

# M 带离散时间子波变换<sup>1</sup>

张子敬 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

**摘 要** 二带连续时间子波变换可由无限级树形正交镜像滤波器 (QMF) 组产生, 类似地, 二带离散时间子波变换可表示为有限级树形 QMF 组. 该文对二带离散时间子波变换进行了推广, 给出了  $M$  带离散时间子波变换, 并研究了  $M$  带离散时间子波变换与  $M$  带仿酉滤波器组之间的关系. 结果表明, 在  $L$  级  $M$  带树形滤波器组中, 如果每级滤波器组是仿酉滤波器组, 则该树形滤波器组所产生的离散时间子波基是正交基.

**关键词**  $M$  带子波, 离散时间子波变换, 仿酉滤波器组  
**中图分类号** TN911.72

## 1 引 言

子波的理论最初是从连续时间函数发展起来的, 80 年代后期, 人们认识到子波与正交镜像滤波器 (QMF) 组有非常密切的关系, 连续时间子波可由无限级的二分支树形 QMF 组产生<sup>[1]</sup>. 为了便于处理数字信号, 人们又将子波的概念推广到离散时间子波变换<sup>[2]</sup>. 连续子波变换 (CWT) 可表示为  $X_{\text{CWT}}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt$ , 其中  $x(t)$ ,  $a$ ,  $b$  都是连续的. 如果  $a, b$  取离散值, 则称为离散子波变换 (DWT) 或子波级数变换 (WST). 离散时间子波变换 (DTWT) 则是对应于数字信号  $x(n)$  的子波变换.

二带子波变换的基本思想是用一个母“子波”的伸缩和平移表示能量有限的信号, 它克服了短时傅氏变换的一些缺点, 能够用不同的频率通道对信号作“等  $Q$ ”分解. 低频通道具有较窄的带宽, 而高频通道具有较宽的带宽. 这些特征适合于分析混有突变成分的低频信号, 但不适合于分析高频窄带信号<sup>[3]</sup>. 因此, 人们又将二带子波推广到  $M$  带子波<sup>[3-6]</sup>. 与二带子波相比,  $M$  带子波可同时具有紧支撑、线性相位、高正则度等特点, 因而具有更好的能量集中性, 可以更细致地表示信号.

本文对二带离散时间子波变换进行了推广, 给出了  $M$  带离散时间子波变换, 并研究了  $M$  带离散时间子波变换与  $M$  带仿酉滤波器组之间的关系.

## 2 M 带离散时间子波变换

与二带离散时间子波变换相类似,  $M$  带离散时间子波变换实际上是有限级  $M$  带树形完全重构 (输出等于输入) 滤波器组, 其中每级可有不同的滤波器组, 如图 1(a) 所示. 与二带离散时间子波变换不同的是, 在图 1(a) 中, 每一级有  $M$  个不同的滤波器  $H_0^{(i)}(z), \dots, H_{M-1}^{(i)}(z)$ , 其中  $H_0^{(i)}(z)$  是第  $i$  级的低通滤波器,  $H_1^{(i)}(z), \dots, H_{M-1}^{(i)}(z)$  是第  $i$  级的带通滤波器. 这种树形滤波器组可由  $L(M-1)+1$  个通道的等效的并行分析滤波器组  $H_0(z), H_1(z), \dots, H_{L(M-1)}(z)$  实现, 如图 2 所示. 设  $y_k(n)$  为输入信号  $x(n)$  经滤波器  $H_k(z)$  滤波后的  $D_k$  倍下采样, 则有

