

基于多项式插值的小波变换预滤波器设计

王卫卫 水鹏朗

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘要: 该文提出了基于多项式插值的预滤波器设计方法, 这种方法从分析尺度函数出发设计预滤波器。信号均匀采样时, 预滤波器是时不变滤波器, 其系数是分析尺度函数各阶矩的线性组合。预滤波器的逼近阶取决于分析尺度函数的支撑集长度而不是正则阶。该设计方法有两个突出的优点: 可以设计比传统预滤波器更高逼近阶的预滤波器, 如综合尺度函数整数点的值构成的特殊预滤波器和由预尺度函数法产生的预滤波器等, 可以很自然地推广到信号非均匀采样的情况, 相应的预滤波器是时变滤波器, 逼近阶依赖于分析尺度函数的支撑集长度和采样点的分布。数值结果表明, 利用基于多项式插值的小波变换预滤波器可以得到逼近效果更好的初始尺度系数。

关键词: 信号处理, 预滤波器, 小波级数变换, 离散小波变换, 多项式插值

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)11-1765-05

Wavelet Transform Prefilter Design Based on Polynomial Interpolation

Wang wei-wei Shui Peng-lang

(National Key Lab.of Radar Signal Processing Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract This paper presents a novel method to design prefilters starting from analysis scaling functions and utilizing the algebraic polynomial interpolation. In the case of uniform sampling, the obtained prefilters are time-invariant and its coefficients are linear combinations of the moments of the analysis scaling function. Its approximate order is dependent on the support length of analysis scaling function rather than its degree of regularity. This method provides two outstanding advantages: the prefilters can be designed with higher approximate orders than the existing prefilters, e.g., the special prefilters from the values at integer points of the synthesis scaling function and the prefilters from prescaling function method; moreover, the method is easy to be extended to the case of nonuniform sampling, in which the prefilters are time-variant and their approximate order is dependent on the support length of analysis scaling function as well as the distribution of sample points.

Key words Signal processing, Prefilter, Wavelet series transform, Discrete wavelet transform, Polynomial interpolation

1 引言

子波变换作为信号分析和处理的一种重要工具已经广泛应用于图像处理、语音处理、数值分析等众多领域。有三类小波变换, 连续小波变换(CWT), 小波级数变换(WST)和离散小波变换(DWT)。CWT用具有连续参数的基表示连续时间信号, WST用离散参数的基表示连续时间信号, 而DWT用离散参数的基表示离散信号。DWT可以通过塔型分解/综合算法快速实现, WST常常需要用DWT近似实现。除了实现的快速性外, 另外两个原因也使得我们必须这样做: 大多数小波基函数缺乏解析表达式; 大多数应用中信号以离散采

样的形式给出。在这一近似中, DWT的初始化是一个关键步骤。初始化过程包括两步: 确定信号投影的多分辨子空间, 即确定初始尺度因子; 计算信号在多分辨子空间上的投影系数。前者与待处理信号的特征和综合尺度函数产生的多分辨分析的逼近性能密切相关, 后者通过对信号采样值进行预处理来实现, 其中预滤波器的设计是关键技术。尺度因子的选择问题目前已基本解决。Strang^[1], Sweldens和Iseussens^[2], Unser^[3]和张建康^[4,5]先后给出了两带正交、双正交、 M -带正交小波的逼近误差与尺度因子 J 的关系。

