第12卷 第2期
1990年3月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 12, No. 2
Mar., 1990

# 一种求解电磁位差分方程组的快速收敛方法*

崔铮　童林夙
(东南大学电子工程系，南京)

**摘要**　本文根据电磁位差分方程组系数矩阵对角元素占优以及稀疏性的特点，将直接求解一维线性方程组的追赶法与迭代法相结合，发展了一种准直接法。该方法对计算机内存的要求小于直接法，而收敛速度快于连续超松驰迭代法，适用于计算各种静态电磁场的有限差分解。文中介绍了准直接法的基本原理与特点，并与连续超松驰方法进行了比较。

**关键词**　电磁场数值计算方法；有限差分法；连续超松驰迭代法

## 1. 引言

有限差分作为一种简单灵活的方法是各种电磁位数值计算的主要方法之一。用有限差分计算电磁位分布问题最终归结为求解一个包含大量未知离散点电磁位值的线性方程组问题。长期以来，求解有限差分方程组的方法一直采用高斯-赛德尔迭代法。尽管直接法有更快的计算速度，但由于直接法需占用大量的计算机内存，因而很少被采用。假如有$N$个离散点，直接法需 $N^2$ 个数据单元，而高斯-赛德尔法只需$N$个单元。利用高斯-赛德尔方法通过成百次迭代总可得差分方程组的收敛解。采用超松驰因子可以加速这一收敛过程，由此构成连续超松驰迭代法 (SOR)。但随着离散点数量的增加，计算工作量仍是相当可观的。本文根据差分方程组系数矩阵的稀疏性以及对角占优特性，提出一种新的求解方法，称为"准直接法"(QDS)。QDS 方法具有直接法的某些特点，但计算机内存需要量小于直接法，而收敛速度却快于 SOR 方法。通常采用 SOR 方法需上百次迭代才能收敛的解，用 QDS 方法只需 6—10 次即可收敛，计算时间一般为 SOR 方法的 1/2—1/3。

## 2. 计算原理

QDS 方法的计算原理是由解一维线性方程组的追赶法引伸而来的。设一维泊松方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

其有限差分形式可以写为

* 1988年10月17日收到，1989年3月13日修改定稿。

$$-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}=\frac{\rho_i}{h_x^2\varepsilon_0} \tag{2}$$

$h_x$ 是一维离散节点的步长，(2) 式一般可以表示为

$$-a_iu_{i-1}+b_iu_i-c_iu_{i+1}=d_i,\quad i=2,3,\cdots N-1 \tag{3}$$

$u_1$，$u_N$ 是边界已知电位．(3) 式可用追赶法求解[1]：

$$u_j=\beta_ju_{j+1}+\alpha_j \tag{4}$$

式中，

$$\beta_j=\frac{c_j}{b_j-a_j\beta_{j-1}},\quad \alpha_j=\frac{d_j+a_j\alpha_{j-1}}{b_j-a_j\beta_{j-1}},\quad j=2,3,\cdots N-1$$

但追赶法只适用解一维线性方程组． 对于通常电磁位计算中遇到的二维有限差分方程组

$$A_{ok}u_{ij}=A_{1k}u_{i+1,j}+A_{2k}u_{i-1,j}+A_{3k}u_{i,j+1}+A_{4k}u_{i,j-1}$$
$$i=2,3,\cdots N-1,\ j=2,3,\cdots M-1,\ k=1,2\cdots(N-1)(M-1) \tag{5}$$

假如只考虑某一特定方向，如 $i$ 向或 $j$ 向，则 (5) 式仍可看作是一维方程组．例如，对于 $i$ 向有

$$b_iu_{i,j}=c_iu_{i+1,j}+a_iu_{i-1,j}+d_i \tag{6}$$

式中，

$$b_i=A_0k,\ c_i=A_1k,\ a_i=A_{2k},\ d_i=A_{3k}u_{i,j+1}+A_{4k}u_{i,j-1}$$

同理，对于 $j$ 向有

$$b_ju_{i,j}=c_ju_{i,j+1}+a_ju_{i,j-1}+d_j \tag{7}$$

式中，

$$b_j=A_{ok},\ c_j=A_{3k},\ a_j=A_{4k},\ d_j=A_{1k}u_{i+1,j}+A_{2k}u_{i-1,j}$$

单就 (6)、(7) 两式而言，均可用追赶法求解，但由于 $d_i(d_j)$ 项中还包含有另一方向上的未知量，仅求解一次并不能得到满足 (5) 式的解，因此还必须通过两个不同方向之间的交替迭代，使各离散点的 $u_{i,j}$ 同时满足 (6) 和 (7) 两个方程．

