

## 基于混沌寻优的 DOA 估计

陈永倩 肖先赐

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要:** 提出用混沌优化的方法来实现阵列信号波达方向 (DOA) 的极大似然估计。基于混沌运动的遍历性、内在的随机性、“规律性”等特点的混沌优化算法是一种有效的全局优化算法, 其计算复杂度较低。仿真结果表明该文提出的方法在获得与 AP 算法相当测向精度和测向分辨率的情况下有更低的计算量; 在相干信号的情况下, 其性能比 AP 算法有较大的提高; 同时其基于轨道搜索的结构易于并行实现, 以进一步满足实时性的要求。

**关键词:** 波达方向(DOA)估计, 极大似然估计(MLE), 全局优化, 相干, 混沌优化算法

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)03-0388-04

## Direction of Arrival Estimation Based on Chaotic Optimization Algorithm

Chen Yong-qian Xiao Xian-ci

(Dept of Electron. Eng., UEST of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract** In this paper, a chaotic optimization method is presented for computing the Maximum Likelihood Estimation (MLE) of Direction of Arrivals (DOA) in sensor array processing. Based on the properties of ergodicity, stochastic property and “regularity” of chaos, the chaos optimization method can get global solution with low computational load. The simulation results show that this method is feasible and effective. Especially when the impinging signals are coherent, this method is much superior to AP.

**Key words** Direction of Arrivals(DOA) estimation, Maximum Likelihood Estimation(MLE), Global optimization, Coherent, Chaos Optimization Algorithm(COA)

### 1 引言

近30年来, 二维波达方向 (DOA) 估计在雷达、声纳、无线通信、射电天文和地震勘测等众多领域都有广泛的应用, 备受各国学者的关注。极大似然估计 (MLE) 作为一种经典的估计方法, 具有优越的估计性能, 并且在强相关信号的情况下算法也不会失效。但由于该方法是一个多维的非线性参数估计, 搜索过程是一个复杂耗时的过程, 为解决此问题, 通常采用特殊的搜索算法, 如多维 MUSIC 法<sup>[1]</sup>、交替投影(AP)算法<sup>[2]</sup>等。这类搜索算法实际上是在多信号的非线性超平面上用一些特殊的单维搜索过程的组合来实现的, 可能会收敛到局部极值; 并且在参量数很多时, 此类算法的计算量会大大增加。

混沌是一种存在于非线性系统中较为普遍的现象。混沌并不意味着混乱, 而是有着精致的内在结构。混沌优化算法 (COA) 是一种全新的优化方法<sup>[3]</sup>。混沌运动所具有的内在的随机性、遍历性、“规律”等特点, 使混沌搜索能在一定范围内按其自身的“规律”不重复地遍历每一个状态, 因此比

随机优化方法更容易跳出“谷”、“沟”、“槽”等局部极值点, 这使我们产生了用混沌优化算法解决 DOA 估计的研究兴趣。

### 2 均匀圆阵的信号模型与极大似然函数

考虑阵元个数为  $M$  的各向同性均匀圆阵, 其半径为  $r$ 。空间中有  $q$  个统计独立的远场窄带信号, 载波频率  $\omega$  已知, 从方向  $(\theta_1, \phi_1), \dots, (\theta_q, \phi_q)$  射入阵列。阵列输出信号为

$$x(t) = A(\theta, \phi)s(t) + n(t) \quad (1)$$

$$A(\theta, \phi) = [a(\theta_1, \phi_1), \dots, a(\theta_q, \phi_q)] \quad (2)$$

$$a(\theta_k, \phi_k) = [a_1(\theta_k, \phi_k)e^{-j\omega\tau_1(\theta_k, \phi_k)}, \dots, a_M(\theta_k, \phi_k)e^{-j\omega\tau_M(\theta_k, \phi_k)}]^T \quad (3)$$

