

脉压码时间旁瓣特性的研究

杨光正

(中国西南电子技术研究所 成都 610036)

摘要 本文研究了脉压码时间旁瓣的特性。证明了几个定理。并利用时间旁瓣自身互补定理对63位PN码的时间旁瓣作了相消仿真研究。用这种方法仅需要作很少的加法运算。文中还对优选码的问题举出实例以说明如何应用文中的定理来减少优选低旁瓣码的搜索时间。

关键词 脉压码, 自相关函数, 时间旁瓣, 旁瓣相消, 低旁瓣码搜索

1 前言

早在1948年 Ville^[1]就提出了模糊度函数,直到1953年才由 Woodward^[2]将模糊度函数用于雷达信号的研究。1958年 Siebert^[3]找到了一个函数是模糊度函数的充要条件,并讨论了它的实现问题,随后 Stutt^[4,5]对模糊度函数进行了详细研究。在此期间, Wilcox^[6]和 Sussman^[7]还讨论了模糊度函数的综合问题。

模糊度函数之所以引起重视,是因为它较全面地反映了雷达信号及其对应的匹配滤波器在分辨能力,模糊程度,杂波抑制,测量精度等方面的特性。

然而以往的研究偏重于模糊度函数的全域特性,对局域性质没有引起足够的重视。譬如对脉压码非周期自相关函数的旁瓣,一些文献(如文献[8])甚致将它称为“自身杂波”。由于对时间旁瓣的性质缺乏足够的认识,从而在优选低旁瓣码,旁瓣抑制等技术领域缺乏创新手段。

本文对脉压码的时间旁瓣性质作了一些研究,获得了一些有用结果。并根据时间旁瓣互补定理提出了一种旁瓣抑制技术。又根据旁瓣均值定理找到了一种优选低旁瓣码的快速搜索方法。

2 时间旁瓣定理

定义 非周期自相关函数 ρ_r 的所有旁瓣均为零的码称为无旁瓣码。周期性自相关函数 R_r 的所有旁瓣均为零的码称为理想周期码 (PPC)。

设 \mathcal{R} 为实矢量空间, V 为复矢量空间。对集 $\phi = \{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in \mathcal{R}$, $\phi \subset \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$; 选取适当的映射 $L: \varphi_i \rightarrow L(\varphi_i) = c_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ 使象集

1992-10-14. 收到, 1993-01-12 定稿

杨光正 男, 1937年生, 高级工程师, 从事雷达事业。

$s = \{c_i\}$, $c_i \in V$, $s \subset V$ 满足条件:

$$|c_i| = 1 \text{ 或 } 0, \quad c_i \in s, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

从集 s 中取一序列构成码 C :

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_r, \dots, c_m), \quad n \leq m,$$

并作如下假设: (a) $|c_i| \neq 0$; (b) $n > 1$; (c) 不失一般地将码元宽度归一化; (d) 多普勒频移 $f_d = 0$.

符号约定 文中分别记 ρ_r 和 R_r 的第 n 个旁瓣为 ϕ_n 和 χ_n ($n = 1, 2, \dots, N-1$), 下标 n 是旁瓣的序号. 以紧邻主瓣的旁瓣为第一旁瓣, 并规定主瓣右侧为正序号, 左侧为负序号.

定理 1 V 中不存在无旁瓣码.

证 由码 $C(C \subset V)$ 的相关函数的对称性 $\rho_r = \rho_r^*$ ($*$ 表示共轭) 可知, 仅需研究 ρ_r 的单侧旁瓣即可(文中简称旁瓣).

对于码长为 N 的编码信号 c_1, c_2, \dots, c_N , 则有 $|c_1| \neq 0$ 和 $|c_N| \neq 0$ (否则长度将退化为 $N-1$ 和 $N-2$), 因此, $\phi_{N-1} = c_1 \cdot c_N^* \neq 0$, 定理成立.

