第17卷 第2期
1995年3月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 17 No. 2
Mar. 1995

三 值 纠 错 码

方振贤　　刘　莹
（黑龙江大学物理系　哈尔滨　150080）

摘要　本文用二值编码代替现有的三值编码，从而提高信息位数；然后进一步采用一元运算将信息位数增到最大.

关键词　三值纠错码，二值码，一元运算

1　引言

已有作者研究了三值纠错码[1,2]，所采用的是三值编码方式，相当于用三值编码卡诺图对三值码元进行编码。本文改用二值编码卡诺图对三值码元编码，电路结构与前者相似，但信息位数提高. 为了进一步将信息位数提高到最大，在校验方程中引用一元运算，实现了采用一元运算的完备纠单错码。

2　三值纠单错码

设三值 (n, k) 线性分组码为 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_{k+r}$，$a_i \in B_3 = \{0, *, 1\}$(注)，$r = n - k$。本文采用二值编码方式，即用非全0的 r 位二值码 $b_1b_2\cdots b_r$ 对 n 个码元 $a_1 \sim a_{k+r}$ 编码，$b_i \in B_2 = \{0, 1\}$。其中用重量(即代码中非0位总个数)为1的二值码对校验位 $a_{k+1} \sim a_{k+r}$ 编码，而重量大于1的二值码对信息位 $a_1 \sim a_k$ 编码。a_i 的二值编码记为 V_i（取矢量形式 $V_i = [b_1, b_2, \cdots, b_r]$），称为 a_i 的检测码。对信息位数 $k < 121$ 的纠单错码可用≤7变量的卡诺图进行编码。如(15, 11)码的编码见图1。先填入校验位 $a_{12} \sim a_{15}$，然后填入信息位 $a_1 \sim a_{11}$。在 r 维卡诺图中将 $b_i = 1$ 的区域所有 a_i 做模3加"⊕"(⊕运算表见表2(a))得校验方程为

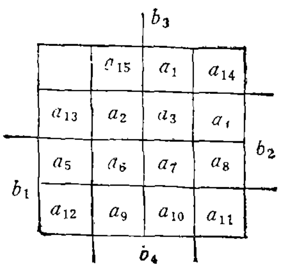

图1　(15,11)码

$$y_j = \Big(\sum_{a_i \in A_j} a_i\Big)_{\mathrm{mod}3}, \quad j = 1 \sim r, \tag{1}$$

其中 $A_j = \{a_i | b_j = 1\}$。记输出矢量 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_r)$。对给定 $a_1 \sim a_k$ 选取 $a_{k+1} \sim a_{k+r}$ 使正常时输出Y(记为 Y_0)为全0，即 $y_j = 0$，$j = 1 \sim r$，或 $Y_0 = 0$。发生单错 $a_{i'} \to a_{i'} \oplus \delta_{i'}$，$\delta_{i'} = *$ 或 1（正常时 $\delta_{i'} = 0$），(1)式中用 $a_{i'} \oplus \delta_{i'}$ 代替 $a_{i'}$，对给定 j，若 $a_{i'} \in A_j$，则 $y_j = \delta_{i'}$；反之，$a_{i'} \notin A_j$，则 $y_j = 0$。于是单错输出码 $Y_{\delta_{i'}} = \delta_{i'} \cdot V_{i'}$。

1993-12-03 收到，1994-01-31 定稿
方振贤　男，1936年生，教授，从事数字逻辑和计算机应用的教学与科研工作.
刘　莹　女，1948年生，实验师，从事近代物理实验和电子技术的教学与科研工作.
注：在对称三值逻辑中，*可视为-1.

单错偏差量和校正量可表示为

$$\delta=(y_1+y_2+\cdots+y_r),\ \Delta=(\delta\oplus\delta)_{\mathrm{mod}3}. \tag{2}$$

例 1　参看图 1(15,11) 码，发生 $a_3\to a_3\oplus *$。以 $a_3\oplus *$ 代替 a_3，由(1)、(2)式可得 $Y_{\delta_3}=(0,*,*,*)$，a_3 的检测码 $V_3=(0,1,1,1)$，Y_{δ_3} 与 V_3 相似。又 $\delta=0+*+*+*=*$，$\Delta=(*\oplus *)_{\mathrm{mod}3}=1$，校正后 $a_3\oplus *\oplus\Delta=(a_3\oplus *\oplus 1)_{\mathrm{mod}3}=a_3$。

纠单错电路示如图 2。左侧为按(2)式构成的校正量形成电路；右侧是单错定位电路。信号 $a_1\sim a_{k+r}$ 送入由(1)式构成的校验电路，其输出 $y_1\sim y_r$ 分别送入 r 个三值阈门 $u_1\sim u_r$，

$$Z_i=\begin{cases}1, & \text{当 } y_i\neq 0\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