<sup>1</sup> 1999-02-11 收到, 1999-10-27 定稿  
国家自然科学基金和国家“863”高技术资助项目

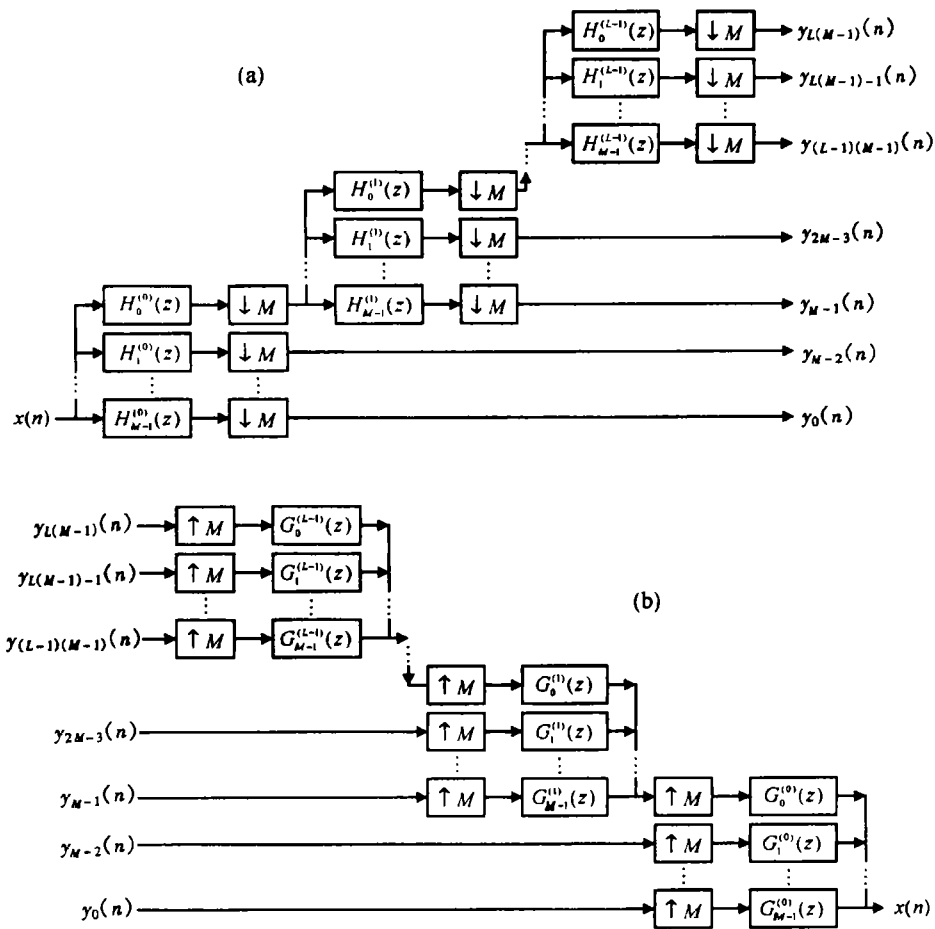


图 1 (a)  $M$  带离散时间子波变换 (b)  $M$  带离散时间逆子波变换

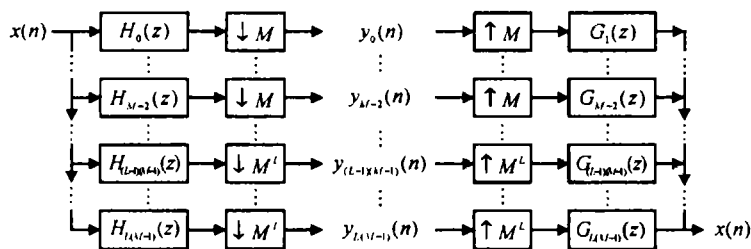


图 2 等效的并行分析、综合滤波器组

定义 1 用  $L$  级  $M$  带树形分析滤波器组把离散信号  $x(n)$  变换为如下  $L(M-1)+1$  个离散信号  $y_k(n)$  的变换称为  $M$  带离散时间子波变换,  $y_k(n)$  称为  $M$  带离散时间子波变换系数:

$$y_k(n) = \sum_m h_k(m)x(D_k n - m), \quad 0 \leq k \leq L(M-1). \quad (1)$$

其中  $L$  为滤波器组的级数,  $h_k(m)$  为等效的并行分析滤波器  $H_k(z)$  的单位脉冲响应,  $D_k$  为抽取因子.

用  $\text{Fix}(x)$  表示取  $x$  的整数部分, 定义  $I_k$  为

$$I_k = \text{Fix}(k/(M-1)), \quad 0 \leq k \leq L(M-1) - 1. \quad (2)$$

因此  $D_k$  可表示为

$$D_k = \begin{cases} M^{I_k+1}, & 0 \leq k \leq L(M-1) - 1, \\ M^L, & k = L(M-1). \end{cases} \quad (3)$$

输入信号  $x(n)$  可由子波系数  $y_k(n)$  通过树形综合滤波器组  $G_0^{(i)}(z), \dots, G_{M-1}^{(i)}(z)$  完全重构, 如图 1(b) 所示. 从而有定义 2.

