

用摄动法定量研究二阶锁相环的非线性性能*

路益蕙

(中国科学院电子学研究所)

提 要

为了获得相干啾声信号,在压控振荡器上进行线性调频,用锁相环锁定起始频率的相位.对于高增益二阶环,当环路参数和调频率满足条件 $0 < \epsilon < 1$ 时,调频得以实现且环路无须断开.

本文将环路方程变换为近于线性的微分方程,用摄动法给出其渐近解析解,从而获得了环路对调频波形影响的定量关系.计算机模拟结果与理论分析基本吻合.

一、引 言

啾声信号是雷达和通信系统中一种优选的窄带信号.当发射这种信号时,在较低的峰值功率条件下,可获得较大的信号能量,并因其自相关函数在时间上的有效压缩,可以提高分辨率,因此得到广泛的应用.

至今,锁相环的基本理论大多集中于分析其两种工作模式:即信号的捕捉和同步^[1].其实,从理论分析和实际应用的观点来看,处于失锁状态的锁相环是另一个重要方面.由周期性斜坡电压(示于图1)激励的锁相环,在调频期间,由于调频带宽远宽于环路带宽,致使环路失锁且远离平衡点.环路对调频波形的作用,属于非线性微分方程的求解,至今尚无一般解法^[2].为此,工程实际应用相图法作定性分析.

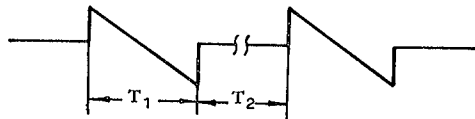


图1 周期性斜坡电压波形

Fig. 1 A periodic ramp waveform

为消除或削弱锁相环对调频波形的影响,虽可用电子开关或箝位电路^[3,4],但这将使系统复杂化,特别在高重复频率时,对系统的稳定性会带来不良影响.本文不用上述电路,而用高增益二阶环产生啾声信号,因而提出了环路的存在对压控振荡器(VCO)上调

* 1981年6月24日收到.

频波形的影响问题。

二、小参数方程与摄动法求解

对于任何二阶锁相环系统,总可用二阶非线性微分方程来描述。在不考虑干扰作用时,其等效模型如图 2 所示:

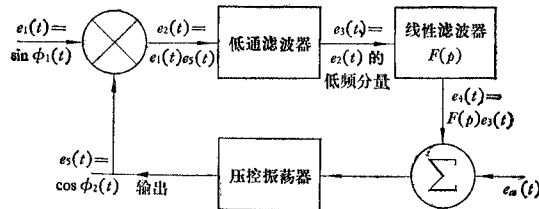


图 2 调频锁相环的等效模型

Fig. 2 Equivalent model of the second-order loop with LFM on VCO

现研究正弦波输入, $\phi_1(t) = \omega_0 t + \theta_1$; 在 VCO 上进行线性调频, $\phi_2(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2 + e_4(t) - \theta_2 = \omega_0 t + \int_0^t e_4(\xi) d\xi + e_4(0) + \frac{1}{2} \mu t^2 - \theta_2$ 。

令 $\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t)$; 滤波器的传递函数 $F(p) = \frac{2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}{p}$,

则

$$\phi = \phi_1(t) - \left[\omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2 - \theta_2 + \int_0^t \frac{2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}{p} \sin \phi d\xi + e_4(0) \right],$$

故

$$\ddot{\phi} = -\mu - 2\zeta\omega_n \cos \phi \dot{\phi} - \omega_n^2 \sin \phi,$$

即

$$\ddot{\phi} + 2\zeta\omega_n \cos \phi \dot{\phi} + \omega_n^2 \sin \phi = -\mu. \quad (1)$$