其中  $x(t)$  是  $M \times 1$  阵列接收矢量,  $\theta_i$  是第  $i$  个入射方向的方位角,  $\phi_i$  是第  $i$  个入射方向的仰角,  $A(\theta, \phi)$  是阵列在多信号  $(\theta, \phi) = [(\theta_1, \phi_1), \dots, (\theta_q, \phi_q)]$  方向上形成的多方向矢量矩阵,  $a_i(\theta_k, \phi_k)$  是第  $i$  个阵元在  $(\theta_k, \phi_k)$  方向上相应的幅度,  $\tau_i(\theta_k, \phi_k)$  为第  $i$  个阵元接收从  $(\theta_k, \phi_k)$  方向入射信号关于参考点的传输延迟时间。  $n(t)$  为统计独立的零均值圆高斯噪声, 方差为  $\sigma^2$ 。

在假设接收信号为确定性信号的情况下,从采样数据的概率密度函数可以推导出对数极大似然估计函数。

$$L(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^M |P_{A(\theta, \phi)} x(t_i)|^2 = \text{tr}[P_{A(\theta, \phi)} \hat{R}] \quad (4)$$

$$P_{A(\theta, \phi)} = A(\theta, \phi)(A^H(\theta, \phi)A(\theta, \phi))^{-1}A^H(\theta, \phi) \quad (5)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x(t_i)x^H(t_i) \quad (6)$$

其中  $x(t_i)$  是接收向量的第  $i$  个采样点。

### 3 混沌优化算法(COA)

首先选择用于载波的混沌变量。我们选用式(7)所示的 logistic 映射<sup>[4]</sup>, 其中  $\mu$  是控制参量。当  $\mu = 4$  时, logistic 映射是满映射, 并且系统处于完全混沌状态,  $y_0 \in [0, 1]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

$$y_{n+1} = \mu y_n(1 - y_n) \quad (7)$$

混沌优化算法<sup>[3]</sup>的基本步骤如下:

步骤 1 算法初始化: 利用混沌对初值敏感的特点, 对式(7)赋予  $m$  个微小差异的初值  $y_{i,0}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 产生  $m$  个不同轨迹的混沌变量集合  $\{y_{i,n}\}$ 。

步骤 2 第一次载波: 通过式(8)将选定的  $m$  个混沌变量  $y_{i,n}$  分别引入到相应的第  $i$  个优化变量中使其变成混沌变量  $x_{i,n}$ , 使混沌变量的变化范围分别“放大”到相应的优化量的取值范围。

$$x_{i,n} = c_i + d_i y_{i,n} \quad (8)$$

其中  $c_i, d_i$  为常数, 相当于“放大”倍数。

步骤 3 粗搜索: 令  $x_i(k) = x_{i,n}$  计算相应的性能指标  $f_i(k)$ , 其中  $f_i(k)$  由式(4)计算。令  $x_i^* = x_i(0)$ ,  $f^* = f(0)$ ;

If  $f_i(k) \geq f^*$ , then  $f^* = f_i(k)$ ,  $x_i^* = x_i(k)$  Else if  $f_i(k) < f^*$  then 放弃  $x_i(k)$

$$k := k + 1$$

步骤 4 如果经过步骤 3 的若干步搜索  $f^*$  都保持不变, 则按式(9)进行第二次载波:

$$x'_{i,n} = x_i^* + \alpha_i y_{i,n} \quad (9)$$

其中  $\alpha_i y_{i,n}$  为遍历区间很小的混沌变量,  $\alpha_i$  为调节常数,  $x_i^*$  为当前最优解。反之, 返回步骤 3。

步骤 5 精搜索: 令  $x_i(k') = x'_{i,n}$  计算相应的性能指标  $f_i(k')$ ;

