

# 网络分解直线法结合周期边界条件分析开域微带结构<sup>1</sup>

朱汉清 方大纲 龙 毅

(南京理工大学毫米波技术研究室 南京 210094)

**摘 要** 本文用网络分解直线法结合周期边界条件,以平面波激励,通过贴片电流提取相关参数的方法,分析开域微带结构。阻抗元素计算和减缩方程求解,分别使用快速傅里叶变换和网络分解技术,从而大大提高了计算效率。周期边界模拟开域的收敛性研究和计算时间的比较表明了该方法的有效性。最后计算了矩形贴片平面谐振器的谐振频率,其结果与已发表的值吻合很好。

**关键词** 开域微带结构, 直线法, 周期边界条件, 快速傅里叶变换, 网络分解技术

**中图分类号** TN817, O441

## 1 引 言

开域微带是微带天线和平面谐振器中的常见结构。它在实际工程中有广泛的应用。目前分析这类问题较为精确的方法是全波方法。而直线法(Method of Lines, ML)全波分析尤为适合于这种平面分层结构<sup>[1]</sup>。近来 A. Dreher 和 R. Pregla<sup>[2]</sup>将吸收边界条件(Absorbing Boundary Conditions, ABC)引入 ML 分析这类开域问题,减小了求解区域。但是,由于这时的差分矩阵与介电常数有关,并且在边界匹配时,必须先反变换到空域,这样就破坏了矩阵的对角性,在计算阻抗元素时,又需要做数值求逆,所以要花费很多计算时间。本文采用周期边界条件(Periodic Boundary Conditions, PBC)结合快速傅里叶变换(FFT)和网络分解(Diakoptic)技术,分析开域微带结构,充分提高其计算效率。文中还对周期边界模拟开域的收敛性做了深入的研究。与 ML 结合 ABC 的常规方法相比,这种做法尽管求解区域较大,但它保持了各层介质区差分矩阵具有相同解析形式特征值和特征矢的优点,并且能够利用 FFT 计算阻抗元素;另一方面,对减缩后的线性方程组采用 Diakoptic 降阶求解。由于对两个最费机时的步骤都分别使用了快速算法,因此大大提高了计算效率。

下面将首先给出 PBC 下,以平面波激励,通过贴片电流提取相关参数的方法,分析开域微带结构的 ML 模型,然后分别使用 FFT 和 Diakoptic 计算阻抗元素和求解减缩方程。为了说明方法的有效性,文中以计算矩形贴片电流为例,对 PBC 模拟开域的收敛性进行了研究,同时给出它的计算时间,并将计算电流值与已有结果进行了比较,最后利用电流提取了矩形贴片平面谐振器的谐振频率。

## 2 理论分析

### 2.1 周期边界条件下的直线法

如图 1 所示为平面波激励的开域微带结构及其 PBC 下的 ML 离散,假设入射平面波(略去时间因子  $e^{j\omega t}$ )为

$$E = E_x^{\text{in}} = -\exp(jk_0 z), \quad (1)$$

<sup>1</sup> 1995-04-28 收到, 1995-10-30 定稿  
国家自然科学基金资助项目

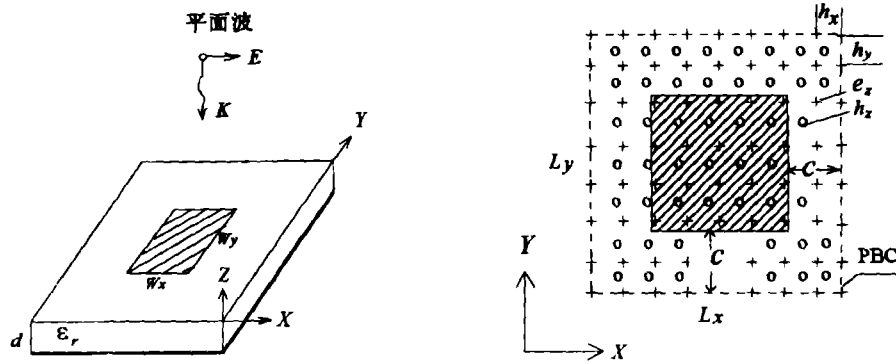


图1 开域微带结构及其直线法离散

则介质反射场为

$$E_x^{S1} = -R \exp(jk_0 z), \quad (2)$$

其中  $R$  为介质反射系数, 可由波矩阵方法给出<sup>[3]</sup>。侧壁设置周期边界, 间距分别为  $L_x, L_y$ , 此时两个独立的场分量  $e_x, h_x$  分别满足 Helmholtz 方程:

$$\frac{\partial^2 \psi^{eh}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{eh}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^{eh}}{\partial z^2} + k^2 \psi^{eh} = 0 \quad (3)$$

