

## 短序列条件下基于分段多项式建模方法的相位估计性能分析

卢 琨 刘兴钊

(上海交通大学电子工程系 上海 200030)

**摘要:** 该文主要对短序列非多项式相位条件下基于高阶模糊函数(HAF)的多项式相位系数估计算法性能进行了较详细的讨论。进一步研究了基于这种算法思想的分段多项式相位建模的瞬时相位估计方法。该方法的思想主要体现为将需估计数据序列进行分段,每个短数据段的瞬时相位采用一个低阶的多项式来逼近,而这些逼近多项式的各阶系数利用 HAF 或乘积高阶模糊函数(PHAF)的方法进行估计,最终整个数据序列的相位由各段估计出的瞬时相位合并而成。该方法的估计性能很大程度上取决于各分段数据序列的估计精度。文中分析了短序列非多项式相位对 HAF 及 PHAF 的影响,并通过仿真实验给出了具有一般性的结论。

**关键词:** 瞬时相位估计, 多项式相位信号, 分段建模, 短序列, 乘积高阶模糊函数

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)04-0523-04

## Phase Estimation Accuracy Based on Piecewise Polynomial-Phase Modeling Method with Short Sequences

Lu Kun Liu Xing-zhao

(Department of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract** In this paper, the performance of polynomial phase coefficient estimation algorithm based on High-order Ambiguity Function (HAF) for non-polynomial phase signal with short sequences is discussed in detail. Further, instantaneous phase estimation method is developed on the basis of the idea of this algorithm. The main idea of the addressed algorithm is to divide the data sequence into several segments, approach the instantaneous phase of each short segment by a low-order polynomial, estimate the parameters of the modeling polynomial-phase signal by HAF and Product HAF methods, and finally integrate the whole phase with estimated instantaneous phase of each segment. The estimation performance depends comparatively on the achievable accuracy of the segmented phase. The disadvantage of HAF/PHAF-based polynomial-phase estimation method with short and non-polynomial phase sequences is analyzed in this paper and some general conclusions are drawn after simulations.

**Key words** Instantaneous phase estimation, Polynomial phase signals, Piecewise modeling, Short data sequence, PHAF

### 1 引言

时变信号的瞬时频率与瞬时相位估计是非平稳信号处理中的重要组成部分,诸如相位差分法,自适应频率估计技术以及时频分析之类的各种方法已经相继被引入到这一领域并取得了较好的效果<sup>[1,2]</sup>。近年来,利用多项式相位建模的方法也得到了较多的关注和研究。根据维尔斯特拉斯(Weierstrass)逼近定理,任意受限区间内的连续函数可由一个多项式函数无限逼近。该方法将时变信号的瞬时频率或相位利用一个有限阶的多项式模型来逼近,然后估计出该多项式的各阶系数,再重构出瞬时频率或相位作为估计值。该方法的特点是可以利用信号一定的先验知识,当已知信号的瞬时频率是缓变的时候,可以用一个低阶的多项式来拟合,而当

信号频率变化较快的时候,则可以采用一个高阶的多项式,这样可以有效地降低估计方差<sup>[2]</sup>。

对于高斯噪声环境中的多项式相位信号(Polynomial-Phase Signal, PPS)的参数估计问题,也已经有许多文献加以论述<sup>[3,4]</sup>。其中由 Peleg 提出的基于高阶模糊函数(High-order Ambiguity Function, HAF)的方法由于具有计算量小,鲁棒性较好,高信噪比情况下能获得接近克拉美-罗界(Cramer-Rao Bound, CRB)的估计性能,因此获得了相当的重视<sup>[5]</sup>。而后 Barbarossa 又提出了乘积高阶模糊函数(Product High-order Ambiguity Function, PHAF)的方法,有效地解决了多分量 PPS 情况下参数估计的模糊问题<sup>[6]</sup>。

然而,大多数时变信号的相位都是非多项式的,利用一

个低阶的多项式相位模型来逼近该信号某一区间内的数据采样,在估计方差之外还存在着建模误差。关于非多项式相位情况下利用多项式相位信号进行建模的瞬时频率和瞬时相位估计精度,文献[7]中也已有讨论。但是在利用 HAF 进行分段的多项式相位建模过程中,会面临数据段中采样较少(即短序列)和非多项式相位的问题,这二者均会对基于高阶模糊函数方法的估计性能产生影响,而对于这种影响,目前尚未加以系统论述。

利用高阶模糊函数的多项式相位建模方法已经广泛地应用于通信和雷达领域中<sup>[8-10]</sup>。本文就分段多项式相位建模的估计精度问题进行了分析。在第2节中对高斯白噪声环境下多项式相位建模的精度进行了讨论,并分析了分段方案对估计精度的影响。第3节给出了利用高阶模糊函数和乘积高阶模糊函数来估计多项式相位信号参数的方法。相关的仿真结果及性能分析见第4节,最后给出了结论。