信号的采样问题通常有两种情况: 一种是确定了尺度因

子后，按照下列形式对信号进行采样， $x(k) = M^{-J/2} \cdot f(M^{-J}k), k \in Z$ ，在 Mallat 分解算法中，初始系数 $c_j(k)$ 就直接用 $x(k)$ 近似，这样的近似仅仅对常数信号是精确的；另一种情况是信号本身就离散的形式给出，如数字图像。这时，需要对采样后的离散信号进行预处理去估计初始尺度系数 $c_j(k)$ 。通常是先根据尺度函数的性质设计预滤波器 $q(n)$ ，然后对采样值进行预滤波得到 $c_j(k)$ 的估计值，即

$$\hat{c}_j(k) = x(k) * q(k) = \sum_k q(l)x(k-l) \quad (1)$$

Abry和Flandrin^[6]首先提出了用带限采样函数设计两带正交小波变换预滤波器的方法，所得预滤波器是IIR的。Xia等^[7]设计了计算双正交小波初始尺度系数的最优预滤波器，前提条件是需要知道信号 $f(t)$ 和分析尺度函数Fourier变换。后来，张建康^[4,5]等扩展这些结果到 M -带正交小波的情况，并提出了预尺度函数设计方法，给出了满足Strang-fix条件^[1]的预滤波器，这种情况下，预滤波器的逼近阶等于综合尺度函数的正则阶。

本文提出基于代数多项式插值的预滤波器设计方法。从分析尺度函数出发设计预滤波器，得到的预滤波器系数是分析尺度函数各阶矩的线性组合。预滤波器的逼近阶仅依赖于分析尺度函数的支撑长度。对于大多数的双正交小波变换系统，逼近阶比满足 Strang-fix 条件的预滤波器高。特别是，本文方法对于信号非均匀采样的情况仍适用，而现有的预滤波方法无法用于这种情况。非均匀采样情况下，预滤波器是一个时变滤波器，逼近阶依赖于分析尺度函数的支撑集长度和采样点的分布情况。

2 M-带双正交小波的结构和性质

一个 M -带的双正交小波由两组函数的伸缩和平移构成。设综合和分析尺度和小波函数分别是 $\{\varphi_i(t), \psi_i(t), i = 0, 1, \dots, M-1\}$ ， $\varphi_0(t)$ 是综合尺度函数， $\psi_0(t)$ 是分析尺度函数。这些函数满足双正交关系和双尺度方程：

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi_i(t-k), \psi_{i'}(t-k') \rangle &= \delta(i-i')\delta(k-k') \quad k, k' \in Z \\ \varphi_i(t) &= \sqrt{M} \sum_n h_i(n)\varphi_0(Mt-n) \\ \psi_i(t) &= \sqrt{M} \sum_n g_i(n)\psi_0(Mt-n) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $h_i(n), g_i(n)$ 表示综合和分析滤波器组， $\delta(0)=1; \delta(k)=0, k \neq 0$ ， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。

小波级数变换把函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 展开成 $(M-1)$ 个综合小波函数的伸缩和平移的线性组合：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_j \sum_{i=1}^{M-1} \sum_k b_{i,j}(k)\varphi_{i,j,k}(t) \\ &= \sum_j \sum_{i=1}^{M-1} \sum_k b_{i,j}(k)M^{j/2}\varphi_i(M^j t - k) \\ b_{i,j}(k) &= M^{j/2} \int f(t)\psi_i(M^j t - k)dt \end{aligned}$$

序列 $b_{i,j}(k)$ 是函数 $f(t)$ 的小波系数。当多分辨子空间 V_j 上的尺度系数 $c_j(k)$ 得到以后， $j < J$ 时的各层尺度系数 $c_j(k)$ 和小波系数 $d_{i,j}(k)$ 可以从 DWT 计算得到：

$$\left. \begin{aligned} c_j(k) &= \sum_n c_{j+1}(n)g_0(n-Mk) \\ d_{i,j}(k) &= \sum_n c_{j+1}(n)g_i(n-Mk) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

因此，在WST的DWT实现中，关键是怎样精确地估计 $c_j(k)$ 。很多实际应用可以利用的往往是信号的离散采样值，而不是解析表达式，因此预处理采样值或者设计合适的预滤波器是非常关键的。设计预滤波器时，常常需要尺度函数的一些性质，如正则阶、支撑集、矩性质、Strang-fix条件^[1]和Coiflet性质等。下面简述这些概念和传统的预尺度函数方法。