和 Floquet 定理。由于平面波按图示方向垂直入射, 则  $k_x = k_y = 0$ , Floquet 定理可写成下列形式:

$$\psi(x + L_x, y, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y + L_y, z) = \psi(x, y, z). \quad (4)$$

在一个周期内沿  $x, y$  方向分别用  $N_x$  条和  $N_y$  条  $e_x$  线和  $h_x$  线离散求解区域, 并注意到 (4) 式, 用中心差商近似二阶偏导数, 则 (3) 式被离散为

$$\frac{1}{h_x^2} [D_{xx}] [\psi^{eh}] + \frac{1}{h_y^2} [\psi^{eh}] [D_{yy}]^T + \frac{d^2}{dz^2} [\psi^{eh}] + k^2 [\psi^{eh}] = 0, \quad (5)$$

其中

$$[\psi^{eh}] = \begin{bmatrix} \psi_{11}^{eh} & \psi_{12}^{eh} & \cdots & \psi_{1N_y}^{eh} \\ \psi_{21}^{eh} & \psi_{22}^{eh} & \cdots & \psi_{2N_y}^{eh} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N_x 1}^{eh} & \psi_{N_x 2}^{eh} & \cdots & \psi_{N_x N_y}^{eh} \end{bmatrix}, \quad [D_{xx}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$[D_{yy}]$  与  $[D_{xx}]$  具有相同的形式。矩阵  $[D_{xx}], [D_{yy}]$  存在酉矩阵  $[T_x]$  和  $[T_y]$ , 可分别将其对角化:

$$[T_x^{eh}]^+ [D_{xx}] [T_x^{eh}] = -\text{diag}[d_{xx}], \quad [T_y^{eh}]^+ [D_{yy}] [T_y^{eh}] = -\text{diag}[d_{yy}] \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_x^e(m, n) &= e^{jm\varphi_n} / \sqrt{N_x}, & T_x^h(m, n) &= je^{j(m+0.5)\varphi_n} / \sqrt{N_x}; \\ T_y^e(m, n) &= e^{jm\theta_n} / \sqrt{N_y}, & T_y^h(m, n) &= je^{j(m+0.5)\theta_n} / \sqrt{N_y}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$(d_{xx})_n = 4 \sin^2(\varphi_n/2), \quad \varphi_n = 2\pi(n-1)/N_x, \quad (n = 1, 2, \dots, N_x); \quad (9)$$

$$(d_{yy})_n = 4 \sin^2(\theta_n/2), \quad \theta_n = 2\pi(n-1)/N_y, \quad (n = 1, 2, \dots, N_y). \quad (10)$$

可见对不同介质层具有相同解析形式的特征矢与特征值。

对 (5) 式两边同时左乘  $[T_x^{eh}]^+$ , 右乘  $[T_y^{eh}]^*$  并设

$$[U^{eh}] = [T_x^{eh}]^+ [\psi^{eh}] [T_y^{eh}]^*, \quad (11)$$

则 (5) 式变为 (为方便略去上标  $e, h$ )

$$U_{mn}''(z) + (k^2 - d_{xxm}/h_x^2 - d_{yy_n}/h_y^2)U_{mn}(z) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots, N_x; \quad n = 1, 2, \dots, N_y). \quad (12)$$