这就获得了二阶环的一般调频锁相控制方程。式中 ω_n 为环路的自然角频率; ζ 为阻尼系数; ϕ 为环路总相差; μ 为调频率。

对 (1) 式作变量置换: 令 $\tau = \sqrt{\mu} t$, $\phi(\tau) = \frac{d\phi}{d\tau}$, $\ddot{\phi}(\tau) = \frac{d^2\phi}{d\tau^2}$, $\varepsilon = \frac{\omega_n}{\sqrt{\mu}}$ 。代入 (1) 式得:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\zeta \cos \phi \frac{d\phi}{d\tau} + \varepsilon^2 \sin \phi = -1$$

或

$$\ddot{\phi} + 2\varepsilon\zeta \cos \phi \dot{\phi} + \varepsilon^2 \sin \phi = -1. \quad (2)$$

(2) 式为含参数 ε 的描述调频锁相环的总控制方程,可分成下列三种情况:

1. $\varepsilon = 0$ (2) 式变为 $\ddot{\phi} + 1 = 0$, 则 $\phi = \frac{1}{2} \tau^2 + \dot{\phi}(0)\tau + \phi(0)$, 此即 (2) 式的非摄动解。在 VCO 上获理想线性调频波形,相当于相位锁定开环,调频不受环路影响。

2. $\varepsilon > 1$ $\varepsilon > 1$, 即 $\frac{\mu}{\omega_n^2} < 1$ 。这种情况,用相图法已作过定性研究^[5]。在 $\zeta =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的条件下, 当 $\frac{\mu}{\omega_n^2} < \frac{1}{2}$ 时, 至少有半个相平面是稳定的; 当 $1 > \frac{\mu}{\omega_n^2} > \frac{1}{2}$ 时, 原来稳定的半个相平面出现不稳定条纹, 且其宽度随 μ/ω_n^2 增大而加宽. 总之, 对于 $\varepsilon > 1$ 的情况, 环路可能锁定, 但调频不能在任意起始条件下实现.

3. $0 < \varepsilon < 1$ 相平面图上稳定奇点消失, 整个相平面都成为不稳定的, 调频可以实现, 环路对调频波形的影响随 ε 值而改变. 图 3 给出 ε 分别为 0.17 和 0.098 时的相平面图(图 3(a)、3(b)), 并给出前者的开环相图(图 3(c)). 不难看出, 随着 ε 值的减小, 相轨