为了进一步提高两个方向之间迭代的收敛速度，可对每次迭代的中间结果加以修正．设某一离散点的中间结果为 $u^*_{i,j}$，由于这样的解不完全满足 (5) 式，故存在一个余数 $R_{i,j}$．

$$R_{i,j}=A_{0k}u^*_{i,j}-A_{1k}u^*_{i+1,j}-A_{2k}u^*_{i-1,j}-A_{3k}u^*_{i,j+1}-A_{4k}u^*_{i,j-1} \tag{8}$$

所谓修正就是将这一余数加到中间计算结果上．为了简化计算，设对每行(或列)做相同的修正，

$$u_{i,j}=u^*_{i,j}+\bar{u}_i \tag{9}$$

$u_{i,j}$ 是真解，$\bar{u}_i$ 是对第 $i$ 行的修正量．将 (9) 式代入 (8) 式，整理后得

$$b_i\bar{u}_i=c_i\bar{u}_{i+1}+a_i\bar{u}_{i-1}+d_i \tag{10}$$

式中，

$$b_i=\sum_{k=1}^{M-1}(A_{0k}-A_{3k}-A_{4k}),\quad c_i=\sum_{k=1}^{M-1}A_{1k},\quad a_i=\sum_{k=1}^{M-1}A_{2k}$$

$$d_i = \sum_{k=1}^{M-1} (A_{1k}u^*_{i+1,j} + A_{2k}u^*_{i-1,j} + A_{3k}u^*_{i,j+1} + A_{4k}u^*_{i,j-1} - A_{0k}u^*_{i,j})$$

同理，在 $j$ 向的修正量方程为

$$b_j\bar{u}_j = c_j\bar{u}_{j+1} + a_j\bar{u}_{j-1} + d_j \tag{11}$$

(10)、(11) 式和 (6)、(7) 式形式相同。用追赶法求解 (10)、(11) 式得到 $i$ 与 $j$ 向的修正量，加到中间迭代结果上即可提高收敛速度。

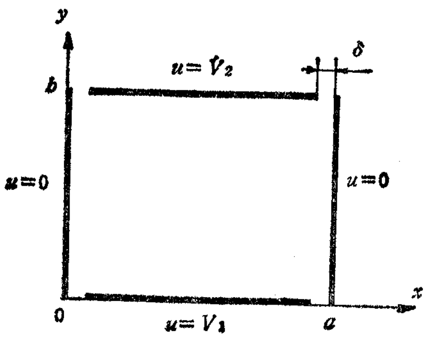


图 1　二维平面场域 ($\delta$-边界电极间隙)

以上分析表明，QDS 方法对每一行 (列) 用直接法求解，而不同方向之间通过迭代达到自洽，故称之为“准直接法”。在 SOR 方法中，区域边界上的信息是逐点传递到区域内部。而 QDS 方法是将边界信息逐行传递到内部，故 QDS 方法可用比 SOR 方法少得多的迭代次数达到收敛。

## 3. 计算实例分析与讨论

为了比较 QDS 和 SOR 两种方法，本文以一个二维平面场为例，如图 1 所示。二维平面电位分布的定解问题为

$$\nabla^2 u = 0,\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=a} = 0;$$

$$u|_{y=0} = \begin{cases} V_1\left(\dfrac{x}{\delta}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \delta \\ V_1, & \delta < x < a-\delta, \\ V_1\left(\dfrac{a-x}{\delta}\right), & a-\delta \leqslant x \leqslant a \end{cases} \quad u|_{y=b} = \begin{cases} V_2\left(\dfrac{x}{\delta}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \delta \\ V_2, & \delta < x < a-\delta \\ V_2\left(\dfrac{a-x}{\delta}\right), & a-\delta \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

为了便于数值计算，令电极间隙 $\delta \to 0$，则平面域电位分布的解析解可表示为

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 e^{\beta y} + c_2 e^{-\beta y}) \sin \beta x \tag{12}$$

式中，

$$c_1 = \frac{\alpha_1 e^{-\beta b} - \alpha_2}{e^{-\beta b} - e^{\beta b}},\ c_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 e^{\beta b}}{e^{-\beta b} - e^{\beta b}}$$

$$\alpha_1 = \frac{4V_1}{n\pi},\ \alpha_2 = \frac{4V_2}{n\pi},\ \beta = \frac{n\pi}{a}$$

将图 1 的矩形域划分为 600 个网格，分别用 SOR 方法与 QDS 方法计算离散电位分布，并与 (12) 式的解析解进行比较，比较结果见表 1 和表 2。

表 1　QDS 方法的计算值与理论值的相对误差变化

| 迭代次数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 相对误差 | 2.2783 | 0.4058 | 0.2669 | 0.04498 | 0.03416 | 0.002683 |

表 2 SOR 方法计算值与理论值的相对误差变化

| 迭代次数 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 相对误差 | 0.81406 | 0.46424 | 0.18919 | 0.06296 | 0.01942 | 0.002567 |

结果表明,用 SOR 方法需 61 次迭代才能达到相对误差小于 0.3%,而采用 QDS 方法计算只需 6 次迭代就达到相应精度. 在计算中, SOR 方法用机时 2 分 11 秒, QDS 方法用 1 分 15 秒 (IBM-PC 微机、主频 4.7 兆). 作者还用 QDS 方法计算了一个点源发射系统的轴对称电位分布问题[2],计算区域划分 3000 个网格. 在 DPS-8 中型机上, SOR 方法需迭代 173 次, 用 CPU 时间 0.01183 h. 而 QDS 方法只需迭代 12 次, 用 CPU 0.00536 h (计算精度为 $10^{-4}$).

