_i) 。严格地说, P_i 和 P'_i 应

1989年12月13日收到, 1991年7月15日修改定稿

* 国家模式识别实验室基金课题。

** 现在中科院遥感卫星地面站工作。

分别在两幅相继投影图象上,在这里,为了分析方便,画在同一图象平面上。图中 o 为坐标原点,即观察点。 F 为观察点至图象平面的距离。

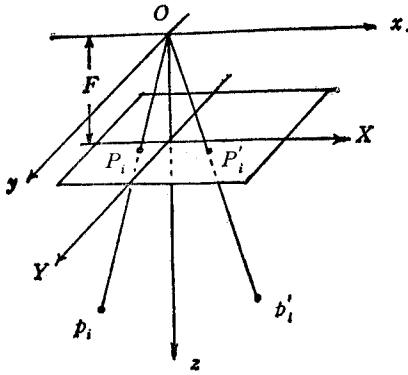


图1 三维运动分析模型的基本几何图形

所谓特征点对应关系,是指空间物体上点 p_i 和 p'_i 与其在二维图象平面上投影点 $P_i(X_i, Y_i)$ 和 $P'_i(X'_i, Y'_i)$ 之间的对应关系。依据图1的几何图形,它们之间应该满足如下关系:

运动前,在 t_1 时刻为

$$\left. \begin{aligned} X_i &= Fx_i/z_i \\ Y_i &= Fy_i/z_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

运动后,在 t_2 时刻为

$$\left. \begin{aligned} X'_i &= Fx'_i/z'_i \\ Y'_i &= Fy'_i/z'_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

物体从 t_1 时刻运动到 t_2 时刻,点 p_i 与 p'_i 之间应该满足

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + T \quad (3)$$

其中 R 为 3×3 旋转矩阵,是一正交矩阵,定义为

$$R \triangleq \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

T 为 3×1 平移矢量,定义为

$$T \triangleq \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (5)$$

这里, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 为物体在 x, y, z 三个轴方向上的平移量。(3)式为特征点对应运动模型的运动方程式。依据几何关系^[3]分析,旋转矩阵 R 的具体表达式为

$$R = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \theta & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta & n_1 n_3 (1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \theta & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta \\ n_1 n_3 (1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta & n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, θ 为围绕通过原点的轴旋转的角度; n_1, n_2, n_3 分别表示旋转轴的方向余弦。

为了求解运动参数 R 和 T ,即求解 $n_1, n_2, (n_3), \theta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$,对于在特征点对应模型情况下,人们采用了奇异值分解(SVD)法^[4]、李氏代数法^[5]和小运动量情况^[6]等,得到的多是非线性方程的数学描述,采用最小二乘方迭代算法求解。而且无论是在单摄象机情况下,还是在双摄象机情况下^[7],无论是特征点对应模型,还是直线对应模型^[8],小平面对应运动模型^[9]等等,都需要知道物体上的特征与二维图象平面上的投影之间的对应关系,还要求知道,运动后在 t_2 时刻投影点 $P'_i(X'_i, Y'_i)$ 与运动前在 t_1 时

刻投影点 $P_i(X_i, Y_i)$ ($i = 1, 2, \dots$) 之间的对应关系。这是一个十分复杂的问题。因此,为了避免特征对应关系,我们采用仿射坐标系中张量分析方法,进而确定运动参数。

三、正交投影平面

从(6)式所表示的旋转矩阵 R 看出,如果假设物体的旋转是绕 z 轴的旋转,在这种情况下, $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$, 则 R 变成:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

在无遮挡情况下,空间物体的运动是由在空间的平移和围绕 z 轴的旋转组成,此时,运动方程式为

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 (x_i, y_i, z_i) 和 (x'_i, y'_i, z'_i) 分别表示运动前和运动后物体上第 i 点的空间坐标。将(1), (2)式代入(8)式得到

$$\begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \end{bmatrix} = \alpha_i \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{x_i} \\ T_{y_i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