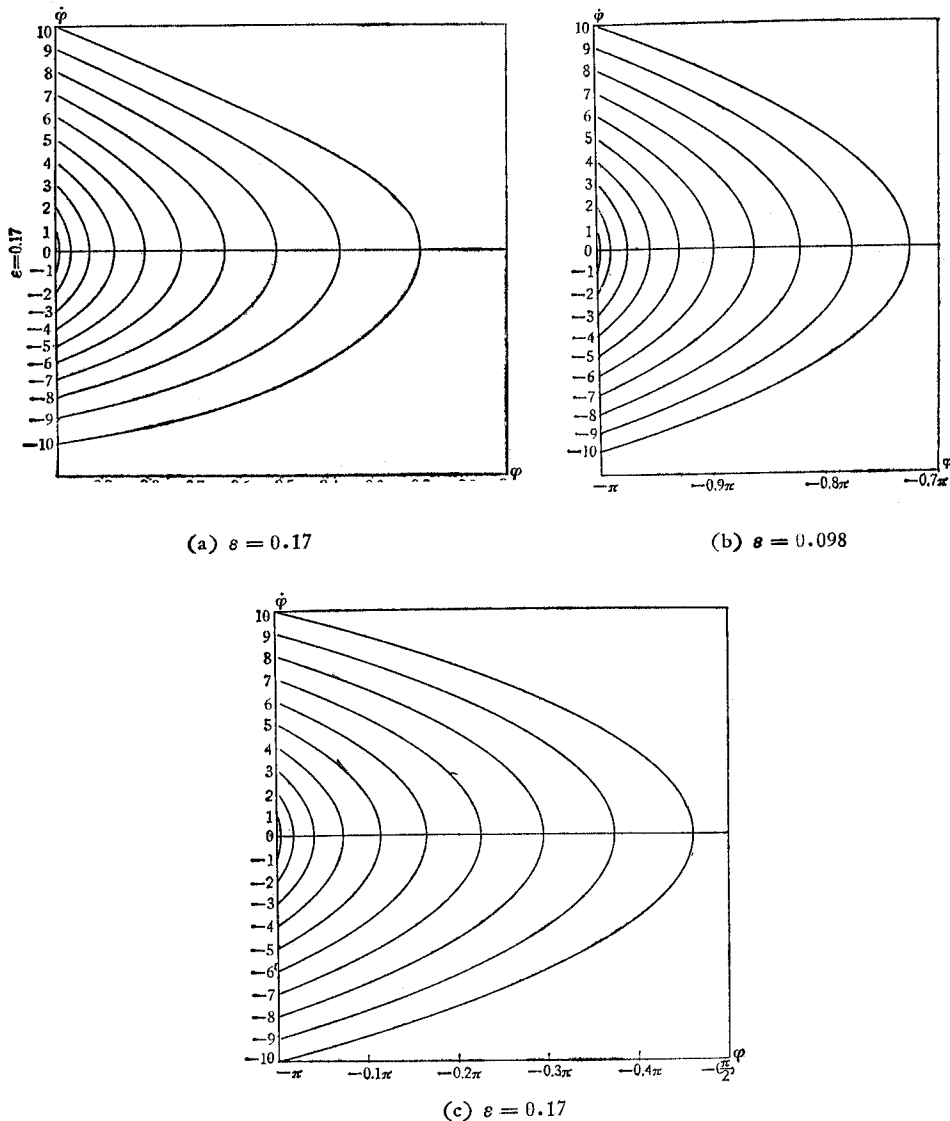


图 3 $\omega_n = \pi \times 10^5 \text{rad/s}$, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的高增益二阶环相平面图

Fig. 3 Phase-plane trajectories of high gain second-order loop, when $\omega_n = \pi \times 10^5 \text{rad/s}$, $\zeta = 1/\sqrt{2}$

迹曲线族越来越接近理想抛物线族。

显然,为了获得相干嗽声信号,调频率 μ 和环路参数 ω_n ,必须满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的条件。下面,用摄动法求(2)式的渐近解析解,它是对于非摄动问题(即 $\varepsilon = 0$)解的一种延拓。我们选择 ε 为摄动参数是合适的。

(2)式的解 $\phi(\tau)$ 可展成 ε 的幂级数:

$$\phi(\tau) = \phi_0(\tau) + \varepsilon\phi_1(\tau) + \varepsilon^2\phi_2(\tau) + \varepsilon^3\phi_3(\tau) + \dots \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式,并令 ε 的同次幂系数相等,便获下列迭代方程组:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\phi}_0 + 1 &= 0, \\ \ddot{\phi}_1 &= -2\zeta\dot{\phi}_0(\tau)\cos\phi_0(\tau), \\ \ddot{\phi}_2 &= -2\zeta[\dot{\phi}_1(\tau)\cos\phi_0(\tau) - \phi_1(\tau)\dot{\phi}_0(\tau)\sin\phi_0(\tau)] - \sin\phi_0(\tau), \\ \ddot{\phi}_3 &= -2\zeta[\dot{\phi}_2(\tau)\cos\phi_0(\tau) - \phi_2(\tau)\dot{\phi}_0(\tau)\sin\phi_0(\tau) \\ &\quad - \phi_1(\tau)\dot{\phi}_1(\tau)\sin\phi_0(\tau) - \frac{1}{2}\phi_1^2(\tau)\dot{\phi}_0(\tau)\cos\phi_0(\tau)] - \phi_1(\tau)\cos\phi_0(\tau), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