**定义 2** 用  $L$  级  $M$  带树形综合滤波器组把离散时间子波变换系数  $y_k(n), k = 0, \dots, L(M-1)$ , 按 (4) 式重构为原离散信号  $x(n)$  的变换称为  $M$  带离散时间逆子波变换:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{L(M-1)} \sum_m y_k(m) \eta_{k,m}(n), \quad (4)$$

其中  $\eta_{k,m}(n)$  是  $M$  带离散时间子波基函数. 上述树形综合滤波器组可由  $L(M-1) + 1$  个通道的等效并行综合滤波器组  $G_0(z), G_1(z), \dots, G_{L(M-1)}(z)$  实现, 如图 2 所示.

因为先  $M$  倍下采样, 再用  $H(z)$  滤波, 等效于先用  $H(z^M)$  滤波, 再  $M$  倍下采样<sup>[7]</sup>. 所以, 等效的并行分析滤波器组为

$$H_k(z) = H_{M-1-k}^{(0)}(z), \quad 0 \leq k \leq M-2, \quad (5)$$

$$H_k(z) = H_j^{(I_k)}(z^{M^{I_k}}) \prod_{i=0}^{I_k-1} H_0^{(i)}(z^{M^i}), \quad M-1 \leq k \leq L(M-1) - 1, \quad (6)$$

$$H_{L(M-1)}(z) = \prod_{i=0}^{L-1} H_0^{(i)}(z^{M^i}), \quad (7)$$

其中  $j = M-1 - \text{Rem}(k/(M-1))$ , 函数  $\text{Rem}(k/(M-1))$  表示  $k$  除以  $M-1$  的余数.

先用  $H(z)$  滤波, 再  $M$  倍上采样, 等效于先  $M$  倍上采样, 再用  $H(z^M)$  滤波<sup>[7]</sup>. 所以, 等效的并行综合滤波器组为

$$G_k(z) = G_{M-1-k}^{(0)}(z), \quad 0 \leq k \leq M-2, \quad (8)$$

$$G_k(z) = G_j^{(I_k)}(z^{M^{I_k}}) \prod_{i=0}^{I_k-1} G_0^{(i)}(z^{M^i}), \quad M-1 \leq k \leq L(M-1) - 1, \quad (9)$$

$$G_{L(M-1)}(z) = \prod_{i=0}^{L-1} G_0^{(i)}(z^{M^i}). \quad (10)$$

离散时间子波基函数与综合滤波器的关系为<sup>[1]</sup>

$$\eta_{k,m}(n) = g_k(n - D_k m), \quad k = 0, 1, \dots, L(M-1), \quad (11)$$

其中  $g_k(n)$  为等效的并行综合滤波器组  $G_k(z)$  的单位脉冲响应。

**定义 3** 离散时间子波基函数  $\eta_{k,m}(n)$  满足如下方程, 则称离散时间子波基函数  $\eta_{k,m}(n)$  是正交基:

$$\sum_n \eta_{k,m}(n) \eta_{l,i}^*(n) = \delta(k-l) \delta(m-i). \quad (12)$$

在  $M$  带滤波器组中, 上述正交性可表示为

$$\sum_n g_k(n - D_k m) g_l^*(n - D_l i) = \delta(k-l) \delta(m-i), \quad k, l = 0, \dots, L(M-1). \quad (13)$$

**命题 1** (13) 式所表示的正交性等价于

$$\sum_n g_k(n) g_l^*(n - D_l j) = \delta(k-l) \delta(j), \quad l \leq k, \quad k, l = 0, \dots, L(M-1). \quad (14)$$

**证明** 假定 (14) 式成立, 通过变量代换可得

$$\begin{aligned} \sum_n g_k(n - D_k m) g_l^*(n - D_l i) &= \sum_u g_k(u) g_l^*(u - (D_l i - D_k m)) \\ &= \sum_u g_k(u) g_l^*(u - D_l(i - vm)) \\ &= \delta(k-l) \delta(i - vm), \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $v$  为整数, 且  $v = D_k/D_l \geq 1$ 。