和

$$z'_i = z_i + \Delta z \quad (10)$$

其中

$$\alpha_i = z_i / (z_i + \Delta z) \quad (11)$$

$$T_{x_i} = F \Delta x / (z_i + \Delta z) \quad (12)$$

$$T_{y_i} = F \Delta y / (z_i + \Delta z) \quad (13)$$

现在,假设运动物体与投影图像之间的距离大于物体表面的结构,即大于物体表面 z 方向坐标的变化,如图 2 所示。图 2 中摄像机表示观察者,也就是投影图像平面 $x-y$ 。 p_i 和 p_j 是空间运动物体上两个特征点,均在可视范围以内。投影图像平面 $x-y$ 与物体之间的距离,对 p_i 点为 z_i , 对 p_j 点为 z_j , 则上述假设条件可表示为

$$|(z_i - z_j) / z| \ll \varepsilon \quad (14)$$

式中 ε 为任意小的正数。可以想像存在这样一个平面,它是物体的正交投影平面,与 z 轴垂直,坐标为 z , 我们把它称为虚正交投影平面 (Imaginary Orthogonal Projection Plane), 记做 IOP 平面, 坐标 z 即为 IOP 平面与投影图像平面 (即 $x-y$ 平面) 之间的距离。(14)式可写成

$$|\alpha_i - \alpha_j| \ll \delta \quad (15)$$

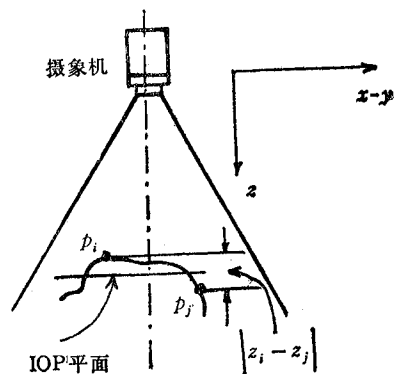


图 2 运动物体及其表面结构

式中 δ 是任意小的正数。于是就可以近似认为

$$\alpha_i \approx \alpha_j \approx \alpha. \quad (16)$$

关于 α 的取值问题, 一般情况下 α 不等于 1. 由 (11) 式可以知道, 当 $\alpha \approx 1$ 时,

$$z_i/\Delta z = \alpha/(1-\alpha) \quad (17)$$

$$\Delta x/\Delta z = T_{x_i}/[F(1-\alpha)] \quad (18)$$

$$\Delta y/\Delta z = T_{y_i}/[F(1-\alpha)] \quad (19)$$

在做了 IOP 平面的假设以后, 运动方程 (14) 式就变为

$$\begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{x_i} \\ T_{y_i} \end{bmatrix} \quad (20)$$

在这个运动方程式中, 已知的参数是投影图象平面上投影点坐标: 运动前为 (X_i, Y_i) , 运动后为 (X'_i, Y'_i) 和 α ; 未知的参数是旋转角度 θ , 平移量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 进而可求解运动参数 R 和 T . 为了避开运动前、后特征点对应问题, 我们采用张量分析方法求解未知参数.

四、仿射坐标变换

一个 r 维仿射矢量空间的参考系统是由 r 个坐标轴组成, 任意两个坐标轴之间的夹角不是直角, 而且每两个坐标轴之间的夹角也互不相等. 这样的坐标系被称为仿射坐标系^[10], 也被称为斜角直线坐标系^[11]. 笛卡尔坐标系是一种特殊的仿射坐标系.

我们考虑二维 ($r=2$) 仿射坐标系. 在一幅二维图象平面上, 用 e_1 和 e_2 表示两个坐标的基矢量. 那么, 图象平面上任意一点或任意一个通过原点的矢量 r 可以表示为

$$r = \sum_{i=1}^2 x^i e_i \quad (21)$$

式中 x^i 表示矢量 r 在基矢量 e_i 方向上的数值. 通常将 (21) 式记为

$$r = x^i e_i \quad (22)$$

这种表示方法叫做爱因斯坦求和约定, 其中 i 为哑指标, $i=1, 2$.