确定起始条件在 $\tau = 0$ 时,环路处于锁定状态,故有: $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega - \omega_0 = \Delta\omega_0$, 式中 $\phi(0)$ 为起始相差, $\Delta\omega_0$ 为起始频差。由(3)式得出:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0(0) + \varepsilon\phi_1(0) + \varepsilon^2\phi_2(0) + \varepsilon^3\phi_3(0) + \dots, \\ \dot{\phi}(0) &= \dot{\phi}_0(0) + \varepsilon\dot{\phi}_1(0) + \varepsilon^2\dot{\phi}_2(0) + \varepsilon^3\dot{\phi}_3(0) + \dots. \end{aligned}$$

在此起始条件下,迭代方程组(4)式的解为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(\tau) &= -\frac{1}{2}\tau^2 + \Delta\omega_0\tau, \\ \dot{\phi}_0(\tau) &= -\tau + \Delta\omega_0; \\ \phi_1(\tau) &= 2\sqrt{\pi}\zeta\left\{\left[s\left(\frac{\tau - \Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right) - s\left(-\frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\cos\Delta\omega_0^2\right. \\ &\quad \left.- \left[c\left(\frac{\tau - \Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right) - c\left(-\frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\sin\Delta\omega_0^2\right\}, \\ \dot{\phi}_1(\tau) &= 2\zeta\sin\left(\frac{1}{2}\tau^2 - \Delta\omega_0\tau\right); \\ \phi_2(\tau) &= -\int_0^\tau \left[2\zeta\dot{\phi}_1(\tau)\cos\phi_0(\tau) - \frac{\phi_1(\tau)}{2\zeta}\right]d\tau, \\ \dot{\phi}_2(\tau) &= -2\zeta\dot{\phi}_1(\tau)\cos\phi_0(\tau) + \frac{\phi_1(\tau)}{2\zeta}; \\ \phi_3(\tau) &= -2\zeta\int_0^\tau \dot{\phi}_2(\tau)\cos\phi_0(\tau)d\tau + \frac{\zeta}{3}\dot{\phi}_1^2(\tau) - \int_0^\tau \left[\int_0^\tau \dot{\phi}_1(\tau)\cos\phi_0(\tau)d\tau\right]d\tau, \\ \dot{\phi}_3(\tau) &= -2\zeta\left[\dot{\phi}_2(\tau)\cos\phi_0(\tau) - \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2(\tau)\dot{\phi}_1(\tau)\right] - \int_0^\tau \dot{\phi}_1(\tau)\cos\phi_0(\tau)d\tau; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这样,我们可依据要求的精度确定要取的 ε 的幂次,譬如 $\varepsilon < 0.2$ 时, ε^2 项以上的影响已可忽略不计,则(2)式的一阶近似解为:

$$\left. \begin{aligned} \phi(\tau) &= -\frac{1}{2}\tau^2 + \Delta\omega_0\tau + 2\zeta\varepsilon\sqrt{\pi} \left\{ \left[s\left(\frac{\tau - \Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right) - s\left(-\frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right) \right] \cos \Delta\omega_0^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[c\left(\frac{\tau - \Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right) - c\left(-\frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi}}\right) \right] \right\}, \\ \dot{\phi}(\tau) &= -\tau + \Delta\omega_0 + 2\zeta\varepsilon \sin \left[\frac{1}{2}\tau^2 - \Delta\omega_0\tau \right], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $s(\cdot)$ 和 $c(\cdot)$ 为菲涅耳积分, 其函数值可从任何一本超越函数表中查出. 从 (6) 式看到锁相环对调频波形的主要影响为: 调频波形的瞬时频率围绕理想值上下摆动, 摆幅为 $2\zeta\varepsilon$, 摆动频率随 τ 作线性变化; 调频波形的瞬时相位亦围绕理想值摆动, 摆幅为 $2\sqrt{\pi}\zeta\varepsilon$. 这种相位起伏造成线性调频波形的压缩波形旁瓣电平增高. 按照成对回波理论^[6], 由此引起的最大旁瓣电平为:

$$SL_{\max} = 20 \log(\sqrt{\pi}\zeta\varepsilon) \quad (\text{dB}). \quad (7)$$

(7) 式给出了环路对调频波形影响的限制因素, 可作为选择环路参数和调频率的参考.

