

# 不含短环的 $(n,3,k)$ LDPC码的几何构造方法

马哲 杜兴民 马林华  
(空军工程大学工程学院 西安 710038)

**摘要** 该文基于不含短环的 $(n,2,k)$ 规则低密度奇偶校验(LDPC)码,提出了一种最短环长为8的 $(n,3,k)$ 规则LDPC码的几何构造方法,该方法简单直观而有效。仿真结果显示,在AWGN信道中其具有明显优于随机构造的规则LDPC码的性能。

**关键词** LDPC码,容许斜度对,环,和-积译码

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)12-2315-03

## Geometry Construction of $(n,3,k)$ LDPC Codes without Short Cycles

Ma Zhe Du Xing-min Ma Lin-hua

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract** In this paper, based on  $(n,2,k)$  regular Low Density Parity-Check (LDPC) codes without short cycles, a geometry method for the construction of  $(n,3,k)$  regular LDPC codes with 8-girth is proposed, which is simple, intuitionistic and effective. Simulation results show that these codes achieve obviously better performance than randomly constructed regular LDPC codes over AWGN channels.

**Key words** LDPC codes, Admissible slope pair, Cycle, Sum-product decoding

### 1 引言

1962年Gallager提出了一种基于稀疏校验矩阵的线性码,即低密度奇偶校验码<sup>[1]</sup>(LDPC码)。经广泛研究证明,LDPC码具有接近Shannon 限的优越性能。

LDPC码的译码方法,一般采用和-积(置信传播)算法,如果LDPC码不存在环的情况下,会很快得出译码结果。但是LDPC码往往存在环,这使得译码重复迭代,影响LDPC 码的译码效率,尤其是短环的存在会使得译码收敛速度变慢<sup>[2]</sup>。针对去除因子图上的短环,目前采取搜索消除的方法比较普遍,也有一些人使用了消除短环的代数构造方法<sup>[3]</sup>。Zhang Haotian 和 Moura在文献[4]中提出了最短环长为8的 $(n,2,k)$ 规则LDPC码(其中 $n$ 表示码长,2和 $k$ 分别表示变量节点与校验节点的度)的几何构造方法,可以简单有效地将规则LDPC码因子图上的最短环长控制在8-环。本文利用文献[5]中提出的联合设计方法(joint design approach)的基本思想,在最短环长为8的 $(n,2,k)$ 规则LDPC码中插入满足一定规律的确定数量的校验节点,形成了一种构造不含短环的 $(n,3,k)$ 规则LDPC码的几何方法。采用该方法产生的 $(n,3,k)$ LDPC码消除了对应因子图上长度为4和6的环,使编译码效率更高、易于迭代译码的硬件实现,更符合工程应用要求。仿真结果显示,在AWGN信道中和相同的仿真条件下,其具有优于随机产生及文献[3]中代数构造的规则LDPC码的性能。

### 2 不含短环的 $(n,2,k)$ LDPC码

设计不含短环的 $(n,2,k)$ LDPC码的基本思想是将校验节

点集分为两个子集,在两个子集内部的节点没有边相连,边只存在于不同子集的两个节点之间。

**例 1**<sup>[4]</sup> 令 $v=2p$ ( $p$ 为偶数), $v$ 为校验节点的数量。将校验矩阵 $H$ 的校验节点集 $X$ 分为节点数量同为 $p$ (equal size)的两个子集 $X_1$ 和 $X_2$ 。如果只在属于不同子集的节点间有边相连,则相应的 $(n,2,k)$ LDPC码不存在长度为 $(4m+2)$ 的环,其中 $m=1, 2, \dots$ 。

**证明** 一个 $(4m+2)$ 环可以表示为 $(2m+1)$ 个点和 $(2m+1)$ 条拖尾边的循环。对于任何大于1的 $m$ ,假设构造的LDPC码中存在 $(4m+2)$ 环,令 $A, B, C$ 为 $(4m+2)$ 环的循环路径上相邻的3个节点(如图1)。不失一般性,假定 $A$ 属于子集 $X_1$ ,则在 $A$ 和 $C$ 之间存在两条路径,长度分别为1和 $2m$ 。沿较长路径传播, $C$ 一定属于 $A$ 所在的子集 $X_1$ ,因为长路径有偶数条边且边位于不同的子集之间。我们知道在同一子集内部不存在边,所以 $A$ 与 $C$ 之间的短路径不存在。这与假设相矛盾,所以 $(4m+2)$ 环不存在。证毕