定理 2 长度为 N 的码 $C(C \subset V)$ 恒有

$$\left. \begin{aligned} \chi_n &= \phi_n + \phi_{n-N}, \\ \chi_n &= \phi_n + \phi_{N-n}^* \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots, N-1.$$

证 因 $\chi_n = \phi_n + \phi_{n-N}$ 是众所周知的周期与非周期相关函数的旁瓣关系, 所以仅需证明 $\phi_{n-N} = \phi_{N-n}^*$ 即可. 而

$$\begin{aligned} \phi_{n-N} &= \sum_{i=N-n+1}^N c_i \cdot c_{i+n-N}^* \stackrel{s=i+n-N}{=} \sum_{i=1}^N c_{i+n-N} \cdot c_i^* \\ &= \left(\sum_{i=1}^N c_i \cdot c_{i+N-n}^* \right)^* = \phi_{N-n}^*. \end{aligned} \quad (1)$$

证毕

本定理还可表述成

$$\operatorname{Re}(\chi_n) = \operatorname{Re}(\phi_n) + \operatorname{Re}(\phi_{n-N}) = \operatorname{Re}(\phi_n) + \operatorname{Re}(\phi_{N-n}), \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}(\chi_n) = \operatorname{Im}(\phi_n) + \operatorname{Im}(\phi_{n-N}) = \operatorname{Im}(\phi_n) - \operatorname{Im}(\phi_{N-n}). \quad (3)$$

推论 1 当码长 N 为偶数时, 其 R_r 的第 $|N/2|$ 个旁瓣的虚部恒为零.

只需将 $n = |N/2|$ 代入(3)式等号右端, 即可得此推论.

推论 2 当 C 为 PPC, 且码长 N 为偶数时, 其 ρ_r 的第 $|N/2|$ 个旁瓣的实部必为零.

因 C 为 PPC, 故有 $\chi_n = 0$ 从而有 $\operatorname{Re}(\chi_n) = 0$, 将 $n = |N/2|$ 代入(2)式得

$$\operatorname{Re}(\phi_{|N/2|}) + \operatorname{Re}(\phi_{N-|N/2|}) = 2\operatorname{Re}(\phi_{|N/2|}) = 0,$$

由此得 $\operatorname{Re}(\phi_{|N/2|}) = 0$.

推论 3 若 C 为 PPC, 则有

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(\phi_n) &= -\operatorname{Re}(\phi_{N-n}), \\ \operatorname{Im}(\phi_{n-N}) &= -\operatorname{Im}(\phi_{N-n}), \end{aligned} \right\} \text{互补律}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(\phi_{n-N}) &= \operatorname{Re}(\phi_{N-n}), \\ \operatorname{Im}(\phi_n) &= \operatorname{Im}(\phi_{N-n}), \end{aligned} \right\} \text{恒等律}$$

只需将 $x_n = 0$ 代入(2),(3)式,即得此推论。

定义 将码 C 中的码元换位后得到的码 C' 称为码 C 的异序码。由 C 和它的所有可能的异序码构成的码集记为 C_s , 并称其为异序码集。

定理 3 异序码的 ρ_r 的双侧旁瓣之和是实数且彼此相等。

证 ρ_r 的单侧旁瓣之和 S_a 为

$$S_a = \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-n} c_{n+i} \cdot c_i^* = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-n} c_{n+i} c_i^*$$

式中 $c_{n+i} c_i^* = c_{n+i} \cdot c_i^*$ 。

同理,另一侧旁瓣之和 $S_{a'}$ 为

$$S_{a'} = \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n^* = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-n} c_{n+i}^* c_i$$

而 $c_{n+i}^* c_i = (c_{n+i} \cdot c_i^*)^* = c_{n+i}^* \cdot c_i = c_i \cdot c_{n+i}^* = c_{i+n+i}$ 。

ρ_r 的双侧旁瓣之和 S 是

$$S = S_a + S_{a'} = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-n} (c_{n+i} c_i^* + c_{n+i}^* c_i) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-n} (c_{n+i} c_i^* + c_{i+n+i})$$

可以看出和项的下标是从 N 个自然数中取 2 的排列,因此,研究 S 只需研究和项的下标排列即可。

现将 $C (\in C_s)$ 中的第 l 个码元与第 m 个码元互易(相当于码元下标互易),互易后得到的异序码 $C' (\in C_s)$ 的 ρ_r 的双侧旁瓣之和 S' 仅仅是对 S 中的和项的下标进行了置换。