必须指出: 由于 $\frac{1}{T} \int_0^{\pi} \phi_1(\tau) d\tau \approx 0$, 将在 $\phi_2(\tau)$ 、 $\phi_3(\tau)$ 和高阶项中造成与 τ 和 τ^2 成比例的成分, 数学上称之为永年项. 它的存在将使幂级数的渐近性不能在 τ 的 $(0, \infty)$ 区间成立. 采用奇异摄动法, 也就是对调频率 μ 和调频时间起始点也加摄动, 即可消去永年项. 其物理解释是, 锁相环对 VCO 的调频率和起始点都有影响, 但仅在 ε^2 以上的高阶项中出现, 故一阶近似解可不予考虑.

三、计算机模拟和结果

为证明上述理论分析, 用计算机模拟获得 (2) 式的数值解, 与 (6) 式的一阶渐近解析解进行比较. 图 4 给出了 $\dot{\phi}(\tau)$ 的数值解、一阶解析解和两者间的绝对误差, 图 4 为经过归一化的坐标系: $y = \frac{\dot{\phi}(\tau)}{\Delta\omega_0}$; $x = \frac{\tau}{\Delta\omega_0}$. (数值解方程和归一化处理此处从略). 结果表明: 用摄动法求得的一阶解析解与数值解, 在 $\varepsilon \leq 0.2$ 时, 基本吻合, 最大误差 $\leq 4.51\%$, 与 ε^2 同量级.

四、结 束 语

用锁相技术产生相干嗽声信号的方法是可行的. 在 VCO 调频期间环路可不断开, 只要调频率足够高, 环路自然角频率较低, 则环路对调频波形的影响可降低到允许范围内.

由于调频带宽远宽于环路带宽, 环路呈现严重非线性, 因而不能按线性系统进行分析. 但当 ε 值在 $[0, 1]$ 间时, 它变成近于线性的系统, 从而可用摄动法求渐近解.

(6) 式给出了在一阶近似条件下环路的误差信号响应. 虽然锁相环对调频率和调频起始点也有影响, 但仅在高阶项中出现. 当 $\varepsilon \leq 0.2$ 时, 一阶近似解已有满意的精度.

本文写作过程中, 得到蒋君章高级工程师许多宝贵的建议并进行了有益的讨论; 在进行计算机模拟时得到李光照同志许多帮助, 在此一并致谢.