从上面的证明可知,按照例1构造的LDPC码不含6-环和10-环,也不存在4-环,因为在任何两点间最多只存在一条边。利用这种方法,我们就可以轻松地构造出最短环长为8的

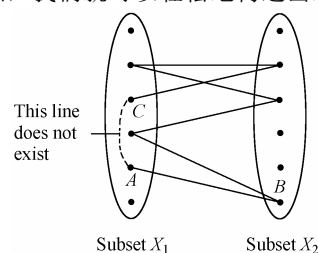


图1 不含 $(4m+2)$ 环结构

Fig.1 Absence of  $(4m+2)$ -cycles

LDPC码。

### 3 最短环长为8的(n,3,k)LDPC码

在上一节中,给出了构造最短环长为8的(n,2,k)LDPC码的方法,以此方法为基础,利用文献[5]中提出的联合设计方法(Joint Design Approach)的基本思想,在以构造的最短环长为8的(n,2,k)规则LDPC码中插入满足一定规律的确定数量的校验节点,我们来讨论如何产生最短环长为8的(n,3,k)LDPC码。

#### 3.1 联合设计方法

从例1中可以看出,在选择边时只要避免同一子集的节点间有边相连,而在两个子集之间随意选择边的连接,我们都可以产生最短环长为8的(n,2,k)LDPC码。然而出于方便构造最短环长为8的(n,3,k)LDPC码的考虑,我们引入两个定义<sup>[4]</sup>,规定按上一节的方法构造最短环长为8的(n,2,k)LDPC码时两个子集间的边的连接关系。

**例 2**<sup>[2]</sup> 如图2,规则LDPC码校验矩阵H的点集X(a<sub>1</sub>,⋯,a<sub>7</sub>,b<sub>1</sub>,⋯, b<sub>7</sub>)被分为两个子集X<sub>1</sub>=(a<sub>1</sub>,⋯,a<sub>7</sub>)和X<sub>2</sub>=(b<sub>1</sub>,⋯, b<sub>7</sub>),每个子集中的点按垂直方向排列(图2中点集X被重复了两次)。

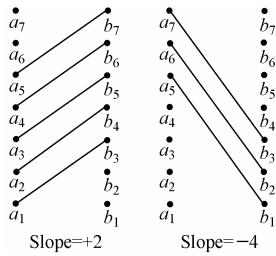


图2 斜度为2、-4的边  
Fig.2 Edges with 2、-4slopes

**定义1 斜度** 连接两个节点a<sub>i</sub>∈X<sub>1</sub>与b<sub>j</sub>∈X<sub>2</sub>的边的斜度定义为s=j-i。

由定义1可知,斜度取值的范围为-(p-1)≤s≤(p-1),其中p为每个子集中节点的个数。注意在计算斜度时我们规定以子集X<sub>1</sub>中的节点作为参考节点,所以斜度为s的边可能存在的最大数量为(p-|s|)。图2给出了p=7时斜度为s<sub>1</sub>=2和s<sub>2</sub>=-4的边。

**定义2 容许斜度对** 当且仅当s<sub>i</sub>=-sgn(s<sub>j</sub>)\*(p-|s<sub>j</sub>|)时,一个斜度对(s<sub>i</sub>, s<sub>j</sub>)被称为“容许斜度对”。

有上面两个定义,下面我们介绍一种几何结构的最短环长为8的规则(n,3,k)LDPC码。构造这类码结构的基本思想是:

(1)首先,利用第2节的方法,加以在两个子集间边的选择上选用构成“容许斜度对”的边,生成最短环长为8的(n,2,k)LDPC码,其校验矩阵为H<sub>1</sub>,校验矩阵的行数为v;

(2)以生成的(n,2,k)LDPC码为基本结构,在其校验矩阵H<sub>1</sub>的下面插入行数为p=v/2的校验矩阵H<sub>2</sub>,适当选择H<sub>2</sub>,使得得到新的校验矩阵H=[H<sub>1</sub><sup>T</sup>, H<sub>2</sub><sup>T</sup>]<sup>T</sup>对应的因子图中的最小环路为8。