设 M -带的尺度函数 $\varphi_0(t)$ 满足双尺度方程：

$$\varphi_0(t) = \sqrt{M} \sum_{n=0}^{MK-1} h_0(n)\varphi_0(Mt-n) \text{ 和 } h_0(0)h_0(MK-1) \neq 0$$

如果尺度滤波器满足

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^{MK-1} h_0(n)z^{-n} = (1+z^{-1}+\dots+z^{-(M-1)})^L Q(z)$$

其中 $Q(z)$ 不再含有前面的因式，称尺度滤波器 L 阶正则^[8]。这等价于 $2k\pi/M, k=1, 2, \dots, M-1$ 是它频率响应的 L 重零点。特别是，尺度函数的支撑集是 $[0, \Omega]$ ， Ω 表示不超过 $(MK-1)/(M-1)$ 的最大整数。

定义1 一个 M -带的尺度函数如果满足下列条件：

$$\hat{\varphi}_0^{(m)}(2k\pi) = \delta(k)\delta(m), \quad m=0, 1, \dots, L-1, k \in Z \quad (4)$$

那么称尺度函数满足 L 阶 Strang-fix 条件^[1] 和 L 阶 Coiflet 性质^[4,5]。

尺度函数是紧支撑时，条件式(4)等价于尺度滤波器 K 阶正则，并且尺度滤波器的前 L 阶矩满足：

$$m_0(k) = \sum_n n^k h_0(n) = \sqrt{M} \delta(k), \quad k=0, 1, \dots, L-1 \quad (5)$$

定义2 对式(1)的预滤波过程，如果对次数不超过 K 次的多项式信号， $\hat{c}_j(k) = x(k) * q(k) = \sum_k q(l)x(k-l) = c_j(k)$ 成立，即初始系数的估计是精确的，则称预滤波器 $q(n)$ 是 K 阶的。

如果条件式(4)满足，则用信号的均匀采样值 $x(k) = M^{-J/2} f(M^{-J}k)$ 逼近初始尺度系数的逼近阶等于 L ，即 $|c_j(k) - x(k)| = O(M^{-JL}), (J \rightarrow \infty)$ ，符号 O 表示同阶无穷小。

预尺度函数法^[4]就是从这一性质出发构造预滤波器。预尺度函数表示成 L 阶正则的综合尺度函数整数平移的线性组合:

$$s_q(t) = \sum_{l=0}^{L-1} q(l)\varphi_0(x+l) \quad (6)$$

选择参数 $q(l)$ 使得 $s_q(t)$ 满足条件式(4)。参数可以利用 $\varphi_0(t)$ 的前 L 阶矩并解线性方程组得到^[4]。相应的预滤波过程如下式所示:

$$\hat{c}_J(k) = M^{-J/2} \sum_{l=0}^{L-1} q(l)f(M^{-J}(k+l)) \quad (7)$$

这样得到的预滤波器是 L 阶的。在预尺度函数法和我们后面介绍的新方法中, 尺度函数的矩的计算是一个关键。虽然大多数尺度函数缺乏解析式, 它的各阶矩只要利用尺度滤波器的矩递归计算即可。

性质 1 设至少一阶正则的尺度函数满足双尺度方程

$$\psi_0(t) = \sqrt{M} \sum g_0(n) \psi_0(Mt-n)$$

尺度滤波器和尺度函数的矩分别定义作

$$m_{g_0}(k) \equiv M^{-1/2} \sum n^k g_0(n), \quad M_{\psi_0}(k) \equiv \int t^k \psi_0(t) dt \quad (8)$$

那么, 尺度函数的矩可以按照下面的递推公式计算^[4]:

$$M_{\psi_0}(0) = 1, \quad M_{\psi_0}(k) = \frac{1}{M^k - 1} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} m_{g_0}(k-l) M_{\psi_0}(l) \quad (9)$$

