第 14 卷 第 3 期
1992 年 5 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 14, No. 3
May, 1992

一种求偶图的所有完备匹配算法*

蒋建明　　陈立东　张良震
(合肥经济技术学院 230052)　(安徽大学,合肥 230039)

摘要　求给定偶图的所有完备匹配问题在 LSI/VLSI 的布图设计方面有着重要的应用. 本文提出了一种求解这一问题的算法. (1)提出了许配树的概念并讨论了其性质; (2)证明了任意一棵许配树 $T(x_i)$ 对应于给定偶图的所有完备匹配的定理; (3)给出了求给定偶图的所有完备匹配的算法. 本算法已在 BST 386 CAD 工作站上用C语言实现. 运行结果证明了算法的正确性. 算法已作为正在研究的 VLSI 积木块布图设计系统中的一个模块.

关键词　图论及其应用;偶图;完备匹配,许配树.

一、引　言

图的匹配(matching)是一组独立边的集合,该集合中任意两条边都非邻接. 虽然匹配是对一般图定义的,但大多数情况下,是在偶图中研究的. 若一个图 G 的顶点集 V 能划分成两个子集 X 和 Y,且 $X \cap Y = \phi$,则称图 G 为偶图(又称二分图),用 $G(X,Y,E)$ 表示,E 为边集合.

若偶图 $G(X,Y,E)$ 中存在一个 X 到 Y 的匹配 M,且在 M 中对 X 中的每一个点都饱和,则称 M 为 X 到 Y 的完备匹配 (perfect matching).

现有求完备匹配的算法是由 J. Edmonds[1] 于 1965 年提出的匈牙利算法. 它的特点是: 先给定一个初始匹配 M,如果 M 饱和了 X 中的所有顶点,则 M 是所要找的一个完备匹配;否则;在 X 中选择一个非饱和点,从这个点开始寻找一个可扩充路径 P,使得 $M = M \oplus P$,直至找到一个完备匹配.

对于求给定偶图的一个完备匹配来说,匈牙利算法是很完美的;但是还没有一个较好的求给定偶图的所有完备匹配的方法. 由于求一个偶图的所有完备匹配在 VLSI 积木块布图设计的总体布线与通道定序等方面具有重要的应用[2], 因此有必要设计一个求解这一问题的算法. 本文首先提出了许配树 $T(x_i)$ 的概念并讨论了其性质,然后证明了对于一个给定偶图, 任意一个 $T(x_i)$ 均对应于所有完备匹配的定理, 最后给出了求给定偶图的所有完备匹配的算法. 本算法已在 BST 386 CAD 工作站用C语言实现,并作为正在研究的 VLSI 积木块布图设计系统中的一个模块.

1990.05.07 收到,1991.10.30 定稿.
* 国家自然科学基金资助项目

二、算法基础

关于一个给定偶图的完备匹配的存在性问题，Hall 曾提出一个定理(1935年)：在偶图 $G(X, Y, E)$ 中，存在 X 到 Y 的完备匹配的充要条件是对任意的 $S(S\subseteq X)$，有 $|\Gamma(S)|\geqslant|S|$，这里 $\Gamma(S)$ 是 S 在 Y 中的映射（$\Gamma(S)\subseteq Y$）.

1. 许配树及其性质

定义 1 对于一个给定的偶图 $G(X,Y,E)$，许配树是具有单一根节点 $x_i(x_i\in X)$ 且对应于该偶图边的节点的有限集合，记为 $T(x_i)$，它应满足如下条件：

(1) 除根 x_i 外，树中其余节点均为一对表示许配关系的序偶，并分成 $n\geqslant 0$ 个集合，而且这些集合的每一个都是根 x_i 的子树，子树的根是 x_i 到 y_j（$y_j\in\Gamma(x_i)$，$j=1,2,\cdots,n$）的许配序偶；

(2) 每个以根为 $(x_i,y_j)(j=1,2,\cdots n)$ 的子树对应于在偶图中删除组成该节点的两顶点 $x_i,y_j(j=1,2,\cdots n)$ 和与之相关联的边所形成的子图；

(3) 在第 k 层($k\geqslant 1$)上的每一节点，其序偶中的第 4 元素($\in X$)一定相同.