If  $f_i(k') \geq f^*$ , then  $f^* = f_i(k')$ ,  $x_i^* = x_i(k')$  Else if  $f_i(k') < f^*$  then 放弃  $x_i(k')$

$$k' := k' + 1$$

步骤 6 如果经过步骤 5 的若干步搜索  $f^*$  都保持不变则终止搜索, 输出入射角的估计值  $x_i^*$ , 反之返回步骤 5。

## 4 求解 DOA 估计的混沌优化算法

### 4.1 算法实现

由于混沌优化算法的搜索不依赖于问题本身的方式, 只依赖于评价函数。因此, 对于 DOA 搜索不需要任何关于它本身的信息, 只需要对数极大似然估计函数的计算式, 无论它是否连续, 是否可微。于是, 混沌优化算法解决 DOA 估计问题的步骤如下:

(1) 算法初始化: 我们将每一个入射角的方位角和仰角视为独立的优化变量。若入射角有  $N$  个, 那么优化变量就有  $2N$  个, 并且对每一个优化变量分别用  $m$  条不同的混沌轨道进行优化。在后面的仿真实验中, 我们考虑两种初始值, 一种是随机确定一个初始值, 另一种是将对数极大似然估计函数的一维优化值映射到  $[0, 1]$  区间作为初值。考虑到在 DOA 估计实际应用中, 仰角和方位角的变化范围有较大的差别, 于是对于每一个不同的优化变量, 控制参量  $\mu$  稍微不同, 但同时考虑到应尽可能地使 logistic 映射为满映射, 故  $\mu$  应尽可能接近 4;

(2) 第一次载波: 考虑到阵列信号处理中实际的信号都在半球面内, 故假定仰角和方位角范围分别为  $1^\circ \sim 90^\circ$  和  $1^\circ \sim 360^\circ$ , 这样对应于仰角的优化量中  $c_i$  取  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  是很小的正数),  $d_i$  取 1.570796; 对应于方位角的优化量中  $c_i$  取  $\varepsilon$ ,  $d_i$  取 3.141593;

(3) 第二次载波: 由于需要估计的到达角的变化范围为非对称正区间, 一般调节常数  $\alpha_i$  的符号在搜索中保持不变。若设为正, 那么精搜索就只能在当前最优解的正邻域区间搜索, 相应的负邻域区间就无法搜索, 于是将式(9)改为式(10)和式(11)

$$x'_{i,n} = x_i^* + \alpha_i y_{i,n} \quad (10)$$

$$x''_{i,n} = x_i^* - \alpha_i y_{i,n} \quad (11)$$

这样, 若  $\alpha_i$  为正, 则式(10)就可获得当前最优解的正邻域区间中的候选解; 式(11)则为负邻域区间中的候选解。精搜索相应地改在  $x_i^*$ ,  $x'_{i,n}$  和  $x''_{i,n}$  之间进行。

### 4.2 COA 的收敛性分析

假设  $x_{\text{opt}} \in X$ ,  $X$  是全局最优解的集合。当  $\mu = 4$  时, logistic 映射是满映射, 并且系统处于完全混沌状态。根据 logistic 映射的遍历性<sup>[5,6]</sup>我们可知 COA 能够到达状态空间中的任一个状态; 再者, COA 保留了整个搜索过程中的最优解。根据文献[7]的结论可得无论初始值如何取总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_i^* \in x_{\text{opt}}) = 1 \quad (12)$$

即 COA 是全局渐近收敛的。

## 5 算法的性能分析

用计算机仿真实验的方法来验证前面提出的算法。我们

采用五元均匀圆阵进行仿真。为了有利于对空间二维测向的讨论,定义一个空间测角误差  $\Theta_e = f(\theta, \phi, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  进行性能分析,其中  $(\theta, \phi)$  为真实方向,  $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$  为估计方向,它们在空间的单位坐标为  $(\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi))$ ,  $(\cos(\hat{\phi})\cos(\hat{\theta}), \cos(\hat{\phi})\sin(\hat{\theta}), \sin(\hat{\phi}))$ ,如图1所示,由余弦定理可得空间测角误差的表达式为  $\cos(\Theta_e) = \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\hat{\phi})\cos(\hat{\theta}) + \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\hat{\phi})\sin(\hat{\theta}) + \sin(\phi)\sin(\hat{\phi})$ ,由此可计算出空间测角误差  $\Theta_e$ 。

