第 27 卷第 6 期
2005 年 6 月

电 子 与 信 息 学 报
Journal of Electronics & Information Technology

Vol.27No.6
Jun. 2005

一种基于二次规划计算 DFE 系数的新方法

白 栋　　刘 红*　　梁庆林
（北京大学电子学系卫星与移动通信实验室　北京　100871）
*(北京邮电大学宽带通信网络实验室　北京　100876)

摘　要：判决反馈均衡器(DFE)是一种常见的均衡器类型，在实际中得到了广泛应用。对于采用最小均方误差(MMSE)准则设计的 DFE，其系数计算一般利用正交原理推导获得。该文推导了一种新颖的基于二次规划方法计算 MMSE 准则下 DFE 系数的方法。仿真表明，该文所提方法与传统方法计算得到的结果是一致的，并且由于运用矩阵运算，在一定程度上简化了计算。

关键词：判决反馈均衡器，MMSE 准则，代价函数，二次规划

中图分类号：TN911.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2005)06-1002-03

A Novel Method for Calculating the DFE Coefficients Based on Quadratic Programming

Bai Dong　　Liu Hong*　　Liang Qing-lin
(*Satellite and Mobile Communication Lab, Peking University, Beijing* 100871, *China*)
*(*Broadband Communication Network Lab, Beijing University of Posts and Telecom, Beijing* 100876, *China*)

Abstract　Decision Feedback Equalizer (DFE) is widely used in practice, which is usually designed according to Minimum Mean Square Error (MMSE) criterion. A novel method is derived for calculating the DFE coefficients based on quadratic programming. Simulations show that the new method is equal to the traditional one.

Key words　Decision Feedback Equalizer(DFE), MMSE criterion, Cost function, Quadratic programming

1　引言

均衡器在具有码间串扰（ISI）的通信中起着重要的作用，特别是判决反馈均衡器[1]（DFE），由于具有反馈滤波器部件，引入了非线性特性，能够更好地适应不同类型的信道。当信道在某些频点存在较深的陷落时，仍能够较好地工作，因而在实际中得到广泛应用。

前馈滤波器和反馈滤波器是 DFE 的重要组成部分，其系数的设计通常依据最小均方误差（MMSE）准则。传统的系数计算方法一般是根据正交原理进行推导[1]，先确定前馈滤波器系数，再由信道模型参数和前馈系数共同确定反馈系数。本文从一个新颖的角度考虑，根据 MMSE 准则的代价函数，推导了一种基于二次规划计算均衡器反馈系数和前馈系数的新方法。该方法的基本思路是：将最小化代价函数问题转化一个二次规划问题，解决此二次规划问题，可以首先得到反馈滤波器系数，然后由反馈系数的线性组合确定前馈滤波器系数。仿真结果验证了这种基于二次规划的新方法得到的结果与传统方法结果是一致的。新方法具有信道适应性广的特点，并且能够利用矩阵运算规则对计算进行简化。

2　系统模型

信道采用离散时间模型，$y_n=\sum_{l=0}^{L}c_l I_{n-l}+w_n$，抽样时间间隔为符号间隔 T。其中 I_n 表示第 n 时刻的发送符号；$\{c_l, l=1,\cdots,L\}$，表示离散时间信道模型抽头系数；y_n 为接收机观察到的信号。w_n 是第 n 时刻的噪声抽样，均值为零，方差为 σ^2，噪声抽样与信号抽样相互独立。如果观测长度为 $N+1$，则系统的矩阵表示为

$$\boldsymbol{r}(n)=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{w} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{r}(n)=(\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{r}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{r}_{n-N})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{s}(n)=(\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{I}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{I}_{n-N-L})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w}(n)=(\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{w}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{w}_{n-N})^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_L & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_0 & c_1 & \cdots & c_L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{(N-L)\times N}$$