3 均匀采样的预滤波器设计

预尺度函数法中, 预滤波器的逼近阶由综合尺度函数的正则阶确定。下面我们从分析尺度函数和多项式插值的角度考虑预滤波器的设计问题。当尺度因子 J 和信号的均匀采样值给定以后, 预滤波的关键问题是如何利用尺度函数的性质和采样点的值精确估计下面的各积分:

$$c_J(n) = M^{J/2} \int f(t)\psi_0(M^J t - n) dt, \quad n \in Z \quad (10)$$

设分析尺度函数 $\psi_0(t)$ 的各阶矩 $M_{\psi_0}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi_0(t) dt$

(这可以利用性质 1 的递推公式从分析低通滤波器得到)和支撑集是区间 $[N_1, N_2]$, 于是式(10)的积分变成

$$\begin{aligned} c_J(n) &= M^{J/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(M^J t - n) dt \\ &= M^{-J/2} \int_{N_1}^{N_2} f(M^{-J}(t'+n))\varphi(t') dt' \end{aligned} \quad (11)$$

由于在分析尺度函数的支撑区间 $[N_1, N_2]$ 上, 可以利用的信号采样值是 $f(M^{-J}(s+n))$, $s = N_1, N_1+1, \dots, N_2$, 为了估计积分值, 在区间 $[M^{-J}N_1, M^{-J}N_2]$ 上对信号 $f(t)$ 进行 $N_2 - N_1$ 次多项式插值, 从而得到 $f(t)$ 在该区间的近似多项式:

$$\begin{aligned} f(M^{-J}(t+n)) &\approx P(M^{-J}(t+n)) \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_2} f(M^{-J}(k+n))L_{N_2-N_1,k}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $L_{N_2-N_1,s}(t)$ 是 $N_2 - N_1$ 次Lagrange插值基函数^[9]:

$$L_{N_2-N_1,k}(t) = \prod_{i=N_1, i \neq k}^{N_2} \frac{t-i}{k-i} \quad (13)$$

把式(12)的近似公式代入式(11), 得到

$$\begin{aligned} \hat{c}_J(n) &= M^{-J/2} \int_{N_1}^{N_2} P(M^{-J}(t+n))\psi_0(t) dt \\ &= M^{-J/2} \sum_{k=N_1}^{N_2} f(M^{-J}(k+n)) \int_{N_1}^{N_2} \psi_0(t)L_{N_2-N_1,k}(t) dt \end{aligned}$$

定义

$$q(k) \equiv \int_{N_1}^{N_2} \psi_0(t)L_{N_2-N_1,k}(t) dt, \quad k = N_1, N_1+1, \dots, N_2 \quad (14)$$

预滤波器系数 $q(k)$ 是 $\psi_0(t)$ 前 $(N_2 - N_1 + 1)$ 阶矩的线性组合并且不依赖于信号和参数 n , 因此是时不变滤波器。相应的预滤波公式为

$$\hat{c}_J(n) = M^{-J/2} \sum_{s=N_1}^{N_2} q(s)f(M^{-J}(k+n)) \quad (15)$$

定理 1 设 $f(t) \in C^{(N_2-N_1+1)}$ 并且 $(N_2 - N_1 + 1)$ 阶导数有界, 则式(15)中预滤波公式的误差满足

$$|c_J(n) - \hat{c}_J(n)| \leq CM^{-J(N_2-N_1+3/2)} \quad (16)$$

其中

$$C = \frac{\max_{\xi} |f^{(N_2-N_1+1)}(\xi)|}{(N_2 - N_1 + 1)!} \left| \int_{N_1}^{N_2} \prod_{s=N_1}^{N_2} (t'-s)\psi_0(t') dt' \right| \quad (17)$$