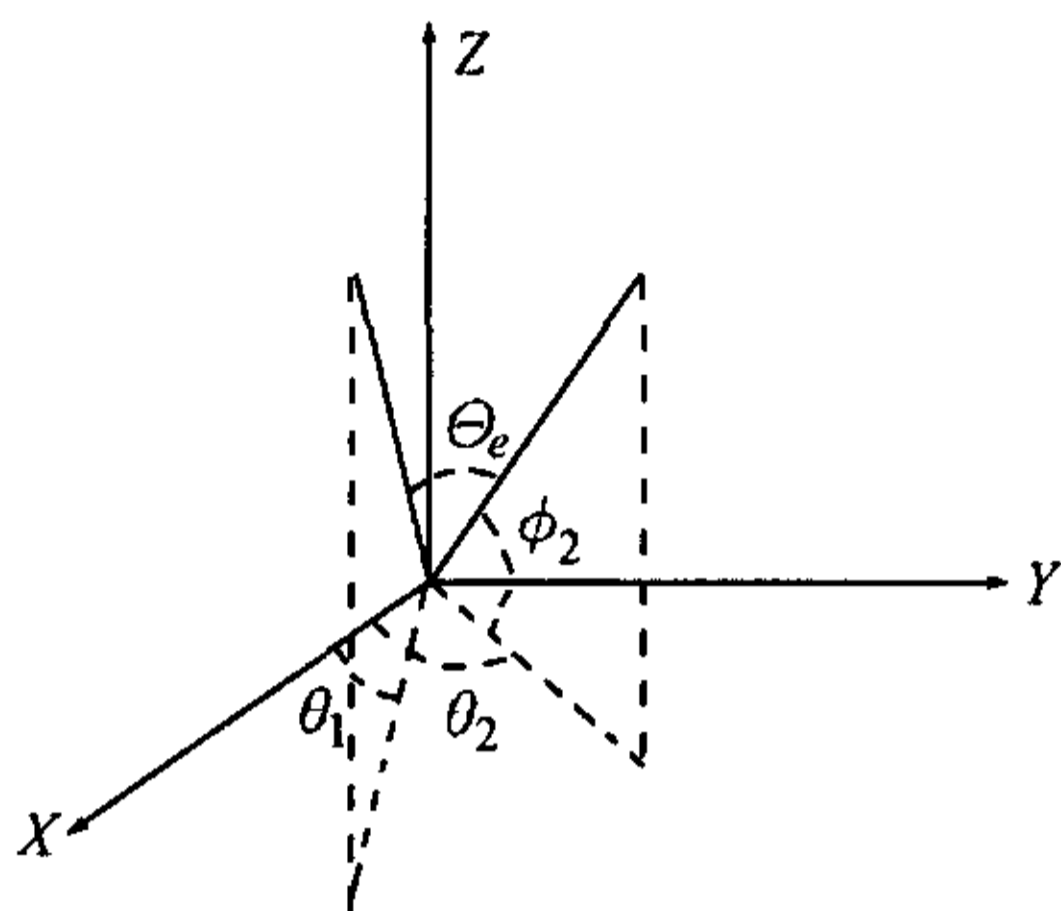


图1 空间测角误差示意图

在下面的所有仿真中,不失一般性,取圆阵的半径  $r = 1.5\lambda$ ,进行100次 Monte-Carlo 仿真。仿真中两个入射角的仿真结果是差不多的,故结果图中均只给出第一个入射角的情况。

第1个仿真实验中,空间功率相等的两个非相干信号从  $(65, 70)$ ,  $(245, 70)$  入射到阵列,快拍数为100,混沌优化算法的参数为:  $\alpha_i = 0.01745 \times 0.125$ ,  $m = 20$ 。我们考虑基于用随机初始值的混沌算法(CHAOS1),用一维优化值为初值的混沌算法(CHAOS2),MUSIC 算法和基于交替投影(AP)的最大似然估计算法等4种估计算法,在信噪比从0dB到20dB时对入射角估计的空间测角误差  $\Theta_e$ 。实验结果如图2所示。当两个入射信号是相干时的实验结果如图3所示。由于MUSIC 算法在相干信号的情况下失效,故不考虑。