我们注意到，$\boldsymbol{C}$ 是一个 Sylvester 矩阵[2]。

2003-11-27 收到，2004-09-07 改回

判决反馈均衡器模型如图 1 所示。假设前馈滤波器阶数为 K_1，系数为 $f=\{f_k, k=0,\cdots,K_1-1\}$；反馈滤波器阶数为 K_2，系数为 $h=\{h_k, k=0,\cdots,K_2-1\}$。

文中所用到的符号说明：$\mathbf{0}_{M\times N}$ 表示 $M\times N$ 维全零矩阵；$\boldsymbol{I}_M$ 表示 $M\times M$ 维单位矩阵。

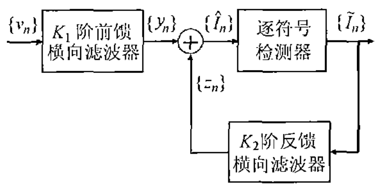

图 1　DFE 模型

3　MMSE 准则

通常 DFE 设计采用最小均方误差（MMSE）准则。在 MMSE 准则中，通过选择前馈系数 f 和反馈系数 h，使得下列误差的均方值最小化：$\varepsilon_n = I_n - \hat{I}_n$，其中 I_n 是在第 n 个信号传输间隔中发送的信息符号，$\hat{I}_n$ 是均衡器输出端对该符号的估计值。MMSE 准则如下：

$$\min J = E|\varepsilon_n|^2 \tag{2}$$

4　理论推导

根据前馈滤波器和反馈滤波器设计阶数的要求，令式(1)中的 $N=K_1+L$，此时 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $N\times K_1$ 维矩阵，而 $\boldsymbol{f}$ 则是一个 K_1 维列矢量。容易得到，前馈滤波器输出为

$$y_n = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{C}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{f} \tag{3}$$

而反馈滤波器输出：$z_n = \hat{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{h}_{fb}$，其中 $\boldsymbol{h}_{fb} = (h_{K_2},\cdots,h_1,\mathbf{0}_{N-K_2})^{\mathrm{T}}$ 其前 K_2 个元素是反馈滤波器系数。

那么判决反馈均衡器输出：$\hat{I}_n = y_n - z_n = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{C}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{h}_{fb}$。误差信号为

$$\varepsilon_n = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(n)\left[\boldsymbol{h}_\delta - \boldsymbol{C}\boldsymbol{f}\right] + \boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{h}_{fb} \tag{4}$$

其中令 $\boldsymbol{h}_\delta = (\mathbf{0}_{1\times K_2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}_{1\times(N-K_2-1)})^{\mathrm{T}}$。为了简化模型，不考虑判决误差，即假设 $\boldsymbol{s}(n)=\hat{\boldsymbol{s}}(n)$，又令 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}_\delta+\boldsymbol{h}_{fb}$，则式(4)可以写成

$$\varepsilon_n = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(n)\left[\boldsymbol{h} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{f}\right] + \boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{f} \tag{5}$$

令 σ_s^2 表示信号能量，我们得到[3]

$$E|\varepsilon_n|^2 = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{h})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{h})\sigma_s^2 + \boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}\sigma_n^2 \tag{6}$$

令 $\lambda = \sigma_n^2/\sigma_s^2$，则 $E|\varepsilon_n|^2$ 正比于下式：

$$J_{\mathrm{MMSE}} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{h})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{h}) + \lambda\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f} \tag{7}$$

则准则为

$$\min_{f,h} J_{\mathrm{MMSE}} \tag{8}$$

令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C} + \lambda\boldsymbol{I}_{K_1}$，有

$$J_{\mathrm{MMSE}} = (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h} \tag{9}$$

容易得到最优前馈滤波器系数与反馈滤波器系数关系为

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h} \tag{10}$$

此时

$$J_{\mathrm{MMSE}}^{\mathrm{opt}} = \boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{h} \tag{11}$$