(15) 式等于 1 的充要条件是  $k=l, i=vm$ 。因为  $k=l$  时,  $v=1$ , 所以, 该条件等价于  $k=l, m=i$ 。即 (13) 式成立, (14) 式  $\Rightarrow$  (13) 式。假定 (13) 式成立。因为  $l \leq k, D_l$  是  $D_l$  和  $D_k$  的最大公约数, 根据 Euclid 恒等式, 存在整数  $D_l', \hat{D}_k$ , 满足

$$D_l = D_l D_l' - D_k \hat{D}_k, \quad (16)$$

令

$$i = j D_l', \quad m = j \hat{D}_k, \quad (17)$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_n g_k(n) g_l^*(n - D_l j) &= \sum_n g_k(n) g_l^*(n - j(D_l D_l' - D_k \hat{D}_k)) \\ &= \sum_n g_k(n) g_l^*(n - (D_l i - D_k m)) \\ &= \sum_n g_k(n - D_k m) g_l^*(n - D_l i) \\ &= \delta(k-l) \delta(m-i). \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式等于 1 的充要条件是  $k=l, m=i$ 。  $k=l$  时,  $D_l' \neq \hat{D}_k$ , 由 (17) 式可知, 要使  $m=i$ , 必有  $j=0$ , 即 (14) 式成立, (13) 式  $\Rightarrow$  (14) 式。证毕

(14) 式表明, 当平移量为  $D_l$  的非零整数倍时, 单位脉冲响应  $g_k(i)$  和  $g_l(i)$  的互相关  $R(i)$  为零. 对  $R(i)$  作  $D_l$  倍的抽取可得到单位脉冲序列  $\delta(i)$ . 因为  $R(i)$  的  $z$  变换为  $G_k(z)\tilde{G}_l(z)$ , 其中,  $\tilde{G}(z) = G_*^T(z^{-1})$ , 即对系数取共轭, 用  $z^{-1}$  代替  $z$ , 如果是矩阵还要转置. 所以, 在  $z$  变换域, 上述正交性等价于

$$[G_k(z)\tilde{G}_l(z)] \downarrow D_l = \delta(k-l), \quad l < k, \quad k, l = 0, \dots, L(M-1), \quad (19)$$

其中符号  $[H(z)] \downarrow D$  表示对  $H(z)$  的单位脉冲响应  $D$  倍抽取后的序列的  $z$  变换.

### 3 $M$ 带离散时间子波变换与 $M$ 带仿酉滤波器组

根据多相位网络理论, 滤波器  $G_k(z)$  可由其多相位分量表示<sup>[7]</sup>:

$$G_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} E_{k,i}(z^M), \quad (20)$$

其中多相位分量  $E_{k,i}(z)$  是  $G_k(z)$  的脉冲响应  $g_k(n)$  的多相位子列  $e_{k,i}(n)$  的  $z$  变换:

$$e_{k,i}(n) = g_k(Mn+i), \quad 0 \leq i \leq M-1. \quad (21)$$

定义多相位矩阵  $\mathbf{E}(z) = [E_{k,l}(z)]$ ,  $0 \leq k, l \leq M-1$ , 则有

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \\ \vdots \\ G_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z^M) & E_{0,1}(z^M) & \cdots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{1,0}(z^M) & E_{1,1}(z^M) & \cdots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

如果滤波器组  $G_k(z)$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ , 是仿酉滤波器组<sup>[7]</sup>, 则  $\mathbf{E}(z)$  满足

$$\mathbf{E}(z)\tilde{\mathbf{E}}(z) = \tilde{\mathbf{E}}(z)\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}. \quad (23)$$

**定理 1** 在  $L$  级  $M$  带树形滤波器组中, 如果每级综合滤波器组是仿酉滤波器组, 则该树形滤波器组所产生的离散时间子波基是正交基.

**证明** 用数学归纳法.  $L = 1$  时, 子波基函数  $\eta_{k,m}(n)$  的正交性等价于

$$[G_k^{(0)}(z)\tilde{G}_l^{(0)}(z)] \downarrow M = \delta(k-l), \quad 0 \leq k, l \leq M-1, \quad (24)$$

假定序列  $x(n)$  的  $z$  变换为  $X(z)$ , 则  $x(n)$  经  $M$  倍抽取后的  $z$  变换为<sup>[7]</sup>

$$[X(z)] \downarrow M = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(z^{1/M}W^i), \quad W = e^{-j\frac{2\pi}{M}}. \quad (25)$$

所以,  $L = 1$  时, 离散时间子波基函数  $\eta_{k,m}(n)$  的正交性等价于

$$\sum_{i=0}^{M-1} G_k^{(0)}(z^{1/M}W^i)\tilde{G}_l^{(0)}(z^{1/M}W^i) = M\delta(k-l), \quad 0 \leq k, l \leq M-1. \quad (26)$$