经二值定位译码器产生定位信号 $s_1\sim s_{k+r}$，使发生单错那一位信号与 Δ 进行模 3 加，从而完成纠单错。最大信息位数 k 与校验位数 r 满足

$$k=2^r-r-1. \tag{3}$$

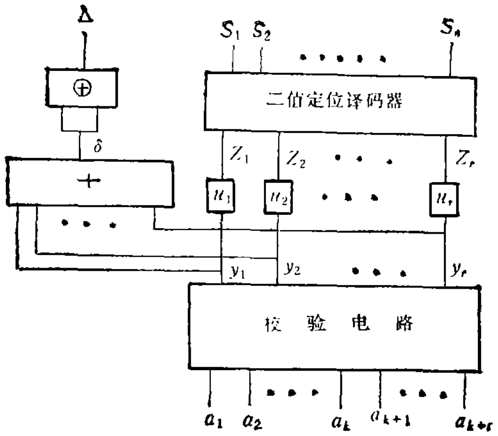

图 2　纠单错电路

按(3)式计算得表 1。文献[1,2]采用三值编码，其最大信息位数 k' 与 r 满足 $k'=2\cdot 3^{(r-1)/2}-r-1$，改进后信息位增量 Δk 表为

$$\Delta k=k-k'=2^r[1-(\sqrt{3}/2)^{r-1}].$$

表 1　纠单错码 $k-r$ 关系

r	2	3	4	5	6	7
k	1	4	11	26	57	120

3　三值纠单检双错码

可将二值逻辑中的纠单检双错码之一的奇检测码方法推广到三值逻辑中[3]。即用重量为奇数二值码 $b_1\sim b_r$ 对 $a_1\sim a_{k+r}$ 编码，称为奇检测码。所用方法和上述相同，得出的校验方程与(1)式形式一致。如(8,4)纠单检双错码的编码示如图 3。$a_5\sim a_8$ 为校验位，$a_1\sim a_4$ 为信息位。

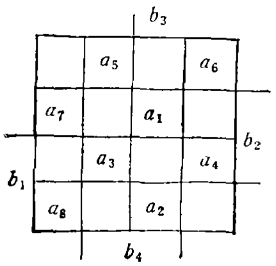

图 3　奇检测码

定理 1　任意三值 (n,k) 奇检测码是一类纠单检双错码。

证　仅证明可检双错。发生双错 $a_{i'}\to a_{i'}\oplus\delta_{i'}$ 和 $a_h\to a_h\oplus\delta_h$ 时，用 $a_{i'}\oplus\delta_{i'}$ 和 $a_h\oplus\delta_h$ 代替 $a_{i'}$ 和 a_h，由(1)式得到双错输出码 $Y=(\delta_{i'}V_{i'}\oplus\delta_h V_h)_{\mathrm{mod}3}=Y_{\delta_{i'}}\oplus Y_h$。分两种情况来讨论：(1) 设 $Y_{\delta_{i'}}$ 和 Y_h 有同位（j 相同）的非 0 分量。若 $\delta_{i'}=\delta_h$，代入 Y 式，因为 $\delta_{i'}\oplus\delta_h\neq\delta_h$ 和 $\delta_{i'}$，所以 Y 有不同值的非 0 分量。若 $\delta_{i'}\neq\delta_h$，因 $\delta_{i'},\delta_h\in$

$\{*,1\}$，则必有 $\delta_{i'}\oplus\delta_h=0$，结果Y的非0分量个数变为偶数．(2) 设 $Y_{\delta_{i'}}$ 和 δ_k 不存在同位非0分量．若 $\delta_{i'}=\delta_k$，则有偶数个非0分量．若 $\delta_{i'}\neq\delta_k$，Y 有不同值的非0分量．上述两种情形都与单错和正常输出码相区分．故可检双错．

$$\text{记}\quad v_i=\begin{cases}1, & \text{当 } y_i=*\text{时};\\ 0, & \text{否则};\end{cases}\qquad w_i=\begin{cases}1, & \text{当 } y_i=1\text{ 时};\\ 0, & \text{否则};\end{cases}$$

$$u_i=\begin{cases}1, & \text{当 } y_i\neq 0\text{ 时};^{(\text{注1})}\\ 0, & \text{否则};\end{cases}$$

计算：
$$B=\sum_{i=1}^{r}v_i,\quad C=\sum_{i=1}^{r}w_i,\quad A=\Big(1\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}u_i\Big)_{\text{mod}2},\quad D=\sum_{i=1}^{r}u_i.$$