现在进行仿射坐标变换. 用 x^1, x^2 表示二维仿射坐标系的两个坐标轴, 它们相当于笛卡尔坐标系中的 x, y 轴. 变换前, 坐标轴为 x^1, x^2 , 对应的基矢量为 e_1, e_2 ; 变换后, 新坐标轴为 \bar{x}^1, \bar{x}^2 , 对应的基矢量为 \bar{e}_1, \bar{e}_2 . 变换前后基矢量之间的关系为

$$e_i = A^j_i \bar{e}_j \quad (23)$$

或者

$$\bar{e}_i = a^j_i e_j \quad (24)$$

式中 A^j_i, a^j_i 为坐标变换系数矩阵, 是 2×2 矩阵, 形式为

$$A = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

变换前后坐标之间的变换关系满足

$$\bar{x}^i = A^i_j x^j \quad (26)$$

如果用 x^i_g 表示物体的引力重心, 则变换前后满足

$$(\bar{x}^i - \bar{x}_g^i) = A_i^j(x^j - x_g^j) \quad (27)$$

在我们讨论的问题中, 物体是在三维空间中运动。运动前, 物体的投影图象函数为 $f(x^1, x^2)$; 运动后, 物体的方向改变, 得到一新的投影图象函数为 $\bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ 。那么, 新老图象函数之间的变换关系为

$$\bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = |J|^R f(x^1, x^2) \quad (28)$$

其中

$$J = \det[\partial x^i / \partial \bar{x}^j] = [\det(A_i^j)]^{-1} \quad (29)$$

J 为雅可比系数, R 为标量密度加权。由于我们描述的物体在空间的运动不是很大的运动, 相邻两个时刻的图象序列之间的运动比较小。所以, 这种由于物体的旋转引起的变换, 可使得运动前后的投影图象在各个对应点上保持固定的值。虽然坐标由 (x^1, x^2) 变换为 (\bar{x}^1, \bar{x}^2) , 而象素灰度保持不变, 标量密度加权 $R = 0$, 即有

$$\bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = f(x^1, x^2) \quad (30)$$

这个结果便是在仿射坐标系中投影图象函数的仿射变换^[12-14]。

五、张量分析方法

一般情况下, 张量被定义在 r 维仿射矢量空间, 用来描述某些物理量及其变换关系。由于张量具有变换性质和不变性质, 使得张量成为描述图象序列之间关系的理想工具。

物体在三维空间中运动, 其方向不断改变, 投影图象也相应改变。仿射变换与相邻时刻物体在两个方向上的投影图象有关, 因此, 可以得到图象的张量^[15]。依据前面的讨论, 物体运动前在 t_1 时刻, 投影图象函数为 $f(x^1, x^2)$ 。在二维仿射坐标系中, 我们把坐标 (x^1, x^2) 看成是一随机变量, 而把 $f(x^1, x^2)$ 看成是相应的密度函数。根据统计数学原理, 可以计算二阶中心矩函数^[16]为

$$T^{ij\cdots} = \iint (x^i - x_g^i)(x^j - x_g^j) f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 \quad (31)$$

同理, 物体运动后在 t_2 时刻, 仿射坐标变为 (\bar{x}^1, \bar{x}^2) , 相对应的图象函数, 即密度函数为 $\bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, 则二阶中心矩函数为

$$\bar{T}^{ij\cdots} = \iint (\bar{x}^i - \bar{x}_g^i)(\bar{x}^j - \bar{x}_g^j) \bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 \quad (32)$$

我们把二阶矩函数 $T^{ij\cdots}$ 和 $\bar{T}^{ij\cdots}$ 叫做图象矩函数, 也就是逆变形式的有向相对张量。因此 (31) 和 (32) 式把图象的概念与张量分析方法联系起来。又因在笛卡尔坐标系中, 逆变张量与协变张量是同一张量, 所以不失一般性, 我们只考虑逆变张量的计算。

依据 (27), (30), (31) 和 (32) 式, 可以得到运动前后相对张量之间的关系为

$$\bar{T}^{ij\cdots} = |J|^{-1} A_m^i A_n^j T^{mn\cdots} \quad (33)$$

此式中相对张量 $\bar{T}^{ij\cdots}$ 和 $T^{mn\cdots}$ 可以根据数字化的投影图象计算得到。这就是避开特征点对应的关键之处。因为, 只要把运动前后的投影图象进行数字化处理, 就可以计算图象张量 $T^{mn\cdots}$ 和 $\bar{T}^{ij\cdots}$, 而不去考虑运动前后投影图象上点之间的对应关系。下面的工作是设法求得 A_i^j 。为此, 必须知道一阶绝对张量, 即

$$\bar{S}^i = A_j^i S^j \quad (34)$$

我们可利用张量的缩并性质,从二阶张量求得一阶绝对张量。具体做法有以下两种:

$$(1) S^m = T^{ij} T^{im} / T^2 \quad (35)$$

$$(2) S^m = T^{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} T^{klm} \quad (36)$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i > j \\ -1, & i < j \end{cases} \quad (37)$$