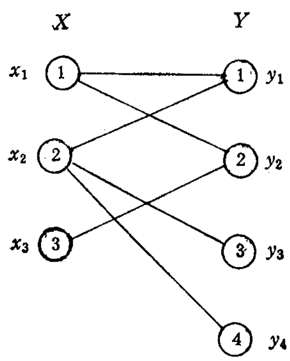

图1 偶图 G

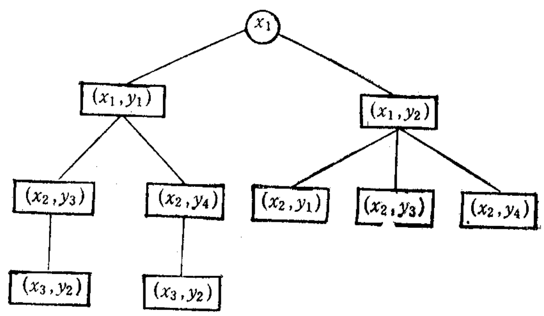

图2 许配树 $T(x_1)$

对于图1所示的偶图，取 x_1 为许配树的根，根据定义 1，连接根 x_1 的节点是序偶 (x_1,y_1) 和 (x_1,y_2)，它们是许配树中的第 1 层节点，其节点数即是根 x_1 的度为 2（如图 2 所示）. 偶图 G 中顶点 x_1 的度 $d(x_1)=2$，因此它们的度相等. 连接节点 (x_1,y_1) 的第 2 层节点是从偶图 G 中删除顶点 x_1,y_1 和与之相关联的边所生成的子图 G' 中获得，它们是 (x_2,y_3) 和 (x_2,y_4). 因此，节点 (x_1,y_1) 的度为 2，这与子图 G' 中顶点 x_2 的度 $d'(x_2)=2$ 相等. 连接节点 (x_1,y_2) 的第 2 层节点是从偶图 G 中删除顶点 x_1,y_2 和与之相关联的边所生成的子图 G'' 中获得. 它们是 (x_2,y_1)，(x_2,y_3) 和 (x_2,y_4)，则节点 (x_1,y_2) 的度为 3，这与子图 G'' 中顶点 x_2 的度 $d''(x_2)=3$ 相等. 连接第 2 层节点 (x_2,y_3) 的第 3 层节点是从图 G' 中删除顶点 x_2,y_3 和与之相关联的边所生成的子图中获得，它是 (x_3,y_2)，则节点 (x_2,y_3) 的度为 1，这与该子图中顶点 x_3 的度相等. 以此类推，可以得到其余的节点. 如图 2 所示是对应于图 1 所示偶图 G 的许配树 $T(x_1)$. 同样可得到 $T(x_2)$ 和 $T(x_3)$.

由上可知，(1)除根 x_i 外，$T(x_i)$ 中的任何一层节点的集合，其集合的基数即是偶图中

顶点(对应该层节点序偶中第 1 元素($\in X$))的度；(2)从任一节点往根搜索时所出现的序偶各不相同，且这些序偶中的两个元素都不重复出现；(3)在除根外树的节点集合中，不同序偶的第 2 元素($\in Y$)出现的次数即是对应偶图中的顶点($\in Y$)的度.

定义 2　对于偶图 $G(X,Y,E)$，$M(x_i)$ 表示在 $T(x_i)$ 中所有由长度为 $|X|$ 的路径上(或树枝上)的节点集合所组成的集合.

由如上定义可知，$T(x_i)$有如下性质：

性质 1　以 x_i 为根的许配树 $T(x_i)$，$(i=1,2,\cdots,|X|)$ 的深度 $\leqslant |X|$；

性质 2　$T(x_i)$中从根(除根外)到叶的路径上的节点均为一对许配关系；

性质 3　$T(x_i)$与 $T(x_j)$，$(i\neq j)$的深度为 $|X|$ 的路径数相等，且 $M(x_i)=M(x_j)$.

2. 许配树与完备匹配的关系

引理 1　在偶图 $G(X,Y,E)$ 中存在 X 到 Y 的一个完备匹配 M，当且仅当由 G 生成的许配树 $T(x_i)$ 中存在一条深度为 $|X|$ 的路径.

证明　*必要性*. 在偶图 $G(X, Y, E)$ 中存在一个 X 到 Y 的完备匹配 M，$M=\{(x_{i_1},y_{j_1}),\ (x_{i_2},y_{j_2}),\cdots,(x_{i_{|X|}},y_{j_{|X|}})\}$，显然，$|M|=|X|$. 由定义 1，总能找到一棵树 $T(x_i)$，$T(x_i)$中存在一条从根 x_i，经 (x_{i_1},y_{j_1})，(x_{i_2},y_{j_2})，$\cdots$到叶 $(x_{i_{|X|}},y_{j_{|X|}})$的路径，此路径的长度为 $|X|(=|M|)$.