#### 3.2 节点集H<sub>2</sub>的选取

下面我们来着重讨论步骤(2)中H<sub>2</sub>的选择,它是生成最

短环长为8的规则(n,3,k)LDPC码的关键,也是本文相对于文献[3]的改进和创新之处。

先分析一下(n,3,k)LDPC码校验矩阵H的因子图结构。参照例2,H的点集X可以分成等型的3个子集X<sub>1</sub>=(a<sub>1</sub>,⋯, a<sub>p</sub>), X<sub>2</sub>=(b<sub>1</sub>,⋯, b<sub>p</sub>), X<sub>3</sub>=(c<sub>1</sub>,⋯, c<sub>p</sub>),每个子集中的点按垂直方向排列。其中X<sub>1</sub>和X<sub>2</sub>构成H<sub>1</sub>的点集的两个子集,而X<sub>3</sub>是H<sub>2</sub>的点集。注意H<sub>1</sub>是按步骤(1)中的规定生成的,所以在H<sub>1</sub>中最短环长为8,同时子集X<sub>1</sub>和X<sub>2</sub>之间边的斜度构成“容许斜度对”。在选取H<sub>2</sub>时,首先规定在点集X<sub>3</sub>内没有边相连,同时使X<sub>3</sub>与X<sub>2</sub>之间边的斜度构成容许斜度对,则X<sub>3</sub>与X<sub>1</sub>之间的斜度也必然构成容许斜度对。因此,H的3个子集X<sub>1</sub>和X<sub>2</sub>、X<sub>3</sub>与X<sub>2</sub>及X<sub>3</sub>与X<sub>1</sub>之间将不会出现小于8的环。同时我们知道,经过3个子集可以形成的最小环长为6,要形成这种结构则信息在传递过程中只能经过每个子集中的一个点,将这3个点用边(信息传播的路径)连起来,就在3个子集构成的因子图中形成了一个三角形结构。所以,如果我们在选择H<sub>2</sub>时避免在因子图中出现这种三角形结构,我们就成功地消除了H中的6-环,具体参见例3。

**例 3** (70,3,5)LDPC码的校验矩阵H相应的三子集因子图如图3所示。注意,图3中X'<sub>1</sub>与X'<sub>3</sub>分别代表X<sub>1</sub>与X<sub>3</sub>的平行移位。

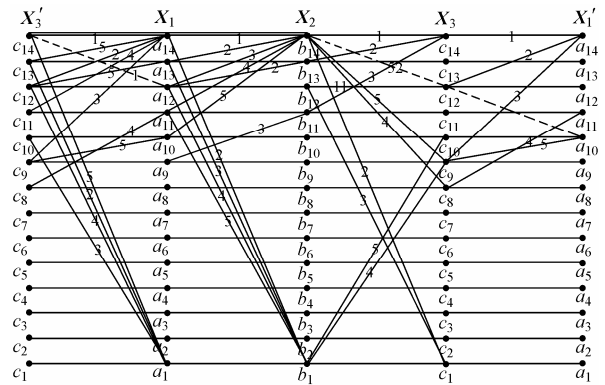


图3 (70,3,5) LDPC码三子集因子图

Fig.3 Three subset graph of (70,3,5) LDPC code

从图3中可以看出, X<sub>1</sub>与X<sub>2</sub>, X<sub>1</sub>与X<sub>3</sub>, X<sub>2</sub>与X<sub>3</sub>中的实线边分别有9种斜度,且这9种斜度构成5对“容许斜度对”(如图3中边上的标号所示,标号相同的边构成一个容许斜度对),且在任意两子集之间不存在小于8的环,而在经过3个子集的回路中又没有形成6-环的三角形结构,因此由该校验矩阵H定义的LDPC码信息迭代的最小环为8。而在图3中如果用虚线边代替标号为5的边,我们会发现标号为3, 10的边与虚线边51,及标号为3, 11的边与虚线边52构成了三角结构,因此在校验矩阵H中会出现6环。