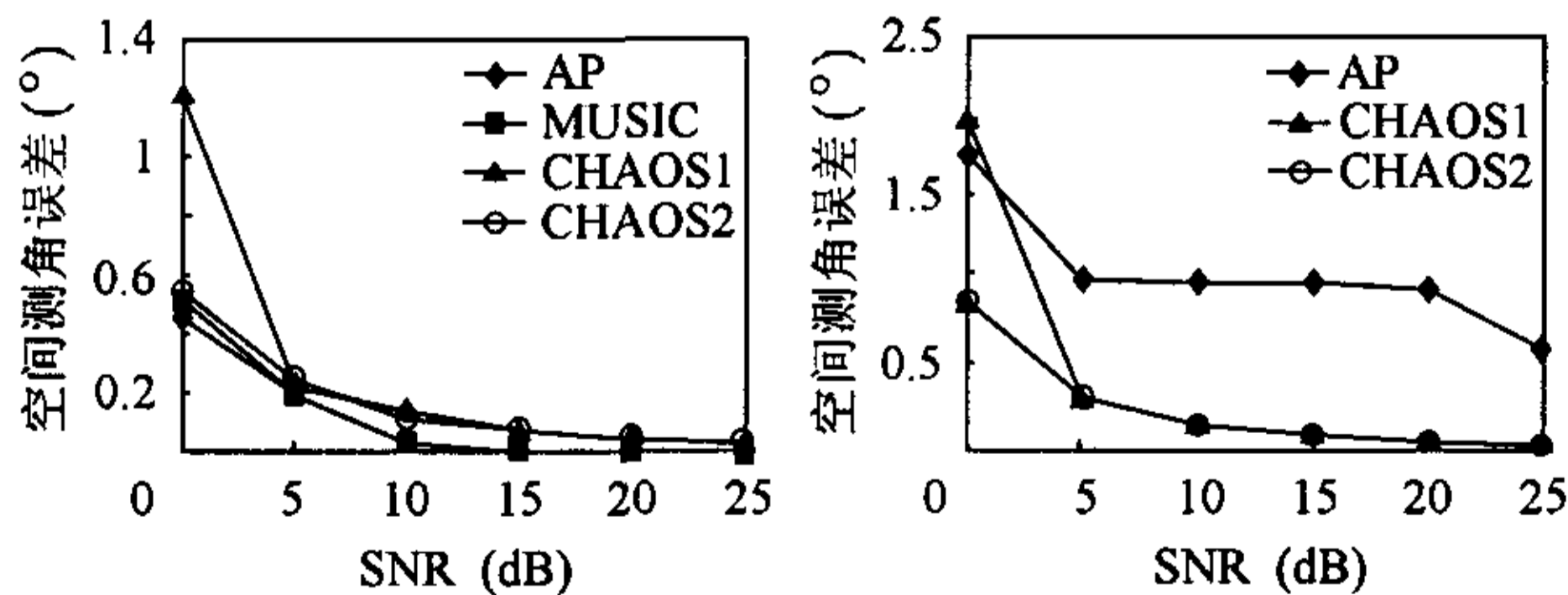


图2 非相干信号下算法的空间测角误差

图3 相干信号下算法的空间测角误差

在第2个仿真实验中,为了验证基于禁忌搜索的DOA估计算法的测角分辨率,空间功率相等的两个非相干信号从  $(330, 12)$ ,  $(335, 17)$  入射到阵列,混沌优化算法的参数与实验1相同。实验结果如图4所示。