这里的优化目标是最小化 $J_{\mathrm{MMSE}}^{\mathrm{opt}}$ 表示的代价函数，可以表示成一个带约束条件的二次规划问题，即下式：

$$\begin{aligned} &\min \quad \tfrac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{B} = 2\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\right)$，$\boldsymbol{D} = \left[\mathbf{0}_{(N-K_2)\times K_2} \quad \boldsymbol{I}_{(N-K_2)\times(N-K_2)}\right]$，$\boldsymbol{b} = (1, \mathbf{0}_{1\times N-K_2-1})$。注意，约束条件的物理意义在于保证 DFE 的因果性。此问题的解为[3]

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}$。容易看出 $\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的第一行[4]，由于 $\boldsymbol{D}$ 的结构非常简单，大大简化了计算。进一步利用式(10)可得到前馈系数最优解 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{opt}}$。

至此，推导完毕。

5　计算实例

从以上的推导可以看出，本文提出的方法对于任意构造的信道模型都是适用的。这里用如下例子进行验证。图 2 为两个典型的离散时间信道[1]，其信道特性见图 3。图 3 (a)是一个比较理想的信道，图 3 (b)是具有深衰落的信道。针对上述信道，分别采用传统方法和本文提出的方法计算前馈滤波器和反馈滤波器系数；同时计算了线性均衡器（LE）系数作为对比。在不同信噪比下，理论最小均方误差（MMSE）如图 4 所示。图 4 中显示，Δ 曲线代表新方法得到的 MSE 曲线，圆圈代表采用传统方法得到的 MSE 曲线，对于不同的信道，两个曲线都是重合的，从而验证了两种方法得到的 MSE 性能是一致的，并且明显比线性均衡器（用方框表示）优化。进一步，新方法与传统方法得到的系数在数值上也是一致的。鉴于篇幅所限，此处不再一一列出。这样，通过仿真实例可以看到两者实际上是相同的。

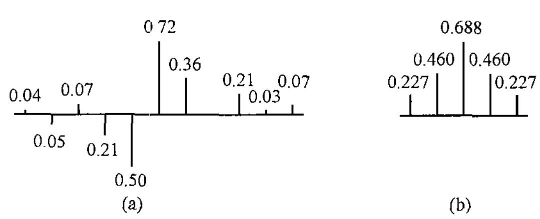

图 2　离散信道模型

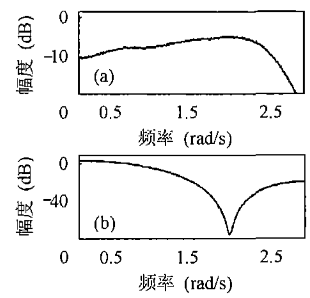

图3 信道特性

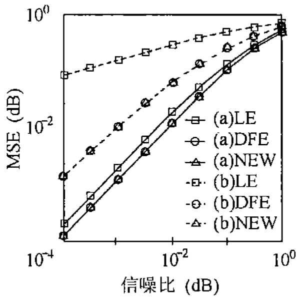

图4 仿真结果

6 结束语

本文从分析 MMSE 准则代价函数入手，得到了一种基于二次规划的计算 DFE 滤波器系数的新方法。该方法与传统方法不同，先计算反馈系数，而后得到前馈系数。仿真结果验证与传统的系数设计得到了相同的结果。新方法具有信道适应性广的特点，并且能够利用矩阵运算规则对计算进行简化，具有一定的实用价值。

参 考 文 献

[1] Proakis G. Digital Communications[M]. Third Edition, McGraw-Hill Inc., 1995: 621 – 628.

[2] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001, 420 – 422.

[3] Johnson C R, Schniter P, *et al.*. Blind equalization using the constant modulus criterion: A Review[J]. *Proc. IEEE*, 1998, 86(10): 1927 – 1950.

[4] Avriel M. Nonlinear Programming: Analysis and Methods[M]. Prentice-Hall, Inc., 1976, Ch7.

白 栋： 男，1974年生，博士生，研究方向为移动通信、通信信号处理技术、信息理论.

刘 洪： 女，1975年生，博士生，研究方向为通信网络、通信信号处理、网络路由算法.

梁庆林： 男，1941年生，教授，研究方向为卫星通信扩频技术、移动通信关键技术.