显然, 当信号 $f(t) \in \text{span}\{1, x, \dots, x^{N_2-N_1}\}$, 式(15)得到的初始尺度系数是精确的, 这样得到的预滤波器的逼近阶是 $N_2 - N_1 + 1$ 。定理的证明比较简单, 按照多项式插值的基本结论^[9]:

$$\begin{aligned} f(M^{-J}(t+n)) &= P(M^{-J}(t+n)) + \frac{f^{(N_2-N_1+1)}(\xi)}{(N_2 - N_1 + 1)!} \omega_{N_2-N_1+1}(t) \\ \omega_{N_2-N_1+1}(t) &= M^{-J(N_2-N_1+1)} \prod_{s=N_1}^{N_2} (t-s) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |c_J(n) - \hat{c}_J(n)| &\leq M^{-J/2} \int_{N_1}^{N_2} \frac{f^{(N_2-N_1+1)}(\xi)}{(N_2 - N_1 + 1)!} \omega_{N_2-N_1+1}(t)\psi_0(t) dt \\ &\leq M^{-J(N_2-N_1+3/2)} \frac{\max_{\xi} \left\{ |f^{(N_2-N_1+1)}(\xi)| \right\}}{(N_2 - N_1 + 1)!} \int_{N_1}^{N_2} \prod_{s=N_1}^{N_2} (t'-s)\psi_0(t') dt' \end{aligned}$$

从上面的定理, 可以得到下面重要的结论:

(1) 对于两带的正交 Daubechies 小波类, N 正则阶的尺度函数的支撑集是 $[0, 2N - 1]$, 按照预尺度函数设计的预滤波器逼近阶是 N , 按照本文方法得到的预滤波器的逼近阶是 $2N$ 。

(2) 对于两带紧支撑线性相位双正交小波^[10], 分析尺度函数的支撑集长度往往比综合尺度函数的正则阶大得多, 如双正交样条小波。因此, 本文方法设计的预滤波器逼近阶比预尺度函数设计的预滤波器逼近阶高得多。

(3) 对于最短支撑的 M -带正交小波^[8], 当 M 很大时, 两种方法得到的预滤波器逼近阶接近。由于这类正交尺度函数中, K 阶正则的尺度函数的支撑集长度是不超过 $(MK-1)/(M-1)$ 的最大整数。

4 非均匀采样的预滤波器设计

在一些应用中, 我们可能碰到信号非均匀采样的情况。这种情况下, 对信号进行小波分解有两种可供选择的方式: 一种是采用非均匀采样的小波变换系统——第二代小波^[11]; 另一种是经过初始化后仍用传统的均匀采样小波变换系统进行处理。采用后一种方式时, 初始化变得非常关键。传统的预滤波器设计方法很难适用这种情况。而基于多项式插值的方法很容易推广到这种情况, 用时变预滤波器逐点估计初始尺度系数。

设分析尺度函数 $\psi_0(t)$ 的支撑集是 $[N_1, N_2]$, 信号的离散采样值是 $f(t_i), i \in Z$ 。因此, 在计算初始尺度系数:

$$c_J(n) = M^{-J/2} \int_{N_1}^{N_2} f(M^{-J}(t'+n))\varphi(t')dt'$$

时, 可以利用的采样点满足

$$t_i \in \Omega_n \equiv [M^{-J}(N_1+n), M^{-J}(N_2+n)] \quad (18)$$

设满足式(18)的采样点有 K_n 个, 这些点依次是 $M^{-J}\{n+t_{n,0}, n+t_{n,1}, \dots, n+t_{n,K_n-1}\}$, 相应的采样值重新记作

$$f(k, n) = f(M^{-J}(n+t_{n,k})), k=0, 1, \dots, K_n-1; n \in Z \quad (19)$$

类似于均匀采样情况, 在区间 Ω_n 上利用(19)式的采样点作为型值点进行 K_n-1 次多项式插值, 得到信号 $f(t)$ 在该区间上的展开式:

$$\left. \begin{aligned} & f(M^{-J}(t+n)) \\ &= \sum_{k=0}^{K_n-1} f(n, k) L_{K_n, k}(t) + M^{-JK_n} \frac{f^{(K_n)}(\xi)}{K_n!} \omega_{K_n}(t) \quad (20) \\ & L_{K_n, k}(t) = \prod_{i=0, i \neq k}^{K_n-1} \frac{t-t_{n,i}}{t_{n,k}-t_{n,i}}, \quad \omega_{K_n}(t) = \prod_{i=0}^{K_n-1} (t-t_{n,i}) \end{aligned} \right\}$$