由于从自然数列 $1, 2, \dots, l, \dots, m, \dots, N$ 中取 2 的排列,与将数列中的 l 和 m 两数交换位置后,从 $1, 2, \dots, m, \dots, l, \dots, N$ 中取 2 的排列完全一样,由此可知

$$S = S'. \quad (4)$$

又因 $(c_{n+i} c_i^* + c_{n+i}^* c_i) = 2\operatorname{Re}(c_{n+i} c_i^*)$, 可知 S 恒为实数。

对于任一异序码 $C'' (\in C_s)$ 总可以通过每次互易 C 中的两个码元而得,由此可知(4)式对异序码集成立。

推论 4 \mathcal{R} 中的码 C 的 R_r 的旁瓣之和 S_p 恒等于其 ρ_r 的旁瓣之和 S_a 的一倍。

因在 \mathcal{R} 中有 $\rho_r = \rho_{-r}$, 故

$$S_p = \sum_{n=1}^{N-1} x_n = \sum_{n=1}^{N-1} (\phi_n + \phi_{N-n}).$$

考虑(1)式,并考虑加法交换律,立即可得

$$S_p = 2 \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n = 2S_a.$$

推论 5 若码 C 与码 \bar{C} 的 ρ_r 互补,则它们的 R_r 必互补。

只需证明 R_r 与 \bar{R}_r 的旁瓣互补即可。由互补码的定义^[9]可知, ρ_r 和 $\bar{\rho}_r$ 的旁瓣 ψ 与 $\bar{\psi}$ 有关系 $\bar{\psi}_n = -\psi_n$,^[9] 于是由定理 2 直接得到

$$\bar{\chi}_n = \bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n-N} = -(\psi_n + \psi_{n-N}) = -\chi_n,$$

即 C 与 \bar{C} 的 R_r 互补。

现在我们开始研究二相码,为获得一般结果,我们暂时放宽前面的限制,将码元的取值域放宽为 $c_i \in (a, -b)$, $a, b \in \mathcal{R}$ 。

定理 4 若长度为 N 的二相码 $C(\subset \mathcal{R})$ 中有 $k(k < N)$ 个码元为 $(-b)$, 则必有

$$k = \frac{(2aN + b - a) \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4abN + 4(N - 1)\sigma}}{2(a + b)}, \quad (5)$$

式中 σ 是 R_r 的时间旁瓣的平均电平。

证 由定理 3 可知,在研究异序码集 C , 的旁瓣之和的问题时,只需从 C , 中任取一个码来研究即可。今设有长度分别为 $(N - k)$ 和 $k(k < N)$ 的子码 C_a 和 C_b , 且

$$C_a, C_b \subset C; C_a \cup C_b = C; C_a \cap C_b = \emptyset,$$

$$C_a = (c_1, c_2, \dots, c_l, \dots, c_{N-k}), \quad c_l = a, \quad l = 1, 2, \dots, N - k,$$

$$C_b = (c_{N-k+1}, c_{N-k+2}, \dots, c_m, \dots, c_N), \quad c_m = -b,$$

$$m = (N - k + 1, N - k + 2, \dots, N).$$

我们只需要研究码 $C = (C_a, C_b)$ 即可。

码 C 的 ρ_r 的主瓣和双侧旁瓣之和 S_p 是

$$S_p = \sum_{n=1-N}^{N-1} \rho_n = \sum_{n=1-N}^{N-1} (\rho_{na} + \rho_{nb} + \rho_{nab} + \rho_{nba}),$$

式中 ρ_{na} 和 ρ_{nb} 分别是 C_a 和 C_b 的非周期自相关函数; ρ_{nab} 和 ρ_{nba} 是 C_a 和 C_b 的互相关函数。不难算出

$$\sum_{n=1-N}^{N-1} \rho_{na} = \sum_{n=1-(N-k)}^{N-k-1} \rho_{na} = (n - k)^2 a^2,$$

$$\sum_{n=1-N}^{N-1} \rho_{nb} = \sum_{n=1-k}^{k-1} \rho_{nb} = k^2 b^2,$$

$$\sum_{n=1-N}^{N-1} (\rho_{nab} + \rho_{nba}) = 2k(N - k) \cdot (a)(-b),$$

所以

$$S_p = (N - k)^2 a^2 + k^2 b^2 - 2k(N - k)ab.$$

又因主瓣 $\rho_0 = (N - k)a^2 + kb^2$, 故双侧旁瓣之和 $2S_s$ 为

$$2S_s = S_p - \rho_0 = (N - k)^2 a^2 + k^2 b^2 - 2k(N - k)ab - [(N - k)a^2 + kb^2].$$