利用矩阵, 基函数  $\eta_{k,m}(n)$  的正交性又等价于

$$G(z)\tilde{G}(z) = MI, \tag{27}$$

其中

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_0^{(0)}(z^{1/M}) & G_0^{(0)}(z^{1/M}W) & \cdots & G_0^{(0)}(z^{1/M}W^{M-1}) \\ G_1^{(0)}(z^{1/M}) & G_1^{(0)}(z^{1/M}W) & \cdots & G_1^{(0)}(z^{1/M}W^{M-1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{M-1}^{(0)}(z^{1/M}) & G_{M-1}^{(0)}(z^{1/M}W) & \cdots & G_{M-1}^{(0)}(z^{1/M}W^{M-1}) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

即只要证明 (22) 式中的综合滤波器组满足 (23) 式, 则 (27) 式成立.

对  $G(z)$  中的每个元素  $[G(z)]_{k,l}$  作多相位分解:

$$[G(z)]_{k,l} = G_k^{(0)}(z^{1/M}W^l) = \sum_{i=0}^{M-1} (z^{1/M}W^l)^{-i} E_{k,i}(z), \quad 0 \leq k, l \leq M-1. \tag{29}$$

将 (29) 式写成矩阵形式则有

$$G(z) = E(z)A(z)F, \tag{30}$$

其中  $A(z)$  是对角阵,  $A(z) = \text{Diag}(1, z^{-1/M}, \dots, z^{-(M-1)/M})$ ,  $F$  是逆 DFT 矩阵的  $M$  倍, 即  $[F]_{i,j} = W^{-ij}$ . 因而有

$$\begin{aligned} G(z)\tilde{G}(z) &= E(z)A(z)F\tilde{F}\tilde{A}(z)\tilde{E}(z) \\ &= E(z)A(z)MI\tilde{A}(z)\tilde{E}(z) \\ &= ME(z)\tilde{E}(z) = MI. \end{aligned} \tag{31}$$

所以,  $L = 1$  时,  $M$  带仿酉滤波器组所生成的子波基函数  $\eta_{k,m}(n)$  是正交的.

假定  $L$  级  $M$  带树形滤波器组 (第 0 级到第  $L-1$  级) 所产生的离散时间子波基是正交的, 该树形滤波器组有  $L(M-1)+1$  个等效滤波器  $G_0(z), \dots, G_{L(M-1)}(z)$ , 且满足

$$[G_k(z)\tilde{G}_p(z)] \downarrow D_p = \delta(k-p), \quad 0 \leq p \leq k \leq L(M-1). \tag{32}$$

为说明方便, 任取两个滤波器  $G_k(z), G_p(z), k \geq p$ , 并再加上一级仿酉滤波器组  $G_0^{(L)}(z), \dots, G_{M-1}^{(L)}(z)$ , 构成  $L+1$  级树形滤波器组, 如图 3 所示. 由于  $G_0^{(L)}(z), \dots, G_{M-1}^{(L)}(z)$  是仿酉滤波器组, 因而有

$$[G_m^{(L)}(z)\tilde{G}_n^{(L)}(z)] \downarrow M = \delta(m-n), \quad 0 \leq m, n \leq M-1. \tag{33}$$

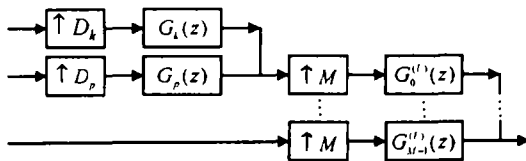


图 3  $L+1$  级  $M$  带树形滤波器组

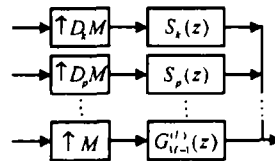


图 4 等效的  $L+1$  级  $M$  带并行滤波器组

图 3 可用图 4 的等效滤波器组表示, 其中的滤波器  $S_k(z)$  和  $S_p(z)$  为

$$S_k(z) = G_0^{(L)}(z)G_k(z^M), \quad S_p(z) = G_0^{(L)}(z)G_p(z^M). \quad (34)$$

根据恒等式

$$[A(z^M)B(z)] \downarrow (MD) = [A(z)[B(z)] \downarrow M] \downarrow D, \quad (35)$$