很容易知道

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = J^{-1} \varepsilon_{mn} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \quad (38)$$

这里 ε_{ij} 的意义是带有加权 -1 的定向相对张量,被称为转换张量。在求得了一阶绝对张量之后,利用(34)式,就可以求得 A_j^i ,进而求解旋转角度 θ 。二维平移可依据下式求得:

$$T_{xy}^i = \bar{x}_g^i - A_j^i \bar{x}_g^j \quad (39)$$

到此为止,利用张量分析方法,不需要知道点对应关系,即可求解运动参数 R 和 T 。

六、模拟实验结果

用一只白兔做为运动物体进行实际测量,见图3。将图象数字化成为 230×230 大

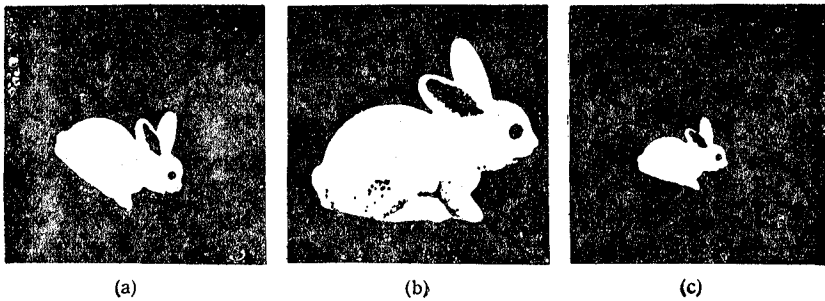


图3 运动前后兔子的图象

小的离散图象,按(31)和(32)式计算出张量,分别记做张量1和张量2。实验结果数据列于表1和表2中。表中的符号: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 表示三维平移; θ 表示旋转角度,都是实数值。 z_1 表示运动前 IOP 平面的 z 坐标; A_j^i 表示二维旋转矩阵; T_x, T_y 表示平移。

表1中的数据,表示物体向摄象机运动,即图3(a)向图3(b)。表2中的数据,表示物体背向摄象机运动,即图3(b)向图3(c)。从数据结果看出,仍存在一定误差。产生误差的原因是由于比较难做到运动前后两幅投影图象具有完全相同的亮度,以及测量误差。

表 1

实测值	$\theta = 31^\circ, \Delta x = 1.42, \Delta y = 1.73, \Delta z = -53, z_1 = 108$			
张量 1	$A_1^1 = A_2^2 = 1.55936, A_2^1 = -A_1^2 = 0.918966$			
	$T_x = 0.130000, T_y = 0.150000$			
	$\alpha = 1.81000$			
张量 2	$A_1^1 = A_2^2 = 1.57790, A_2^1 = -A_1^2 = 0.886760$			
	$T_x = 0.130000, T_y = 0.160000$			
	$\alpha = 1.81000$			
	θ	$\Delta x/\Delta z$	$\Delta y/\Delta z$	$z_1/\Delta z$
实测值	31.0000	-0.0268	-0.0326	-2.2346
张量 1	30.5118	-0.0278	-0.0321	-2.2346
误差	-0.0157	0.0393	0.0157	0.0000
张量 2	29.3355	-0.0278	-0.0343	-2.2346
误差	-0.0537	0.0393	0.0500	0.0000

表 2

实测值	$\theta = -10^\circ, \Delta x = -3.13, \Delta y = -1.77, \Delta z = 105, z_1 = 55$			
张量 1	$A_1^1 = A_2^2 = 0.379594, A_2^1 = -A_1^2 = -0.06947905$			
	$T_x = -0.540000, T_y = -0.300000$			
	$\alpha = 0.385900$			
张量 2	$A_1^1 = A_2^2 = 0.380854, A_2^1 = -A_1^2 = -0.06219873$			
	$T_x = -0.480000, T_y = -0.280000$			
	$\alpha = 0.385900$			
	θ	$\Delta x/\Delta z$	$\Delta y/\Delta z$	$z_1/\Delta z$
实测值	-10.0000	-0.0298	-0.0169	0.6284
张量 1	-10.3724	-0.0309	-0.0172	0.6284
误差	0.0372	0.0369	0.0183	0.0000
张量 2	-9.2753	-0.0275	-0.0160	0.6284
误差	-0.0725	-0.0783	-0.0495	0.0000