通过研究发现, QDS 方法具有以下特点:

(1) 可以仿照 SOR 方法那样通过超松弛过程来加速收敛. 收敛的速度与松弛因子的选择有关. 表 3 是选取不同的松弛因子对二维平面场迭代 10 次后的数值解与理论解的相对误差. 计算表明, QDS 方法的最佳松弛因子一般低于同样网格数目下 SOR 方法的最佳松弛因子.

表 3 松驰因子对 QDS 方法收敛速度的影响

| 松驰因子 | 0.35 | 1.2 | 1.3 | 1.32 | 1.35 |
|---|---|---|---|---|---|
| 相对误差 | 0.0472 | 0.0006 | 0.00036 | 0.00048 | 0.00092 |

(2) 修正运算对 QDS 方法的收敛过程影响很大. 若不加修正则收敛很慢. 例如, 表 4 给出了不做修正计算时,数值解与理论解的相对误差随迭代次数的变化.

表 4 未做修正计算的 QDS 方法迭代误差

| 迭代次数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 相对误差 | 0.9974 | 0.9741 | 0.9053 | 0.7974 | 0.6781 | 0.5656 | 0.4606 | 0.3824 | 0.3172 | 0.2542 |

(3) QDS 方法的收敛速度与计算方向有关. 因为边界信息是逐行传递到区域内部的,所以传递有方向性. 例如,若在 $i$ 方向进行追赶计算, 就相当于将 $i$ 向的边界信息逐行传递. 这种传递可以有正向 ($j = 2, 3, \cdots M-1$) 或反向 ($j = M-1, M-2, \cdots 2$). 如何选择某一计算方向与计算问题的类型有关. 例如,当计算轴对称电磁场时,轴上离散点并不是系统边界,不需将轴上信息传递到内部,因此对径向只有从电极面向轴一个计算方向. 表 5 给出计算二维平面场中选择不同计算方向时, 其相对误差随迭代次数的变化.

$i$ 正向表示在图 1 的平面域中只将 $y=0$ 边界的信息向 $y=b$ 方向传递. $i$ 正反向表示同时还将 $y=b$ 边界的信息向 $y=0$ 方向传递.

表 5　计算方向对 QDS 方法迭代误差的影响

| 计算方向 \ 相对误差 \ 迭代次数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ 正向<br>$j$ 正向 | 2.5078 | 0.4390 | 0.3953 | 0.0837 | 0.09325 | 0.03946 | 0.0291 | 0.01659 |
| $j$ 正反向 | 2.4722 | 0.4128 | 0.3952 | 0.0782 | 0.08871 | 0.03587 | 0.0257 | 0.01398 |
| $i$ 正反向 | 2.5111 | 0.4498 | 0.4035 | 0.0763 | 0.0922 | 0.03668 | 0.0271 | 0.0447 |

（4）QDS 方法的计算机内存占用量与计算网格的划分和问题的类型有关，一般大于 SOR 方法．但最大不超过四倍，即有限差分方程组的四个系数数组占用的内存．但与直接法相比还是小得多．

## 参　考　文　献

[1] 冯康，数值计算方法，北京，国防工业出版社，1978 年，pp. 264—266.
[2] 崔铮，液态金属离子源动态工作过程研究，东南大学，博士学位论文，南京，1988 年．

# A FAST CONVERGENT METHOD FOR SOLVING THE FINITE DIFFERENCE EQUATIONS OF ELECTROMAGNETIC PROBLEMS

Cui Zheng　Tong Linsu
*(Southeast University, Nanjing)*

**Abstract**　A quasi-direct solution (QDS) for the finite difference equations has been developed, which is basel on the sparse and pivot-dominant properties of the matrix and is the combination of the direct method and the iterative method. The principle and the features of QDS method have been discussed. A comparison has been made with the successive over-relaxation (SOR) method. It is shown that the QDS method requires less computer memory than the direct method, covnerges faster than the SOR method and is suitable for calculating the finite difference equations of electromagnetic and magnetostatic problems.

**Key words**　Numerical method for electromagnetic field; Finite difference method; Successive over-relaxation method