充分性　设 $T(x_i)$ 中存在一条长度为 $|X|$ 的路径，则 $T(x_i)$ 中至少存在 $|X|$ 个节点，且由定义 1 可知，在 $T(x_i)$ 中存在一条从树根 x_i (除根外)到叶$(x_{i_{|X|}},y_{j_{|X|}})$的路径，该路径上的 $|X|$ 个节点均是一个许配，且互不相同. 由完备匹配的定义可知，该路径上的 $|X|$ 个节点恰好组成 G 中的一个完备匹配 M. 证毕.

定理 1　在偶图 $G(X,Y,E)$ 中，如果存在 X 到 Y 的完备匹配，则任意一个以 x_i 为根的许配树 $T(x_i)$ 上的所有长度为 $|X|$ 的路径上的节点除根外集合构成了 X 到 Y 的所有完备匹配.

证明　(反证法)若不然，则存在一个 X 到 Y 的完备匹配 M，使得 $M\notin M(x_i)$，而 $M\in M(x_j)$，$(i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant |X|)$. 但由 $T(x_i)$ 的性质 3 可知，$M(x_i)=M(x_j)$，所以 $M\in M(x_i)$，故与假设矛盾. 证毕.

三、算　法

由于偶图 G 中的每个完备匹配仅对应于许配树中长度为 $|X|$ 的树支，因此，算法运行时并不需要生成整个许配树，而只需记录长度为 $|X|$ 的树支. 算法的输入是偶图 $G(X,Y,E)$ 的两组顶点，输出是所有完备匹配. 其算法描述如下：

S1：对于偶图 $G(X,Y,E)$，若 $|X|>|Y|$ 或存在孤立点 x_i，则结束(此时无完备匹配)；否则 $i=1$；

S2：从 G 中取边(x_i,y_j)，$(x_i\in X,\ y_j\in \Gamma(x_i))$，令 $m[i].x=x_i$；$m[i].y=y_j$；

S3：从 G 中删除(x_i,y_j)，生成 G_2；

S4：若 x_i 不是 G_2 中的孤立点，则把 G_2 放入栈中；否则转 S5；

S5：从 G 中删除点 x_i，y_j 和与之相关联的边，生成 G_1；

S6：若 G_1 中 $X=\phi$，则将 $m[i]$，($i=1,2,\cdots,|X|$) 作为一个长度为 $|X|$ 的树支记录下来；否则转 S8；

S7：若栈是空，则结束(此时求得的许配树中所有长度为 $|X|$ 的树支，即是所有完备匹配)；否则退栈得到新的子图 G'，i 取 G' 中的 X 中的所有 $x_k(1\leqslant k\leqslant |X|)$ 的下标最小者，并转 S2；

S8：$i=i+1$，在 G_1 的 X 中选 x_i，若 x_i 是孤立点，则转 S7；否则转 S2。

四、运算结果和结论

用本算法作为基础的程序模块对图 3 和图 4 所示的偶图进行了运算，求得的所有完备匹配分别如表 1 和表 2 所示(表中每一序偶的第 1 元素 $\in X$，第 2 元素 $\in Y$)。

表 1

完备匹配序号	完备匹配 (x_i, y_j) ($x_i\in X$, $y_j\in Y$)			
1	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
2	(1,1)	(2,3)	(3,2)	(4,4)
3	(1,1)	(2,5)	(3,2)	(4,4)
4	(1,1)	(2,5)	(3,3)	(4,4)
5	(1,3)	(2,1)	(3,2)	(4,4)
6	(1,3)	(2,5)	(3,2)	(4,4)