因为双侧旁瓣的总宽是 $2(N - 1)$ (已扣除主瓣的宽度)。故旁瓣的平均电平 σ_s 应为

$$\sigma_s = \frac{2S_s}{2(N - 1)} = \frac{(N - k)^2 a^2 + k^2 b^2 - 2k(N - k)ab - [(N - k)a^2 + kb^2]}{2(N - 1)}.$$

解出 k 得

$$k = \frac{(2aN + b - a) \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4abN + 8(N - 1)\sigma_s}}{2(a + b)}$$

设 σ 为 R_r 的旁瓣的平均电平, 由推理 4 可知 $\sigma = 2\sigma_s$, 代入上式即得(5)式。

证毕

对常用的二数码有 $a = b = 1$, (5) 式可简化成

$$k = (N \pm \sqrt{(N - 1)\sigma + N})/2. \quad (6)$$

因 k 只能是正整数, 故当 σ 给定后, 并非任意 N 值均能满足此式。在优选码的应用中(6)式限定了搜索范围, 从而大大缩短了搜索时间。

3 应用举例

3.1 搜索低旁瓣二相码

目前尚无优选二相码的良策^[10], 借助于计算机用 Lindner^[11] 法搜索, 不仅需要高昂的计算代价, 而且不能优选高压缩比二相码。用分数维树^[10]搜索, 虽然大幅度缩短了搜索时间, 但不能获得最佳结果。

由数学中的中值定理可直接推知, 旁瓣低的码, 其旁瓣的平均电平必然低(逆命题未必成立)。因此利用(6)式优选二相码时, 总是设置较低的 σ 值

例 1 令(6)式中的 $\sigma = 0$, 得到

$$k = (N \pm \sqrt{N})/2, \quad (7)$$

只有当 N 为完全平方数时才能保证 k 为正整数。如 $N = 4$ 是完全平方数, 代入(7)式算出 $k = 3, 1$ 于是搜索范围缩小到由 3 个 1, 1 个 -1 构成的异序码集。搜到的码是 (+ + + -), 其 ρ_s 是 (-1, 0, 1, 4, 1, 0, -1)。众所周知这是 4 位 Barker 码。

由推论 2 可知, 因其第 2 旁瓣为零, 故有可能是 PPC。现用定理 2 计算它的 R_s 。为此, 用 ρ_s 的左侧第 3 旁瓣 ϕ_{-3} 与右侧第 1 旁瓣 ϕ_1 相加, 并用 0 替换 ϕ_{-3} 和 ϕ_1 。再用 ϕ_{-2} 与 ϕ_2 相加, 用和 0 替换原来的 ϕ_{-2} 和 ϕ_2 , ... 算出的 R_s 是 (0, 0, 0, 4, 0, 0, 0), 确实是 PPC。

例 2 令(6)式中的 $\sigma = -1$, 得到

$$k = (N \pm 1)/2 \quad (8)$$

可见 N 只能是奇数, 且 1 的个数与 -1 的个数相差 1。这正是狭义 PN 码应满足的条件之一。

当 $N = 7$ 时, 代入(8)式算出 $k = 4, 3$; 当 $N = 11$ 时, 算出 $k = 5, 6$, 两种情况优选出的码分别是 (+ + + - - + -) 和 (+ + + - - - + - - + -)。它们分别是 7 位和 11 位 Barker 码。

例 3 令(6)式中的 $\sigma = 1$, 得到

$$k = (N \pm \sqrt{2N - 1})/2 \quad (9)$$

当 $(2N - 1)$ 为完全平方数时, 才能保证 k 为正整数, 所以 N 只能取 5, 13, ...。

当 $N=5$ 时, 算出 $k=4, 1$; 当 $N=13$ 时, 算出 $k=9, 4$. 两种情况优选出的码分别是 $(+++++)$ 和 $(+++++---+---+)$, 它们分别是 5 和 13 位 Barker 码。

用本文的方法优选二相码, 可将搜索范围缩小到异序码集这样一个狭小的范围, 从而解决了优选码耗时、费用高的难题^[11,12]。

3.2 旁瓣相消新技术

定理 2 指出了一种新的旁瓣抑制技术, 现说明如何用它相消旁瓣。所用的 63 位 PN 码是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