其中 $B=1$ 表示有*分量；$C=1$ 表示有1分量；$A=1$ 表示有偶数个非0分量或全0；$D=1$ 表示非全0．由此可见，$BC=1$ 表示有不同值非0分量；$AD=1$ 表示有偶数个非0分量；因而检双错信号 W 表示为 $W=\overline{AD+BC}$．出现双错时 $W=0$，阻塞校正信号．(n,k) 纠单检双错码 k 和 r 关系满足 $k=2^{r-1}-r$．

4 完备三值纠单错码

本文进一步采用 a_i 的一元运算(对称逻辑非—)，将信息位增加到最大，$\oplus$和—两运算定义如表2(视*为−1)[6,7]，已有下列公式：

$$\left.\begin{aligned}&(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)=x\oplus y\oplus z,\\&x\oplus y=y\oplus x,\\&x\oplus\bar{x}=0,\ \overline{x\oplus y}=\bar{x}\oplus\bar{y}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

表 2 $\oplus$和—运算表

(a) $x\oplus y$

x \ y	0	*	1
0	0	*	1
*	*	1	0
1	1	0	*

(b) $\bar{x}$

x	$\bar{x}$
*	1
0	0
1	*

改写 a_i 的检测码为 $\tau_i=(t_1,t_2,\cdots,t_r)$．$t_j\in B_3=\{0,*,1\}$，$\tau_i$ 的三进制数为 $|\tau_i|$，且 $\bar{\tau}_i=(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\cdots,\bar{t}_r)$，其中 $|\tau_i|>|\bar{\tau}_i|$，$|\tau_i|\neq 0$．设 $n\leqslant(3^r-1)/2$，用重量(注2)等于1的 τ_i 表示 $a_{k+1}\sim a_{k+r}$；重量大于1的 τ_i 表示 $a_1\sim a_k$．其中 τ_i 的第 j 位值 $t_j(j=1\sim r)$ 表示 a_i 在校验方程 y_j 中出现的形式：$t_j=0$ 表示 a_i 不出现；而 $t_j=1$ 和*分别表示以 a_i 和 $\bar{a}_i$ 的形式出现；于是按 $t_1\sim t_r$ 各位值写出 r 个校验方程为

$$y_j=\bigoplus_{l\in A1j}a_l\oplus\bigoplus_{l\in A*j}\bar{a}_l,\qquad j=1\sim r,\tag{7}$$

注1：$v_i={}_0\bar{y}_i$，$w_i={}_0y_i$，$u_i={}_1y_i$[4]．且 $C=\sum_{j=1}^{r}w_i=\sum_{i=1}^{r}{}_1y_i={}_1\Big(\sum_{j=1}^{r}y_i\Big)={}_1\delta$，即可改用 δ 的阈门实现．

注2：仍用非0位的个数表示重量．编码时仅用 τ_i，不用 $\bar{\tau}_i$，但是单错输出码将出现 τ_i 和 $\bar{\tau}_i$ 两种．

其中 $A_{1j}=\{i|t_j=1\}$ 为 t_j 位出现 1 的所有相应的 a_i 下标 i 的集合，$A_{*j}=\{i|t_j=*\}$ 为出现$*$的 a_i 下标集合．正常时选择 a_{k+j} 使 $y_j=0$ ($j=1\sim r$)，即 $Y=(0,\cdots,0)=0$．如 $n=13$，令 $\tau_i=t_1t_2t_3$．$a_1,a_2,\cdots,a_{13}$ 依次按 τ_i 编码为01∗,011,10∗,1∗0,101,110,111,1∗∗,11∗,1∗1,100,010,001；而相应 $\bar{\bar{\tau}}_i$ 为0∗1,0∗∗,∗01,∗10,∗0∗,∗∗0,∗∗∗,∗11,∗∗1,∗1∗,∗00,0∗0,00∗．根据上述 τ_i 中的 t_1，t_2 和 t_3 三位值写出校验方程组为

$$\begin{cases} y_1=a_3\oplus a_4\oplus a_5\oplus a_6\oplus a_7\oplus a_8\oplus a_9\oplus a_{10}\oplus a_{11} \\ y_2=a_1\oplus a_2+\bar{\bar{a}}_4\oplus a_6\oplus a_7\oplus\bar{\bar{a}}_8\oplus a_9\oplus\bar{\bar{a}}_{10}\oplus a_{12} \\ y_3=\bar{\bar{a}}_1\oplus a_2\oplus\bar{\bar{a}}_3\oplus a_5\oplus a_7\oplus\bar{\bar{a}}_8\oplus\bar{\bar{a}}_9\oplus a_{10}\oplus a_{13} \end{cases}$$