表 2

完备匹配序号	完备匹配 (x_i, y_j)($x_i\in X, y_j\in Y$)						
1	1,1	2,2	3,3	4,4	5,7	6,9	7,6
2	1,1	2,2	3,3	4,8	5,4	6,6	7,7
3	1,1	2,2	3,3	4,8	5,4	6,9	7,6
4	1,1	2,2	3,3	4,8	5,4	6,9	7,7
5	1,1	2,2	3,3	4,8	5,7	6,9	7,6
6	1,1	2,5	3,2	4,3	5,4	6,6	7,7
7	1,1	2,5	3,2	4,3	5,4	6,9	7,6
8	1,1	2,5	3,2	4,3	5,4	6,9	7,7
9	1,1	2,5	3,2	4,3	5,7	6,9	7,6
10	1,1	2,5	3,2	4,4	5,7	6,9	7,6
11	1,1	2,5	3,2	4,8	5,4	6,6	7,7
12	1,1	2,5	3,2	4,8	5,4	6,9	7,6
13	1,1	2,5	3,2	4,8	5,4	6,9	7,7
14	1,1	2,5	3,2	4,8	5,7	6,9	7,6
15	1,1	2,5	3,3	4,4	5,7	6,9	7,6
16	1,1	2,5	3,3	4,8	5,4	6,6	7,7
17	1,1	2,5	3,3	4,8	5,4	6,9	7,6
18	1,1	2,5	3,3	4,8	5,4	6,9	7,7
19	1,1	2,5	3,3	4,8	5,7	6,9	7,6
20	1,5	2,2	3,3	4,4	5,7	6,9	7,6
21	1,5	2,2	3,3	4,8	5,4	6,6	7,7
22	1,5	2,2	3,3	4,8	5,4	6,9	7,6
23	1,5	2,2	3,3	4,8	5,4	6,9	7,7
24	1,5	2,2	3,3	4,8	5,7	6,9	7,6

本文提出的求偶图所有完备匹配算法计算一个完备匹配的时间复杂性为 $O(E^2)$. 对于一个完全偶图来说，共有 $P_M^N(N=|X|, M=|Y|)$个完备匹配，运算时间将取决于完备匹配数. 在实际应用过程中，偶图在绝大多数情况下都是非完全图，故运行情况较好.

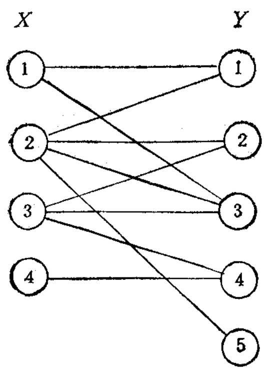

图3　实例1

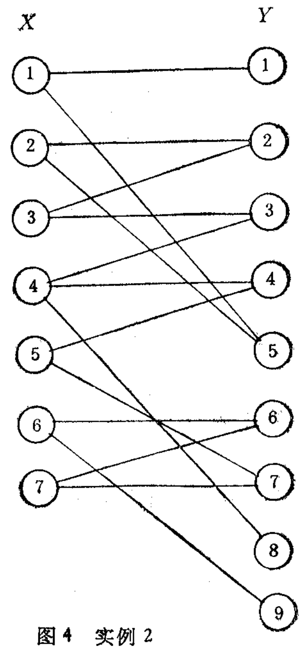

图4　实例2

参　考　文　献

[1] J. Edmonds, *Can. J. Math.*, 17(1965)3, 449—467.

[2] 陈立东，张良震，庄文君，电子学报，16(1988)1,53—58.

[3] M.N.S. Swamy et al.,Graphs, Networks, and Algorithms, John Wiley Sons, Inc. New York,(1981).

[4] N. Deo, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, Inc., (1974), pp. 117—181.

[5] M. Fukui et al., *IEEE Trans. on CAD*, CAD-6(1987)3, 383—391.

AN ALGORITHM FOR FINDING ALL PERFECT MATCHINGS IN A BIPARTITE GRAPH

Jiang Jianming

(*Hefei Institute of Economics and Technology, Hefei* 230052)

Chen Lidong　　Zhang Liangzhen

(*Anhui University, Hefei* 230039)

Abstract　Finding all perfect matchings in a given bipartite graph has important applications to the global routing and channel ordering for VLSI building block layout. An algorithm for finding all perfect matchings in a given bipartite graph $G(X,Y,E)$ is presented. First, the definition of marriage tree $T(x_i)$ is proposed and some properties of $T(x_i)$ are discussed. Second, it is proved that anyone of marriage trees, $T(x_i)$, resulted from $G(X,Y,E)$ corresponds to all perfect matchings in $G(X,Y,E)$. Finally, discription of the algorithm is given. The algorithm has been implemented in C language and good results have been obtained. The algorithm has also been employed as a program block in our VLSI building block layout system which has been developing.

Key words　Graph theory and its applications; Bipartite graph; Perfect matching; Marriage tree