图 1 是匹配时 PN 码的非周期自相关函数的仿真波形, 其 $\text{PSR} = -17.925\text{dB}$. 根据定理 2 作如下处理:

$$r_i = \rho_i + \rho_{(63-i)}. \quad (10)$$

图 2 是处理后的结果。其 $\text{PSR} = -35.987\text{dB}$, 改善了 18dB . 与加权技术比较, 在此仅用了 $(N-1)$ 次加法运算, 且处理后的主瓣未损失, 也未展宽。

为弄清此法对失配状态是否有效? 我们对 $f_d \approx 0$ 的情况也进行了模拟。

用的码元宽 $\tau = 0.33\mu\text{s}$, f_d 分别取 3kHz , 6kHz , 15kHz .

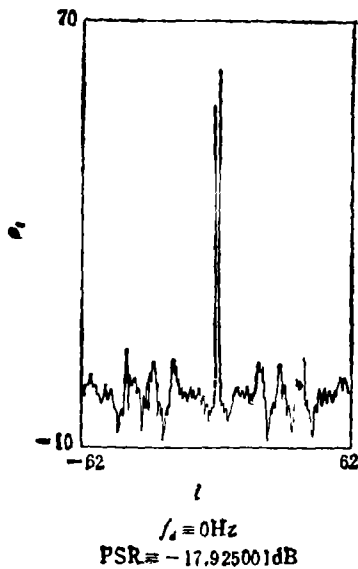


图 1 63 位 PN 码的非周期自相关函数

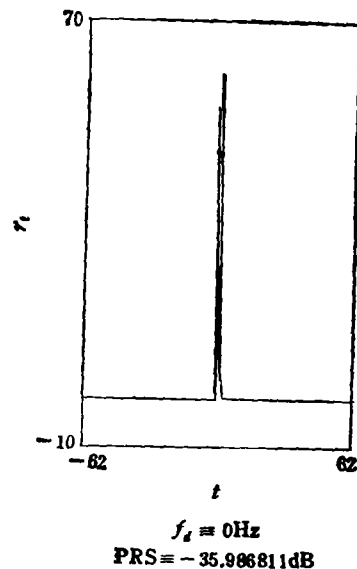


图 2 用旁瓣相消法, 相消后的非周期自相关函数

图 3 是 $f_d = 15\text{kHz}$ 时的压缩波形, 其 $\text{PSR} = -10.378\text{dB}$. 图 4 是经(10)式处理后的波形, 其 $\text{PSR} = -14.703\text{dB}$. 表 1 列出了 4 种情况的对比。

从表 1 中列出的数据不难看出, 即使处于失配状态, 这种方法仍然有效。这种相消方

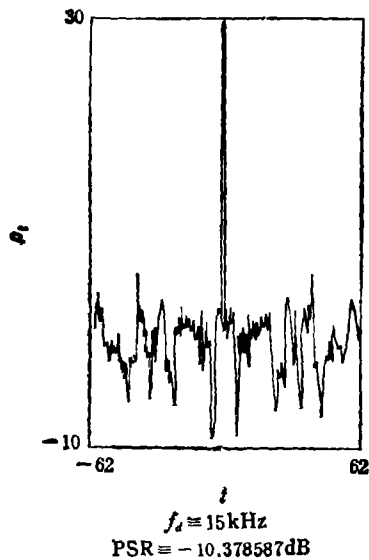


图3 失配状态 63 位 PN 码的非周期相关函数

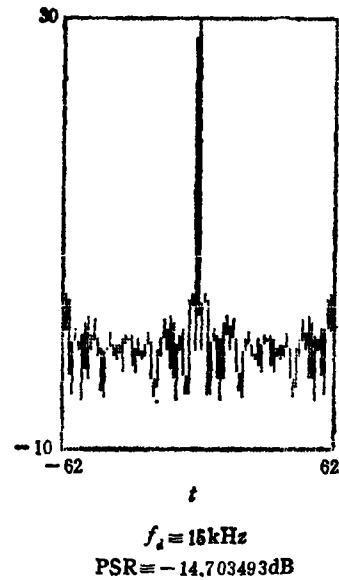
图4 失配情况下采用旁瓣相消技术处理后的非周期相关函数
(图中纵坐标为 r_r)