可得

$$\begin{aligned} [S_k(z)\tilde{S}_p(z)] \downarrow (MD_p) &= [G_0^{(L)}(z)G_k(z^M)\tilde{G}_p(z^M)\tilde{G}_0^{(L)}(z)] \downarrow (MD_p) \\ &= [[G_k(z)\tilde{G}_p(z)][G_0^{(L)}(z)\tilde{G}_0^{(L)}(z)] \downarrow M] \downarrow D_p \\ &= [G_k(z)\tilde{G}_p(z)] \downarrow D_p \\ &= \delta(k-p), \quad 0 \leq p \leq k \leq L(M-1). \end{aligned} \quad (36)$$

根据 (34),(35) 式, 可得

$$\begin{aligned} [S_k(z)\tilde{G}_m^{(L)}(z)] \downarrow M &= [G_k(z^M)G_0^{(L)}(z)\tilde{G}_m^{(L)}(z)] \downarrow M \\ &= G_k(z)[G_0^{(L)}(z)\tilde{G}_m^{(L)}(z)] \downarrow M \\ &= 0, \quad m = 1, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (37)$$

同理,  $[S_p(z)\tilde{G}_m^{(L)}(z)] \downarrow M = 0, m = 1, \dots, M-1$ .

由于  $G_k(z)$  和  $G_p(z)$  是  $L$  级树形滤波器组中的任意两个滤波器, 因而  $L$  级树形滤波器组中的所有  $L(M-1)+1$  个滤波器都满足 (36), (37) 式. 也就是说  $L+1$  级树形滤波器组所生成的离散时间子波基仍然是正交的. 证毕

#### 4 结束语

离散时间子波变换可解释为有限级的树形数字滤波器组, 它非常适合于数字信号处理. 在二带子波中, 高通滤波器可由低通滤波器唯一确定. 而在  $M$  带子波中,  $M-1$  个带通滤波器不能由低通滤波器唯一确定, 因而  $M$  带子波的滤波器选择具有更大的灵活性. 本文将二带离散时间子波变换推广到  $M$  带离散时间子波变换, 给出了  $M$  带离散时间子波变换的定义, 基函数及其正交性. 并研究了  $M$  带离散时间子波变换与  $M$  带仿酉滤波器组之间的关系. 结果表明, 在  $L$  级  $M$  带树形滤波器组中, 如果每级滤波器组是仿酉滤波器组, 则该树形滤波器组所产生的离散时间子波基是正交基.

#### 参 考 文 献

- [1] Daubichies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1988, 41(7): 909-996.
- [2] Vaidyanathan P P. Lossless systems in wavelet transforms. *International Symposium on Circuits and Systems*, Singapore: 1991, 116-119.
- [3] Steffen P, Heller P N, Gopinath R A, Burrus C S. Theory of regular  $M$ -band wavelet bases. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, SP-41(12): 3497-3510.
- [4] Soman A K, Vaidyanathan P P, Nguyen T Q. Linear phase paraunitary filter banks: Theory, factorizations and designs. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, SP-41(12): 3480-3496.

- [5] Zou Hehong, Tewfik A H. Design and parametrization of  $M$ -band orthonormal wavelets. IEEE, International Symposium on Circuits and Systems, San Diego, U.S.A.: 1992, 983–986.
- [6] Zou Hehong, Tewfik A H. Discrete orthogonal  $M$ -band wavelet decompositions. IEEE, International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, San Francisco, U.S.A.: 1992, 605–608.
- [7] Vaidyanathan P P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: A tutorial. Proc. IEEE, 1990, 78(1): 56–93.

## $M$ -BAND DISCRETE TIME WAVELET TRANSFORM

Zhang Zijing     Jiao Licheng

(National Key Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

**Abstract** Two-band continuous time wavelets can be obtained from infinite-level binary tree-structured QMF banks. Similarly, two-band discrete time wavelet transform can be represented as a finite-level binary tree-structured QMF banks. In this paper, two-band discrete time wavelet transforms are generalized to  $M$ -band discrete time wavelet transforms. The relationship between  $M$ -band discrete time wavelet transforms and  $M$ -band paraunitary filter banks is also investigated. It is shown that if the filter banks on each level are paraunitary, the wavelet basis generated by this tree is orthonormal.

**Key words**  $M$ -band wavelet, Discrete time wavelet transform, Paraunitary filter banks

张子敬: 男, 1967 年生, 博士生, 主要研究方向为: 多速率滤波器组的理论及应用, 子波变换, 雷达信号处理.

焦李成: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为: 非线性系统理论, 智能信息处理, 子波理论及应用.