下面我们来讨论矩阵H<sub>2</sub>的数学表达:参照图3,设X<sub>2</sub>与X<sub>1</sub>构成的斜度集{0,(s<sub>11</sub>,s<sub>11</sub>-p),⋯,(s<sub>1(k-1)</sub>,s<sub>1(k-1)</sub>-p)}, X<sub>3</sub>与X<sub>2</sub>构成的斜度集为{0,(s<sub>31</sub>,s<sub>31</sub>-p),⋯,(s<sub>3(k-1)</sub>,s<sub>3(k-1)</sub>-p)}, X<sub>3</sub>与X<sub>1</sub>构成的斜度集{0,(s<sub>21</sub>,s<sub>21</sub>-p),⋯,(s<sub>2(k-1)</sub>,s<sub>2(k-1)</sub>-p)},其中k=n/p,n为码长。在此不妨规定s<sub>11</sub>,⋯,s<sub>1(k-1)</sub>大于0,且按从小到大的顺序排列,同时满足s<sub>1(k-1)</sub>≤q(p为偶数,q=p/2;p

为奇数,  $q=(p-1)/2$ ; 另外规定 $|s_{3i}| \leq q, i \in (1, \dots, k-1)$ 。同时3个斜度集之间满足运算关系:  $s_{2i} = s_{1i} + s_{3i}$ , 所以校验矩阵 $\mathbf{H}$ 的因子图的边分布可用一个二维斜度集 $\mathbf{A}$ 表示:

$$\mathbf{A} = \{0, (s_{11}, s_{11} - p), \dots, (s_{1(k-1)}, s_{1(k-1)} - p); \\ 0, (s_{21}, s_{21} - p), \dots, (s_{2(k-1)}, s_{2(k-1)} - p)\}$$

从图3中可以看出, 如果 $s_{3i} = -s_{1j}, 1 \leq i, j \leq k-1$ , 则在 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 与 $\mathbf{X}_3$ 之间必然会形成三角结构而形成6-环; 另外, 如果 $s_{2i} = s_{1j}, 1 \leq i, j \leq k-1$ , 则在 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 与 $\mathbf{X}'_3$ 之间也必然会形成三角结构而形成6-环。还必须注意一点, 因为 $s_{2i} = s_{1i} + s_{3i}$ , 所以可能会出现 $s_{2i} = s_{2j} (1 \leq i, j \leq k-1)$ 的情况, 而产生4-环。

由上面的分析, 我们给出消除6和4环, 使 $(n, 3, k)$ LDPC 码的校验矩阵 $\mathbf{H}$ 的最小环为8的条件:

(1)  $s_{3i} \neq -s_{1j}, 1 \leq i, j \leq k-1$ ;

(2) 当 $1 \leq s_{1i} + s_{3i} \leq q$ 时,  $s_{2i} \neq s_{1j}$ , 否则,  $p - s_{2i} \neq s_{1j}, 1 \leq i, j \leq k-1$ ;

(3) 在利用 $s_{1i} + s_{3i}$ 计算 $s_{2i}$ 时, 去除使 $s_{2i}$ 满足 $s_{2i} = s_{2j} (1 \leq i, j \leq k-1)$ 的 $s_{3i}$ 值。

#### 4 仿真及讨论

上文从引例和数学模型的角度分析了构造最短环长为8的 $(n, 3, k)$ LDPC码的方法。在此, 我们利用本文提出的方法构造码长 $N=1008$ , 码率 $R_c=1/2$ 的规则 $(3, 6)$ LDPC码。其对应的几个重要参数如下:

$v=514$ ;

$p=168$ ;

$\mathbf{A} = \{0, (9, -159), (22, -146), (27, -141), (43, -125), (65, -103); 0, (70, -98), (-58, 110), (33, -135), (-40, 128), (12, -156)\}$ 。

在高斯信道下, 采用BPSK调制方式, 迭代译码次数上限为50的条件下, 我们运用log-域内的和-积译码算法<sup>[6]</sup>对该规则LDPC码进行了Matlab软件仿真, 并在相同条件下对随机构造的 $(1008, 3, 6)$ LDPC码进行了仿真, 两者性能曲线如图4所示。另外, 便于说明本文提出的几何构造方法的优越性能, 本文引用了文献[3]中的代数构造方法产生的 $(1024, 3, 6)$ LDPC码在相同仿真条件下的性能曲线(如图5)。