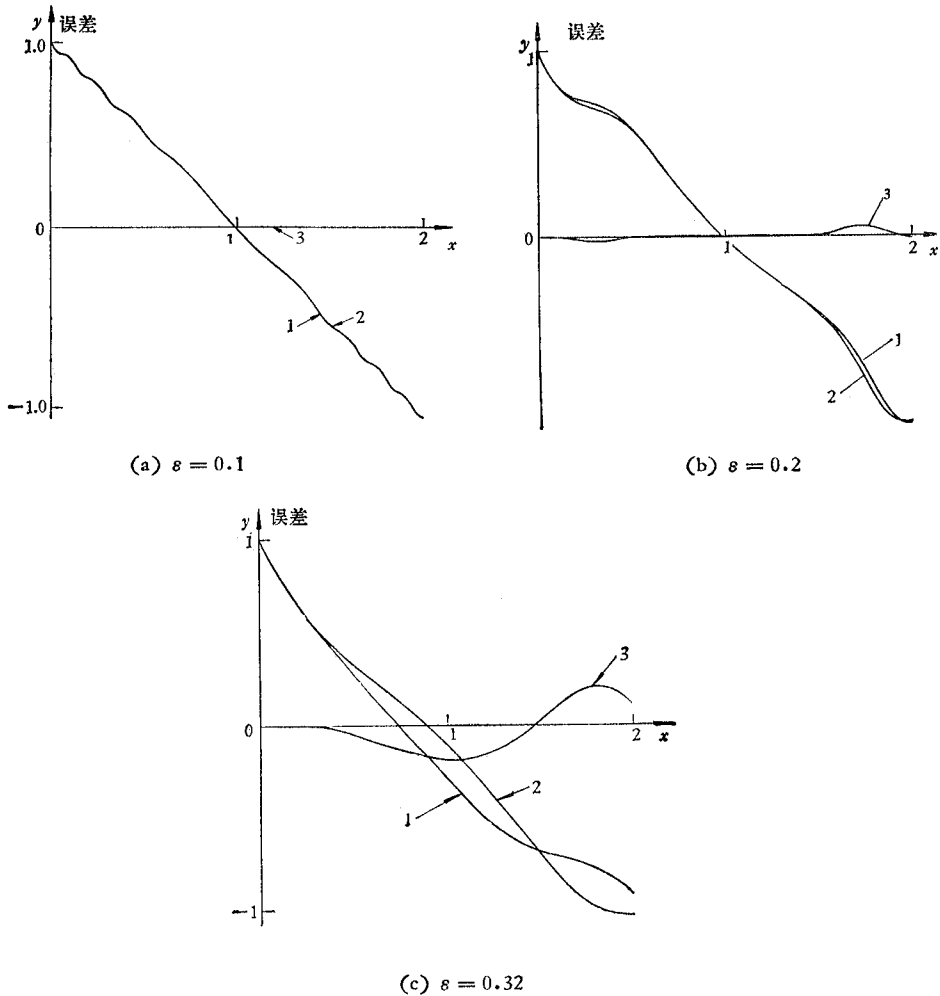


图 4 一阶解析解与计算机模拟的比较

$T_1 = 4.6\mu s, \zeta = 1/\sqrt{2}, \omega_n = \pi \times 10^5 \text{ rad/s}$
 1——数值解 2——一阶解析解 3——绝对误差

Fig. 4 Comparison of approximate solution with computer simulation

$T_1 = 4.6\mu s, \zeta = 1/\sqrt{2}, \omega_n = \pi \times 10^5 \text{ rad/s}$
 1——The numerical solution, 2——The analytic solution, 3——The absolute error

参 考 文 献

[1] W. C. Lindsey and M. K. Simon, *Phase-Locked Loop & Their Application*, IEEE Press, 1977, p. 1—4.
 [2] 郑继禹, 万心平, 张厥盛, 锁相环路原理与应用, 人民邮电出版社, 1976年(第一版), 第85—118页.
 [3] B. D. Campbell, IEEE Trans. on AES, AES-6 (1970), 62.
 [4] *Shuttle Synthetic Aperture Radar Implementation Study*, Vol. 1, Mar. 8, 1976, NASA-CR-147775.
 [5] A. J. Viterbi *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, Inc., 1966, p. 55—59.
 [6] O. E. Cook and M. Bernfeld, *Radar Signals, An Introduction to Theory and Application*, Academic Press, New York-London 1967, Chapter 8.

A QUANTITATIVE RESEARCH OF NONLINEAR BEHAVIOUR OF A SECOND-ORDER PHASE-LOCKED LOOP BY PERTURBATION METHOD

Lu Yi-hui

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

It is found that the linear frequency modulation is used on a voltage-controlled oscillator and a phase-locked loop to lock its starting-frequency phase for generating a coherent chirp signal. For a high-gain second-order loop, the loop parameters and the modulating frequency rate must be chosen to satisfy the condition, $0 < \epsilon < 1$, and then it is possible to realize the FM on the VCO, while the loop is not necessarily broken during FM pulse.

In this paper, the PLL's equation is transformed into a nearly linear differential equation and its asymptotic solution is given by perturbation method. Thus, the quantitative relationships about the effects of the PLL on the LFM waveform are obtained. Finally, results of simulation by means of computer show good agreement with the theoretical analysis.