用谱域导抗法<sup>[4]</sup>可方便地求解方程组 (12) 式, 从而得到变换域方程为

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_{xx} & \bar{Z}_{xy} \\ \bar{Z}_{yx} & \bar{Z}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_x \\ \bar{E}_y \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将 (13) 式反变换到空域, 变换域和空域内的矩阵元素有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} Z_{xx}(m, n, s, t) &= \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} T_x^h(m, k) T_y^e(n, l) T_x^{h*}(s, k) T_y^{e*}(t, l) \bar{Z}_{xx}(k, l), \\ Z_{xy}(m, n, s, t) &= \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} T_x^h(m, k) T_y^e(n, l) T_x^{e*}(s, k) T_y^{h*}(t, l) \bar{Z}_{xy}(k, l), \\ Z_{yx}(m, n, s, t) &= \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} T_x^e(m, k) T_y^h(n, l) T_x^{e*}(s, k) T_y^{h*}(t, l) \bar{Z}_{yx}(k, l), \\ Z_{yy}(m, n, s, t) &= \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} T_x^e(m, k) T_y^h(n, l) T_x^{e*}(s, k) T_y^{h*}(t, l) \bar{Z}_{yy}(k, l). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

利用导体上切向电场为零的条件, 得到贴片上的减缩方程为

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E_x^{\text{in}} + E_x^{\text{sl}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

求解 (15) 式便可得到贴片电流, 进而可以提取相关参数。

## 2.2 利用快速傅里叶变换计算阻抗元素

将本征矢 (8) 式代入 (14) 式, 可得到变换域和空域内阻抗元素的关系具有下列形式:

$$\begin{aligned} Z(m, n, s, t) &= \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} \bar{Z}(k, l) \exp[j(m-s)\varphi_k] \exp[j(n-t)\theta_l], \\ &(m, s = 1, 2, \dots, N_x; \quad n, t = 1, 2, \dots, N_y). \end{aligned} \quad (16)$$

由于当  $m - s = m' - s'$  以及  $n - t = n' - t'$  时有:  $Z(m, n, s, t) = Z(m', n', s', t')$ , 所以只要利用下式求出:

$$Z(p, q) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} \bar{Z}(k, l) e^{jP\varphi_k} e^{jq\theta_l}, \quad p = -(N_x - 1), \dots, (N_x - 1); q = -(N_y - 1), \dots, (N_y - 1), \quad (17)$$

就可以求出所有元素  $Z(m, n, s, t)$ , 而 (17) 式正是二维离散傅里叶变换的形式, 因此可以利用 FFT 快速地计算阻抗元素。

### 2.3 利用网络分解技术求解减缩方程

将减缩方程 (15) 式简写为

$$[Z][J] = [E], \quad (18)$$

其中  $[J]$  为待求的未知量, 这时只要求出  $[Z]$  的逆矩阵, 就可得到 (18) 式的解。通常求逆矩阵要花费很多机时。为减少计算时间, 采用网络分解技术降低 (18) 式中  $[Z]$  矩阵的阶数<sup>[5]</sup>。将离散点上的电流看作脉冲基, 进行脉冲基-三角基转换, 以降低矩阵  $[Z]$  的阶数。值得注意的是: 由于这里的列矢量  $[J]$  表示的是一个分段光滑曲线, 因此转换矩阵应分段选取。首先将 (18) 式改写为

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}]_{N_1 \times N_1} & \cdots & [Z_{1j}]_{N_1 \times N_j} & \cdots & [Z_{1n}]_{N_1 \times N_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [Z_{i1}]_{N_i \times N_1} & \cdots & [Z_{ij}]_{N_i \times N_j} & \cdots & [Z_{in}]_{N_i \times N_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [Z_{n1}]_{N_n \times N_1} & \cdots & [Z_{nj}]_{N_n \times N_j} & \cdots & [Z_{nn}]_{N_n \times N_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J_1]_{N_1 \times 1} \\ \vdots \\ [J_j]_{N_j \times 1} \\ \vdots \\ [J_n]_{N_n \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [E_1]_{N_1 \times 1} \\ \vdots \\ [E_i]_{N_i \times 1} \\ \vdots \\ [E_n]_{N_n \times 1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

原矩阵  $[Z]$  的总阶数为  $\sum_{i=1}^n N_i$ 。选择  $[J_i]$  的转换矩阵为  $[Q_i]$ , 则

$$[J_j]_{N_j \times 1} = [Q_j]_{N_j \times P_j} [J'_j]_{P_j \times 1} \quad (P_j < N_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