从图4和5中两种不同构造方法和随机方法产生的规则LDPC码的性能曲线, 我们可以清楚地看出:

(1) 在小信噪比时, 本文构造的规则LDPC码与文献[3]中构造的规则LDPC码相对于随机构造的规则LDPC码性能都有较大改善。

(2) 当大信噪比时, 随着信噪比的增大, 本文构造的LDPC码相对于随机码性能改善越大, 当信噪比大于2.5dB时, 性能改善在一个数量级左右; 而文献[3]构造的LDPC码具有较高的错误平层, 当信噪比大于2.5dB时, 性能劣于随机码。

(3) 综上所述, 本文提出的几何构造方法在消去了4-环和6-环后, 对中短长度的规则LDPC码的性能有较大的改善, 优于随机构造和文献[3]中代数方法构造的规则LDPC码。

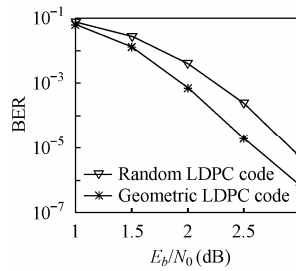


图4 随机与几何构造的 $(1008, 3, 6)$ LDPC码性能比较  
Fig.4 Shows the comparison of performance between random and geometric  $(1008, 3, 6)$  LDPC code

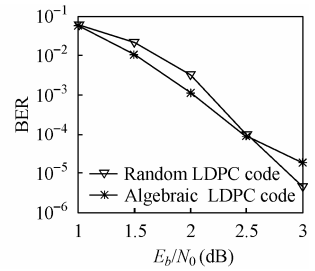


图5 随机与代数构造的 $(1024, 3, 6)$ LDPC码性能比较  
Fig.5 Shows the comparison of performance between random and algebraic  $(1024, 3, 6)$  LDPC code

另外, 本文提出的几何构造方法, 可以通过点集图和数学表达式, 适当地选取校验节点集中各子集两两之间的斜度, 使其分别满足容许斜度对的要求, 就能构造出最短环长为8的 $(n, 3, k)$ 规则LDPC码, 因此该方法简单、直观, 而且有效。

#### 5 结束语

本文提出了一种最短环长为8的 $(n, 3, k)$ 规则LDPC码的几何构造方法, 其在高低信噪比区都有优于随机产生的规则LDPC码的性能。但是, 8-环作为长度较短的环对码的性能影响也不可忽视, 所以如何尽可能地控制或消除8-环仍需进一步研究。

#### 参考文献

- [1] Gallager R G. Low-density parity check codes. *IRE Trans. on Information Theory*, 1962, IT- 8(3): 208–220.
- [2] 李水平, 刘玉君, 邢庆军, 李智勇. LDPC码的环分析. *信息工程大学学报*, 2003, 4(4): 82–84.
- [3] 刘斌, 童胜, 白宝明. 不含小环的低密度校验码的代数构造方法. *电子与信息学报*, 2004, 26(11): 1778–1782.
- [4] Haotian Zhang, Moura Jose M F. The design of structured regular LDPC codes with large girth. *IEEE Trans. on Globecom*, 2003: 4022–4027.
- [5] Zhang Tong, Parhi Parhi Keshab. Joint code and decoder design for implementation oriented  $(3, k)$  regular LDPC codes. Department of Electrical and Computer Engineering University of Minnesota, *IEEE Trans. on Com.*, 2001: 1232–1236.
- [6] Hu Xiao-Yu. Eleftheriou Evangelos, Arnold Dieter Michael, Dholakia Ajay. Efficient implementations of the sum-product algorithm for decoding LDPC codes [A]. *GLOBECOM[C]*. San Antonio. IEEE, 2001: 1036–1036.

马 哲: 男, 1979年生, 硕士生, 研究方向为保密通信与抗干扰技术。  
杜兴民: 男, 1941年生, 教授, 硕士生导师, 主要从事信息理论及抗干扰技术方面的教学与研究工作。  
马林华: 男, 1966年生, 副教授, 硕士生导师, 主要从事信道编码方面的教学与研究工作。