在第3个仿真实验中,我们考虑4种算法在不同的快拍数情况下的测向能力。空间功率相等的两个非相干信号从  $(325, 12)$ ,  $(335, 22)$  入射到阵列,信噪比为10dB,基于混沌优化搜索的DOA估计算法的参数与实验1相同,实验结果如图5所示。

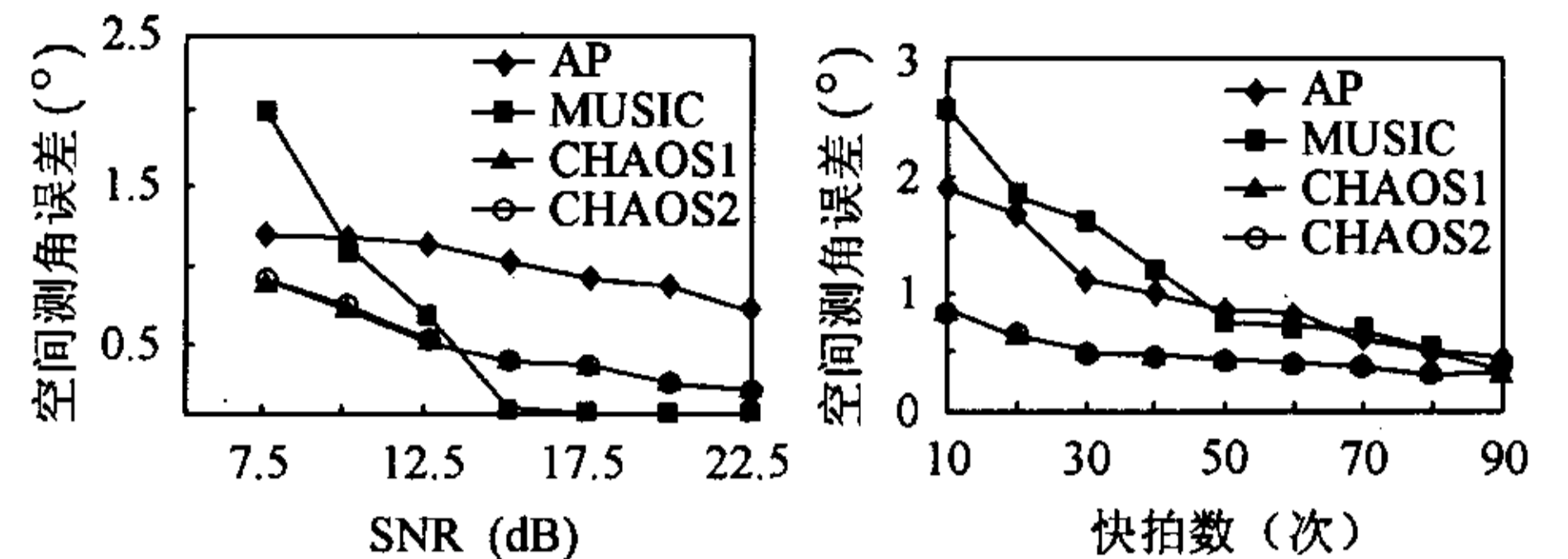


图4 非相干信号下算法的分辨率

图5 不同快拍数下算法的空间测角误差

从以上3个仿真实验可得,无论是非相干信号还是相干信号,基于混沌优化的DOA估计算法均具有较高的测向精度和测向分辨率。特别是在相干信号的情况,基于混沌优化的DOA估计算法比AP估计算法有较大的提高。当信噪比低于5dB时,用一维优化值为初值的混沌算法(CHAOS2)的测向精度比随机初值的混沌优化算法(CHAOS1)的测向精度有较大的提高;当信噪比高于10dB时,两种算法的测向精度趋于相同。

在混沌优化算法中,通过第一次载波的搜索可以很快找出一个近似最优解,它往往处于真正最优解的邻域内,而第二次载波相当于在近似最优解的邻域内进行细搜索。因此,调节常数  $\alpha_i$  决定了细搜索的搜索网格,从而对算法的测向精度和测向分辨率有很大的影响。为此,在第4个仿真实验中,我们考虑基于混沌搜索的DOA估计算法在调节常数  $\alpha_i$  下算法的测向精度。令  $\alpha_i = 0.01745 \text{ const}$ ,在仿真实验的其它条件与实验1相同下,不同的const对随机初值的混沌优化算法(CHAOS1)的测向精度的影响如图6所示。