将 (20) 式代入 (19) 式可得到降阶后的方程为

$$\begin{bmatrix} [Z'_{11}]_{P_1 \times P_1} & \cdots & [Z'_{1j}]_{P_1 \times P_j} & \cdots & [Z'_{1n}]_{P_1 \times P_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [Z'_{i1}]_{P_i \times P_1} & \cdots & [Z'_{ij}]_{P_i \times P_j} & \cdots & [Z'_{in}]_{P_i \times P_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [Z'_{n1}]_{P_n \times P_1} & \cdots & [Z'_{nj}]_{P_n \times P_j} & \cdots & [Z'_{nn}]_{P_n \times P_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J'_1]_{P_1 \times 1} \\ \vdots \\ [J'_j]_{P_j \times 1} \\ \vdots \\ [J'_n]_{P_n \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [E'_1]_{P_1 \times 1} \\ \vdots \\ [E'_i]_{P_i \times 1} \\ \vdots \\ [E'_n]_{P_n \times 1} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [Z'_{ij}]_{P_i \times P_j} &= [Q_i]_{N_i \times P_i}^t [Z_{ij}]_{N_i \times N_j} [Q_j]_{N_j \times P_j}, \\ [E'_i]_{P_i \times 1} &= [Q_i]_{N_i \times P_i}^t [E_i]_{N_i \times 1}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

降阶后矩阵  $[Z']$  的总阶数为  $\sum_{i=1}^n P_i$ , 且  $\sum_{i=1}^n P_i < \sum_{i=1}^n N_i$ 。(21) 式的求解时间要比 (19) 式少得多。

### 3 数值结果

为了说明方法的有效性,本文以计算矩形贴片中心电流为例,对周期边界模拟开域的收敛性进行了研究(图2)。从图中可见,随着边界距离的加大,其电流收敛到了一个稳定的值,其收敛值的正确性在下面的算例中得到了证实。另外研究还表明:低介电常数衬底的收敛区间较小。对于 $\epsilon_r = 9.6$ 的情况,边界的收敛位置 $C$ 约为 $2.7\lambda_e$ ,按ABC的收敛位置 $C = 0.27\lambda_e$ 计<sup>[2]</sup>,PBC模拟开域的收敛性较差。其收敛区域约为ABC的10倍。但从图3(a)的计算时间可以得出结论:采用PBC结合FFT和Diakoptic的计算效率要比ABC高得多。因为在相同的边界位置 $C$ 下,使用PBC的计算时间必然低于ABC,这是由于它不存在对不同介质层需要分别数值求解差分矩阵的特征值和特征矢问题,其特征值和特征矢全都是解析形式。所以在求解区域大小相同的条件下,以PBC的计算时间估算ABC的计算时间是保守的,况且图中已明显地表明了本文(Diakoptic-ML/PBC-FFT)的计算时间远短于仅使用PBC的计算时间,其差别约为

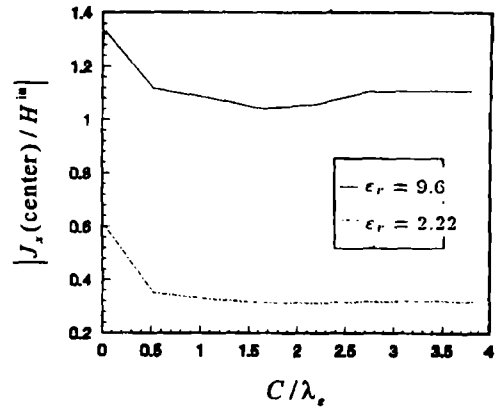


图2 电流随边界距离加大的收敛情况  
( $W_x = 2.0\text{mm}$ ,  $W_y = d = 0.635\text{mm}$ ,  
 $f = 22.2\text{GHz}$ )