用前面的多项式近似信号并代入式(11), 我们得到

$$\begin{aligned} \hat{c}_J(n) &= M^{-J/2} \sum_{k=0}^{K_n} f(k, n) \int_{N_1}^{N_2} L_{K_n, k}(t) \psi_0(t) dt \\ &= M^{-J/2} \sum_{k=0}^{K_n} q(n, k) f(k, n) \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$q(n, k) = \int_{N_1}^{N_2} L_{K_n, k}(t) \psi_0(t) dt, k=0, 1, \dots, K_n-1 \quad (22)$$

按照式(20)和(22), 预滤波器系数既依赖于 n 也依赖于区间 Ω_n 内采样点的分布。因此是一个时变滤波器。

类似地, 对非均匀采样的情况, 容易证明下面结论:

定理 2 如果对于非均匀采样情况, 落在每个小区间 Ω_n 的采样点的数目满足

$$K = \min\{K_n, n \in Z\} \quad (23)$$

那么, 对于信号 $1, t, t^2, \dots, t^{K-1}$, 由式(21)给出的初始逼近系数是精确的, 即得到的时变预滤波器至少是 K 阶的。

然而, 我们没法得到式(16)那样的误差估计公式, 由于式(20)的多项式 $\omega_{K_n}(t)$ 依赖于 n 和采样点的分布。

5 数值结果

为了进一步证实本文设计的预滤波器的优点, 我们以带限 Sinc 函数:

$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

为例来比较基于多项式插值的预滤波器和预尺度函数预滤波器^[4,5]的初始化误差。利用 Sinc 函数作为测试信号是有意义的, 由于一般得到的采样是带限信号的采样, 利用 Sinc 函数的伸缩和平移可以从采样值精确重构相应的连续时间信号。由于 Sinc 函数不属于紧支撑尺度函数生成的多分辨子空间中, 我们依次计算它在 V_0, V_1 和 V_2 中的初始系数误差, 相当于采样间隔依次为 $1, 1/M$ 和 $1/M^2$ 。整体误差定义为

$$e_J(\psi_0) = \sum_n (c_J(n) - \hat{c}_J(n))^2, J=0, 1, 2 \quad (24)$$

我们选用 3 种不同的小波变换系统, Db2——二阶正则 Daubechies 小波; Bior9/7^[10]——四阶正则的双正交小波, 分析尺度滤波器长度是 9, 综合尺度滤波器长度是 7; 三带三阶正则的正交小波^[8]。3 个小波变换系统的初始系数误差如表 1 所示。

表 1 初始系数整体误差对比

预滤波器类型	多项式插值方法			预尺度函数方法		
	$J=0$	$J=1$	$J=2$	$J=0$	$J=1$	$J=2$
尺度因子						
Db2	7.71e-2	9.78e-4	5.13e-6	8.72e-2	1.20e-2	9.13e-4
Bior9/7	2.16e-3	3.40e-8	6.91e-14	3.45e-1	1.30e-2	1.06e-4
三带正交小波	3.39e-2	3.88e-6	8.21e-11	6.65e-3	3.56e-5	6.75e-8