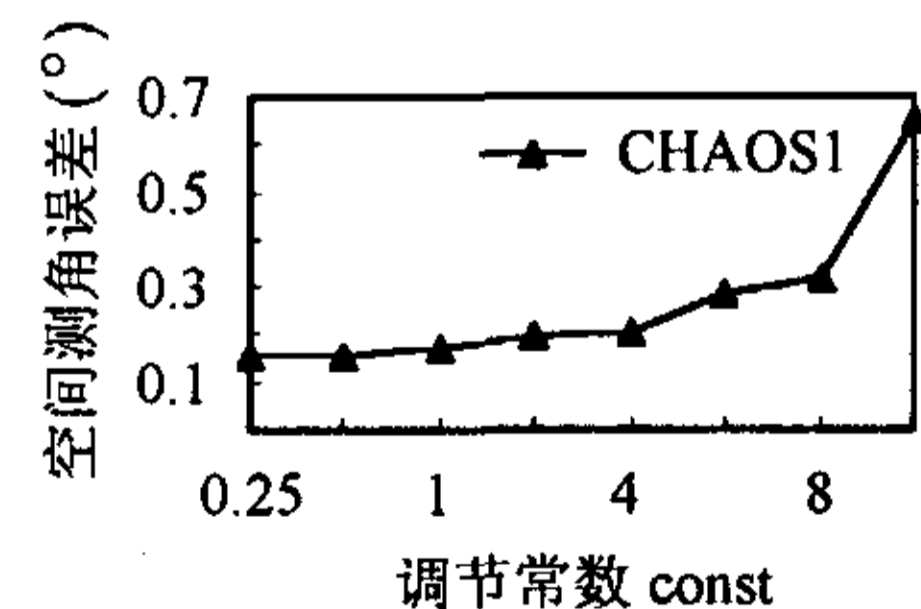


图6 调节常数 const 对 CHAOS1 性能的影响

## 6 算法的计算量分析

在用搜索算法求解DOA问题时,算法的计算量主要在求解每一个可行解的对数极大似然函数值。显然,找到最终解时搜索过的平均的可行解数越少,算法的实时性越好。在下面的仿真实验中,空间功率相等的两个信号从  $(65, 70)$ ,  $(245, 70)$  入射到阵列,信噪比为15dB,混沌优化算法的参

数与实验1相同。CHAOS1算法、CHAOS2算法和AP算法的比较结果见表1。表1中的找到最终解时搜索过的可行解数为随机运行100次的平均可行解数。

从表1可得,无论是非相干信号还是相干信号,本文提出的随机初值的混沌优化算法(CHAOS1)在获得最终解时搜索过的平均可行解数是AP算法的4%左右;一维优化值为初值的混沌算法(CHAOS2)搜索过的平均可行解数是AP算法的36%左右。

表1 搜索过的可行解次数比较

优化方法	搜索过的平均可行解数	
	非相干信号	相干信号
AP	194400	198288
CHAOS1	7869	7686
CHAOS2	70391	69632

从仿真实验4中可得随着调节常数 $\alpha_i$ 的变小,混沌优化算法的测向精度在逐步提高;但const小于0.5后,算法的性能逐渐趋于稳定。性能的改善是以搜索网格的细化为代价的。为此,在实验4的基础上,我们做了获得最终解时搜索过的平均可行解数与细搜索的调节常数const的关系图见图7。

从图7可得,当const小于0.13后,获得最终解时搜索过的平均可行解数有大幅度的提高,综合仿真实验4,在性能和计算量之间的一个较好折衷是const取0.13~0.5,这样既可获得较好的性能,相应的计算量也不太大。