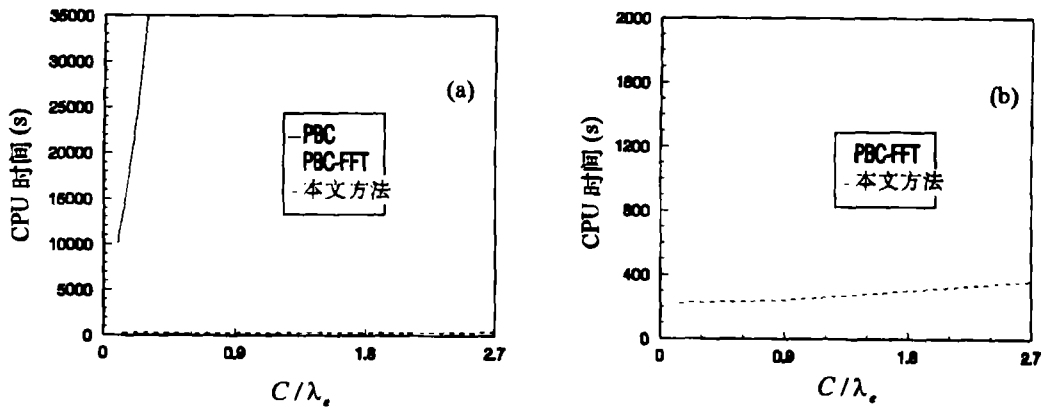


图3 (a) 计算时间比较, (b) 图(a)的局部放大  
( $W_x = 2.0\text{mm}$ ,  $W_y = d = 0.635\text{mm}$ ,  $f = 22.2\text{GHz}$ ,  $\epsilon_r = 9.6$ )

两个数量级。因此本文提出的方法具有很高的计算效率。从图3中我们还可看出,随着边界距离的加大,PBC-FFT的计算时间并无明显地增加。这是由于在插线密度一定的情况下,扩大求解区域所提高的计算量主要来源于计算阻抗元素。但在使用FFT计算阻抗元素之后,这部分所花费的时间已经很少,主要的CPU时间表现在求解减缩方程上。因此要进一步提高计算效率,就必须减少求解方程的时间。图3(b)为计算时间的局部放大,它显示了通过引入网络分解降阶求解减缩方程后,使其计算时间减少为1/5以下。(图中计算时间的运行环境为SGI/R4400工作站。)图4为用本文方法计算的电流值与M. C. Bailey<sup>[6]</sup>结果的比较,两者吻合很好。

作为算例, 图5反映了利用电流提取微带贴片某一谐振频率的电流变化过程。在谐振频率点上电流的实部最大, 虚部近似为零。图6为用本文方法给出的不同尺寸下, 矩形贴片平面谐振器的谐振频率, 其结果与文献[7]的结果十分吻合。

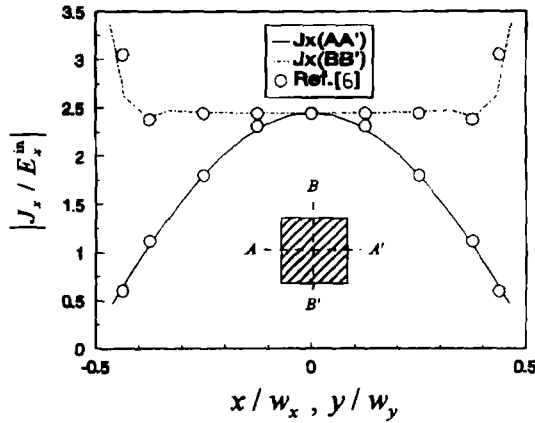


图4 贴片中心线上的电流  
( $W_x = W_y = 0.485\lambda_e$ ,  $d = 0.02\lambda_e$ ,  $\epsilon_r = 2.5$ )

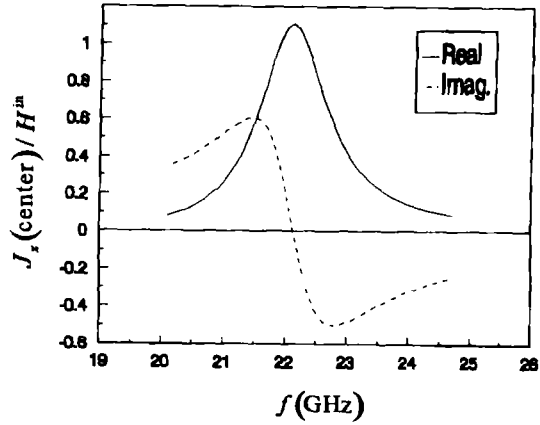


图5 利用贴片电流提取谐振频率  
( $W_x = 2.0\text{mm}$ ,  $W_y = d = 0.635\text{mm}$ ,  $\epsilon_r = 9.6$ )