七、结 论

本文给出的仿射坐标系中的张量分析是一种理想的方法, 可以避开寻找特征对应关系的做法。由于在分析过程中做了一些假设, 所以仍需要用于实际问题进行分析研究和比较。但毕竟是一种确定运动参数的三维运动分析方法, 可在进一步的研究中完善。

在本课题工作进行中, 得到了国家模式识别实验室领导、专家和工作的大力支持和帮助, 也得到徐元培研究员、吴健康教授、张妙兰副教授的很多支持、帮助和有益的讨论, 在此一并表示感谢。

参 考 文 献

- [1] R. Y. Tsai, T. S. Huang, Three-Dimensional Motion Estimation, eds. M. Kunt, F. deCoulon, Signal Processing: Theories and Applications, pp. 263—269, North-Holland Publishing Company, (1980).
- [2] T. S. Huang, R. Y. Tsai, Image Sequence Analysis: Motion Estimation, ed. T. S. Huang, Image Sequence

- Analysis*, Springer-Verlag, (1981), ch. 1.
- [3] David F. Rogers, J. Alan Adams, 北京工程图学学会译, 计算机图学的数学基础, 人民教育出版社, 1982年.
- [4] R. Y. Tsai, T. S. Huang, Wei-Le Zhu, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-30**(1982)4, 525—534.
- [5] R. Y. Tsai, T. S. Huang, *IEEE Trans. on ASSP* **ASSP-29**(1981)6, 1147—1152.
- [6] J. Q. Fang, T. S. Huang, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **26**(1984), 183—206.
- [7] 李象霖, 利用投影图象确定空间物体位置的一种方法, 图象科学论文集, 1986 年全国图象科学学术会议, pp84—87. 中国, 青岛, 1986年9月.
- [8] A. Mitiche, S. Seida, J. K. Aggarwal, Interpretation of Structure and Motion Using Straight Line Correspondences, in Proc. IEEE ICPR, Paris, France, October, 1986, pp. 1110—1112.
- [9] 李象霖, 张妙兰, 电子学报, **18**(1990)1, 86—92.
- [10] J. L. Synge, A. Schild, Tensor Calculus, University of Toronto Press, (1949).
- [11] 黄克智, 薛明德, 陆明万, 张量分析, 清华大学出版社, 1986年3月.
- [12] D. Cyganski, J. A. Orr, Z. Pinjo, A Tensor Operator Method for Identifying the Affine Transformation Relating Image Pairs, in Proc. IEEE Conf. Computer Vision Pattern Recognition, Washington D. C., June 19—23, 1983, pp. 361—363.
- [13] D. Cyganski, J. A. Orr, Object Identification and Orientation Determination in 3-Space with No Point Correspondence Information, In Proc. IEEE Conf. ASSP, San Diego, CA, (1984), pp. 23.8.1—23.84.
- [14] D. Cyganski J. A. Orr, Object Identification and Orientation Estimation From Point Set Tensors, The 7th Int. Conf. on Pattern Recognition, Montreal, P. Q., Canada, July 30-Aug. 2, 1984, pp. 250—253.
- [15] D. Cyganski J. A. Orr, *IEEE Trans. on PAMI*, **PAMI-7**(1985)6, 662—673.
- [16] M. K. Hu, *IEEE Trans. on IT*, **IT-8** (1962)2, 179—187.

A TENSOR ANALYSIS METHOD FOR ESTIMATING 3-D MOTION PARAMETERS

Li Xianglin Chen Xiaoping

(Graduate School USTC, Academia Sinica, Beijing)

Abstract By using center projection image sequence to estimate 3-D motion parameters, one needs to know the corresponding relationship between the feature of motion object in space and the projection coordinate in image plane. In order to avoid using the relationship of feature correspondence, the tensor analysis method in the affine transformation system is presented, and the simulation data of experimental results are given.

Key words Signal processing; Image sequence analysis; 3-D motion analysis; Tensor analysis method