表 1

$f_d(\text{Hz})$		0	$3k$	$6k$	$15k$
处理前	PSR	-17.925	-17.795	-17.389	-10.379
处理后	(dB)	-35.987	-34.071	-29.779	-14.703

法对 ρ_r 的 PSR 改善的极限值等于 R_r 与 ρ_r 的 PSR 之差。故此法只对 R_r 有低的 PSR 的码才有较大改善。

这种旁瓣相消方法存在的问题是虚象效应问题。最好是举例说明：设在左侧 ϕ_{1-N} 处存在一个目标，当 ϕ_{1-N} 与 ϕ_1 相消时，这个目标也同时搬过去了，它是真实目标位置的虚象。

利用 ρ_r 的对称性可以克服这一缺点。因同时在 ϕ_{1-N} 和 ϕ_{N-1} 处存在目标的概率非常小。所以我们在用 ϕ_{1-N} 与 ϕ_1 相消的同时，用 ϕ_{N-1} 与 ϕ_1 相消作为副本，然后比较两帧信号，若副本在 ϕ_1 处也有目标，则 ϕ_1 处的目标是真目标，否则是虚象。即使作副本，也仅需增加 $(N-1)$ 次加法运算。

4 结 束 语

本文对脉压码的时间旁瓣的性质作了一些初步研究，从所获得的结果来看，无疑地，将旁瓣视为“自身杂波”是欠妥的。它具有明显的非统计规律性。研究旁瓣性质的重要

性在本文的应用实例中已初露端倪。倘若本文能起到抛砖引玉的作用, 本文的目的也就达到了。

致谢 本课题曾得到游荣华, 冯尚诚, 陆逸平同志的鼎力支持, 谨在此表示诚挚的谢意。

参 考 文 献

- [1] Ville J. *Câles et Transmission*, 1948, 2: 67—74.
- [2] Woodward. P M *Probability and Information Theory, with Applications to Radar*, New York: Pergamon Press, New York, 1953, Chapter 7, §7.2.
- [3] Siebert W M. *Studies of Woodward's Uncertainty Function*. Mass. Inst. Technol., Res. Lab. Electron., Quart. Progress Rept., April, 15, 1958.
- [4] Stutt C A. *IRE Trans. on IT*, 1959, IT-5: 164—167.
- [5] Stutt C A. *IEEE Trans. on IT*, 1964, IT-10: 321—327.
- [6] Wilcox C H. *The Synthesis Problem For Radar Ambiguity Functions*. Univ. Wisconsin, Math. Res. Center, Tech. Summary Rept. 157, April, 1960.
- [7] Sussman S M. *IRE Trans. on IT*, 1962, IT-8: 246—254.
- [8] Rihaczek A W. *Principles of High-Resolution Radar*, McGraw Hill Book Company, 1959, Chapter 5, §5.5.
- [9] Golay M J E. *IRE Trans. on IT*, 1961, IT-7: 82—87.
- [10] 李炳成, 朱耀庭, 朱光熹, 万发贵. 基于分数维的二相码选码方法, 中国电子学会雷达专业学会, 第五届学术年会论文集, CLE-RADAR-89. 武汉: 1989年, 第669—674页.
- [11] Lindner J. *Electron. Lett.*, 1975, 11(21): 507.
- [12] Indiresan P V, et al. *J. Optimization Theory Applications*, 1971, 7: 90—108.

THE RESEARCH ON THE PROPERTIES OF TIME-SIDELobe OF PULSE COMPRESSION CODES

Yang Guangzheng

(Southwest China Research Institute of Electronic Technology, Chengdu 610036)

Abstract Some basic properties of the time-sidelobe of arbitrary sequence's autocorrelation function have been studied and several theorems of the time-sidelobe of sequence's autocorrelation function are proved also in the paper. Some practical examples are given using the theorems. The first example is to search low sidelobe codes, and the second example use sidelobe's self-complementary property to cancel sidelobes of 63 bit PN code. Finally, it is point out that the method for cancelling sidelobe needs only add operation.

Key words Pulse compression code; Autocorrelation function; Time-sidelobe; Cancelling sidelobes, Sidelobe codes searching