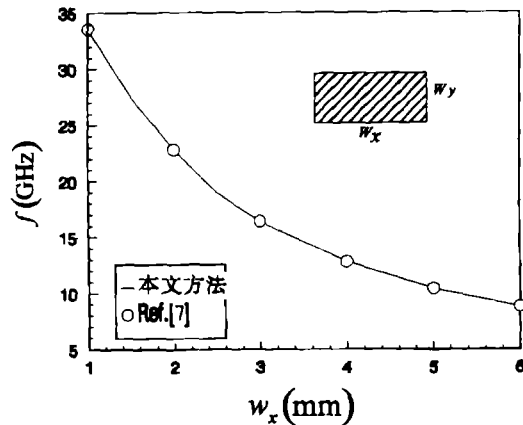


图6 矩形贴片平面谐振器的谐振频率 ( $W_y = d = 0.635\text{mm}$ ,  $\epsilon_r = 9.6$ )

## 4 结 论

从前面的讨论和数值算例可以看出, 本文用 ML 结合 PBC, 以平面波激励, 通过贴片电流提取相关参数的方法来分析开域微带结构是有效的。它与 ML 结合 ABC 的常规方法相比, 由于对带来计算时间的两个主要步骤: 计算阻抗元素和求解减缩方程分别采用 FFT 和 Diakoptic 快速算法, 从而使该方法具有很高的计算效率, 能够有效地用于工程设计中, 例如谐振频率的预估, 给出带宽以及方向图等。该方法对实际结构的优化也具有一定意义。

## 参 考 文 献

- [1] Pregla R, Pascher W. The Method of Lines, in Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Wave Passive Structure. T. Itoh, Ed. New York: Wiley, 1989, chapter 6.
- [2] Dreher A, Pregla R. IEEE Trans. on AP, 1993, AP-41(8): 1363-1368.
- [3] 方大纲, 刘次由. 微波理论与技术. 北京: 兵器工业出版社, 1987, 1.7.
- [4] 方大纲. 微波学报, 1991, (4): 7-13.
- [5] Butler C M. Diakoptic theory and the moment method. IEEE AP-S Digest. Dallas, U. S. A: 1990, 68-71.
- [6] Bailey M C, Deshpande M D. IEEE Trans. on AP, 1982, AP-30(4): 651-656.
- [7] Nam S, Itoh T. J. Electromag. Waves Appl., 1988, 2(9): 635-651.

ANALYSIS OF OPEN MICROSTRIP STRUCTURES BY USING  
DIAKOPTIC METHOD OF LINES COMBINED WITH  
PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

Zhu Hanqing    Fang Dagang    Long Yi

*(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)*

**Abstract** This paper presents the analysis of open microstrip structures by using diakoptic method of lines combined with periodic boundary conditions (PBC). The parameters of microstrip patch are obtained from patch current excited by plane wave. Impedance matrix elements are computed by using fast Fourier transform (FFT), and reduced equation is solved by using diakoptic technique. Consequently, the computing time is reduced significantly. The convergence property of simulating open structure by using PBC and the comparison of the computer time between using PBC and usual absorbing boundary condition(ABC) show the validity of the method proposed in this paper. Finally, the resonant frequency of a microstrip patch is computed. The numerical results obtained are in good agreement with those published.

**Key words** Open microstrip structures, Method of lines, Periodic boundary conditions, Fast Fourier transform, Diakoptic technique

朱汉清: 男, 1963年生, 硕士, 主要从事电磁场数值计算和电磁理论的研究, 现在江苏省淮阴师专任教.  
方大纲: 男, 1937年生, 教授, 现从事电磁场微波技术专业.  
龙毅: 男, 1964年生, 博士, 主要研究方向为电磁场数值计算和微带天线的分析与设计, 现为西南交通大学博士后人员.