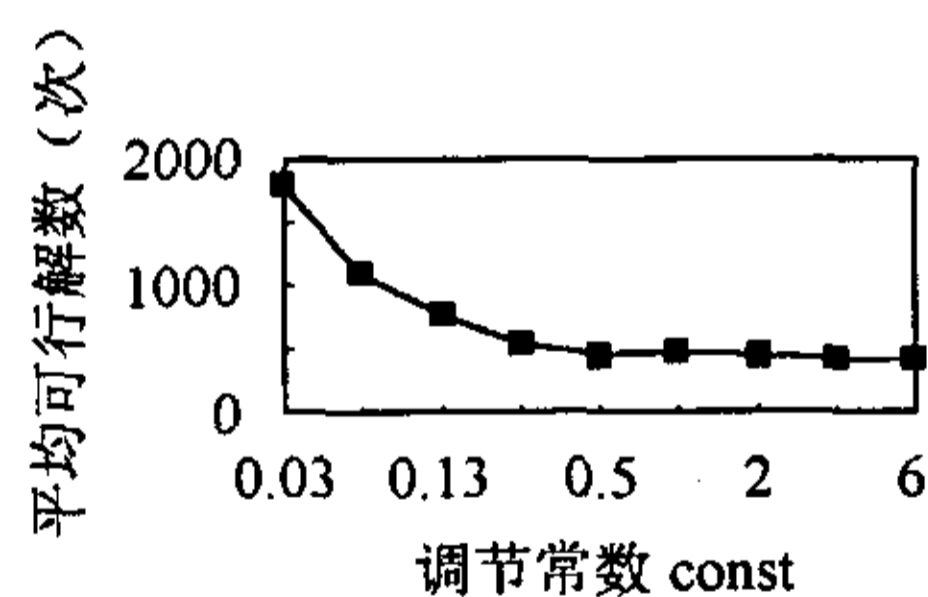


图7 调节常数const对搜索过的平均可行解数的影响

## 7 结论

本文提出并讨论了基于混沌优化的DOA估计算法的两

种实现:随机初值的混沌优化算法(CHAOS1)和一维优化值为初值的混沌优化算法(CHAOS2)。理论分析和仿真表明这两种算法在较小的计算代价下无论是测向精度还是测向的分辨率都可获得与MUSIC算法和AP算法相比的性能,特别是在相干信号的情况下,两种算法的性能较AP算法的性能有较大幅度的改善;并且由于混沌优化算法的搜索是基于不同的混沌轨道进行的,不像AP算法的搜索是基于前一次的搜索结果进行的,故在硬件实现中,可采用并行搜索的方式来进一步提高搜索速度,以满足DOA估计中实时性要求。

## 参考文献

- [1] Cadzow J A. A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources. *IEEE Trans. on ASSP*, 1988, 36(7): 965 - 979.
- [2] Ziskind I, Wax M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection. *IEEE Trans. on ASSP*, 1988, 36(10): 1553 - 1560.
- [3] Li B, Jiang W. Optimizing complex functions by chaos search. *Cybernetics and Systems*, 1998, 29(4): 409 - 419.
- [4] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1993: 第1章.
- [5] Geisel T, Fairen V. Statistical properties of chaos in Chebyshev maps. *Phys. Lett.*, 1984, 105A(6): 263 - 266.
- [6] Kohda T, Tsuneda A. Pseudonoise sequences by chaotic nonlinear maps and their correlation properties. *IEICE Trans. Commun.* 1993, E76-B(8): 855 - 862.
- [7] Li B, Jiang W. A novel stochastic optimization algorithm. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics-part B: Cybernetics*, 2000, 30(1): 193 - 198.

陈永倩: 女, 1974年生, 博士生, 讲师, 主要研究方向是阵列信号处理、现代优化算法应用、通信信号处理。

肖先赐: 男, 1933年生, 博士生导师, 教授, 主要研究方向是混沌信号处理、信号谱估计、阵列信号处理。