图 1 中, 3 幅图像依次给出了三带小波 $J=0, 1$ 和 2 的初始尺度系数的误差, 虚线是多项式插值方法、实线是预尺度函数方法。可以看出 $J=1$ 和 2 时, 多项式插值方法明显优于预尺度函数方法, 这与前面的理论分析是吻合的。当 $J=0$ 时, 预尺度函数法优于多项式插值方法。这时, 虽然基于多项式插值的预滤波器具有更高的逼近阶, 但从式(16)和(17)可以看出 $J=0$ 时, 高逼近阶并不起作用。另外, 对于紧支撑的尺度函数, 为使带限信号在多分辨空间有较小的投影误差, 信号必须进行不同程度的过采样, 因此 $J=0$ 的情况在应用中出现的可能性不大。

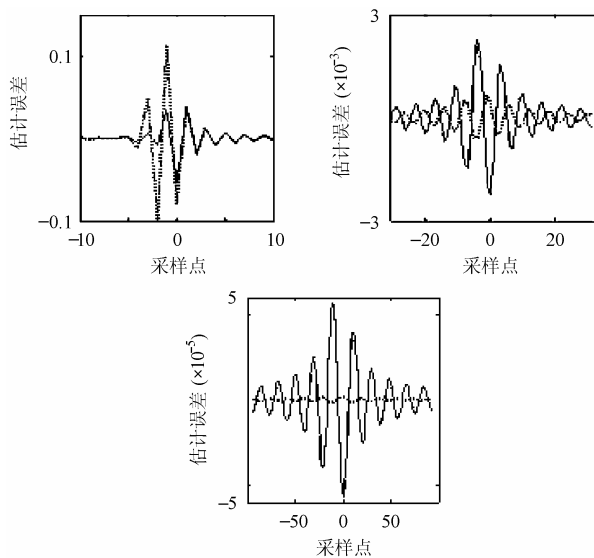


图 1 三带小波 $J=0,1,2$ 的初始化误差

最后, 我们说明一下本文方法的其它可能推广。由于小波的初始化是一个更复杂的问题, 涉及到把信号的采样值转换成向量序列, 多项式插值的预滤波器设计方法也可以用于这一问题。再者, 高逼近阶的预滤波器只是对充分光滑的信号(见定理 1 和定理 2 关于信号的假定)适用, 而对于不太光滑的信号, 如果我们预先知道信号是几阶连续可导的, 可以利用多项式拟合代替多项式插值设计预滤波器。这样, 既充分利用了信号在分析尺度函数支撑集内采样点的信息, 也使得预滤波器的逼近阶匹配于信号的光滑性, 应该得到更好的预滤波效果。

参 考 文 献

- [1] Strang G. Wavelets and dilation equations: A brief introduction. *SIAM Rev.*, 1989, 31: 613 – 627.
- [2] Sweldens W, Piessens R. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1994, 31(4): 1240 – 1264.
- [3] Unser M. Approximation power of biorthogonal wavelet expansions. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44(3): 519 – 527.
- [4] Zhang J K. 小波级数变换的初始化及 M -带插值小波理论研究. [博士学位文], 西安: 西安电子科技大学, 1999.
- [5] Zhang J K, Bao Z. Initialization of orthogonal discrete wavelet transforms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(5): 1474 – 1477.
- [6] Abry P, Flandrin P. On the initialization of the discrete wavelet transform algorithm. *IEEE Signal Processing Lett.*, 1994, 1(2): 32 – 34.
- [7] Xia X G, Kuo C C J, Zhang Z. Wavelet coefficient computation with optimal prefiltering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(8): 2191 – 2197.
- [8] Steffen P, Heller P N, Gopinath R A. Theory of regular M -band wavelet bases. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3497 – 3511.
- [9] Burden R L, Faires J D. Numerical Analysis. Brooks/Cole, Thomson Learning, Inc., 1998: 107 – 166.
- [10] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1992, 45(5): 485 – 560.
- [11] Sweldens W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 1997, 29(2): 511 – 546.

王卫卫: 女, 1970 年生, 副教授, 小波理论及其在信号处理、图像处理、数字水印方面的应用。

水鹏朗: 男, 1967 年生, 教授, 博士生导师, 小波理论及其在信号处理、图像处理方面的应用。