正常时对任意信息码 $a_1\sim a_{10}$ 均可选取 $a_{11}\sim a_{13}$ 使 $y_1=y_2=y_3=0$．若发生单错 $a_4\to a_4\oplus 1$，则用 $a_4\oplus 1$ 代替上式中的 a_4．因 $\overline{\overline{a_4\oplus 1}}=\bar{\bar{a}}_4\oplus\bar{\bar{1}}=\bar{\bar{a}}_4\oplus *$，则产生输出码 $Y=(y_1,y_2,y_3)=(1,*,0)=\tau_4$．而发生单错 $a_4\to a_4\oplus *$，产生 $Y=\bar{\bar{\tau}}_4$．

定理 2　满足校验方程组(7)式的三值 (n,k) 码是纠单错码．若 $n=(3^r-1)/2$，则是完备三值纠单错码．

证　设正常时 $y_1\sim y_r=0$，发生单错 $a_{i1}\to a_{i1}\oplus\delta_{i1}$，用 $a_{i1}\oplus\delta_{i1}$ 代替 a_{i1} 代入(7)式．因 $\overline{\overline{a_{i1}\oplus\delta_{i1}}}=\bar{\bar{a}}_{i1}\oplus\bar{\bar{\delta}}_{i1}$，注意 $\bar{\bar{1}}=*$，$\bar{\bar{*}}=1$．显然当 $\delta_{i1}=1$ 时，产生输出码 $Y=\tau_{i1}$，否则 $\delta_{i1}=*$，$Y=\bar{\bar{\tau}}_{i1}$．又因任两个单错输出码皆可区分，故可纠单错．当 $n=(3^r-1)/2$ 时，即 $3^r=1+2\binom{n}{1}$，满足完备纠错码条件(注)，故该定理成立．

r 与最大信息位数 k_m 的关系为 $k_m=(3^r-1)/2-r$．此式相应于完备纠单错码．k/n 显著提高．

5　结论

综上所述，采用二值编码方式时，a_i 以"有和无"二种形式出现在校验方程中，因"有和无"具有二值特征，所以二值编码是高效的．引入一元运算后，a_i 出现的形式变为三种，在满足线性叠加的前提下，输出码总数增大，因而可将信息位数增到最大．类似的方法可推广到 p 值纠错码．

参　考　文　献

[1] 顾秋心．电子学报，1986，14(5)：31—36．

[2] 钱博森．TTL 多值逻辑电路及其应用．北京：电子工业出版社，1989，81—85．

[3] 方振贤．电子学报，1986，14(3)：61—67．

[4] 方振贤．计算机学报，1982，5(6)：411—418．

[5] 大昌良昭，岛田良作，长谷川利治．電子通信学会论文誌，1981，J64-D(6)：502—509．

[6] 田山典男，舛田次郎，佐藤利三郎．電子通信学会论文誌，1976，J59-D(4)：245—251．

[7] 方振贤．计算机学报，1990，13(9)：713—716．

注：任意 p 值 (n,k) 完备纠 m 重错码满足

$$p^r=1+(p-1)\binom{n}{1}+(p-1)^2\binom{n}{2}+\cdots+(p-1)^m\binom{n}{m}.$$

TERNARY ERROR CORRECTING CODES

Fang Zhenxian Liu Ying
(*Department of Physics, Heilongjiang University, Harbin* 150080)

Abstract By using the binary code instead of the ternary code, a increment in number of information bit is obtained. Then by adapting the one-element-operator, the number of information bit increases further to maximum.

Key words Ternary error correcting codes, Binary code, One-element-operator

中国电子学会首届青年学术年会

征文范围

A 电子信息理论的新应用	B 人工神经网络及其应用	C 通讯与信息高速网络
D 信号与信息处理	E 器件、电路与系统	F 电磁场与微波技术
G 多媒体与幻真技术	H 光电子与微电子	I 复杂系统理论与自动控制
J 计算机学与计算机应用	K 模糊逻辑及其应用	L 生物电子学
M 机电一体化	N 电子信息高等教育	

来稿要求

1 理论联系实际，内容具体，突出作者的工作与结果，具有较重要的学术价值．未在国内外公开发行的刊物或全国性学术会议上发表或宣读过．
2 第一作者年龄不超过 40 岁，文末附不超过 100 字的第一作者简介．
3 来稿请注明论文所属征文范围中的类别号 1 至 2 个，并在信封上标注征文二字．
4 为了扩大本次会议的学术影响，本次会议论文集将由专业出版社正式出版．论文拟送国内、外有关文献索引社供引用，因此，正式论文必须有中、英文题目及各不超过 100 字的中、英文摘要．
5 请作者先提交不超过 6000 字(包括图、文)的应征论文一式二份．录用的论文请按统一格式（随录用通知寄出)激光打印。

征文截止时间 95 年 4 月 1 日
正式稿截止时间 95 年 6 月 1 日
录取通知 95 年 5 月 1 日前发出
会议时间 95 年 9 月 24—28 日
投稿地址 710072，西安市西北工业大学电子工程系 何明一(收)