## 2 多项式相位建模

本文中所采用的离散时变信号  $x(n)$  定义为

$$x(n) = b(n)e^{j\phi(n)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

此处  $b(n)$  为信号幅度,  $\phi(n)$  为时变信号的相位,  $N$  是采样点数。当  $\phi(n)$  在采样数  $N$  所对应的的时间区段内变化较快时,用一个定阶多项式对  $\phi(n)$  进行建模所需的阶数将会很大,而这对于下述的基于 HAF 的估计算法而言是相当不利的。因此,我们引入了分段的概念,将原序列分为  $P$  段,则每段长度为  $N/P$ 。这样就可以用下列一个多项式相位信号的模型对这个分段后的序列进行建模:

$$x_i(n) = b_i(n)e^{j\phi_i(n)} = b_i(n) \exp \left\{ j \left( \sum_{m=0}^{M_i} a_{i,m} (n\Delta)^m \right) \right\}, \quad 1 \leq i \leq P, \quad 0 \leq n \leq N/P-1 \quad (2)$$

这里  $\Delta$  是采样间隔,  $M_i$  为第  $i$  个数据段的多项式建模阶数,而多项式系数  $a_{i,m}$  为实数。简单起见且不失一般性,我们令  $b_i(n) = b_{i,0}$  并且  $M_i = M$ ,  $1 \leq i \leq P$ , 这样每个数据段都可以用一个  $M$  阶的恒幅度多项式相位模型来近似。估计整个时变信号的瞬时相位就转化成为估计各数据段的多项式相位模型各阶系数的问题。

高斯白噪声环境下一般相位(非严格多项式相位)情况的估计精度可由下式给出<sup>[7]</sup>

$$\text{var}(\phi(n)) = \frac{1}{N \cdot \text{SNR}} \Psi_M \left( \frac{2n}{N} \right) + \frac{1}{(N \cdot \text{SNR})^2} \xi_M \left( \frac{2n}{N} \right) \quad (3)$$

这里  $\Psi_M(*)$  与  $\xi_M(*)$  为文献[7]中定义的积分函数,其中  $\Psi_M(*)$  对应的项是噪声环境下 PPS 的估计方差,而  $\xi_M(*)$  对应的项是利用  $M$  阶 PPS 在给定区间内建模一般相位信号的

建模误差, SNR 为信噪比。由二者前面的系数可知,当采样点数和 SNR 均足够大时,建模误差相对于估计方差而言可忽略,此时采用多项式建模的效果较好。

然而,在分段的 PPS 相位建模方法中,各分段数据的采样点数和 SNR 均不能满足上述要求,因此需要考虑建模误差。在实际应用中,整个估计方法的核心思想和分段策略可以用下述步骤来描述:

(1) 首先对时变信号进行分段,段长度,数目和数据重用率(overlap rate)由信号实际情况所决定,原则上相位缓变的信号部分可采用长序列,少段数和低重用率的方案,关于分段效率在文献[10]中有所论述。

(2) 对分段后的数据选取适当的 PPS 建模阶数  $M_i$ ,  $M_i$  由信噪比、段内相位变化速率(相位加速度)以及计算量所决定。如前所述段内相位加速度越大,  $M_i$  应越大,而  $M_i$  越大, SNR 和计算量的要求越大。

(3) 采用合适的参数估计方法估计出各数据段的 PPS 各阶参数。方法的选择需要考虑计算量、PPS 模型阶数  $M_i$  以及 SNR 等因素。

(4) 对估计出的各段瞬时相位进行综合,得到一个完整的时变信号相位估计。这里涉及到数据重用情况下重用数据对应相位的平滑,以及估计相位的相位解绕(unwrap phase)问题。

已经有多种参数估计方法可用于上述步骤(3)中。其中,极大似然(ML)法和最小二乘(MLS)法,均需要求解一个多维极值问题,计算量巨大。因此本文引入了基于 HAF 和 PHAF 的 PPS 参数估计方法,可将  $N$  维上的最优搜索映射为  $N$  个一维搜索,极大地降低了计算量,在高 SNR 和长序列的情况下,可获得接近于 CRB(即 ML 方法)的估计性能。

## 3 高阶模糊函数与乘积高阶模糊函数

HAF 是一种有效地分析 PPS 的参量工具。 $M$  阶 HAF 定义为  $M$  阶高阶瞬时矩(High-order Instantaneous Moment, HIM)的离散傅里叶变换,而此处 HIM 定义为<sup>[5]</sup>

$$\text{HIM}_M(s(n); \tau) = \prod_{k=0}^{M-1} \left[ s^{(*)k}(n - k\tau) \right]^{\binom{M-1}{k}} \quad (4)$$

这里

$$s^{(*)k}(n) = \begin{cases} s(n), & k \text{ 为偶数} \\ s^*(n), & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5)$$

而式(4)中的  $(\bullet)$  代表组合操作。 $\tau$  被称为延迟参数,根据不同的 HIM 定义(单 lag 或多 lag)<sup>[5]</sup>,可取一个单一的整数值或为一个  $M-1$  维的矢量。在  $s(n)$  为标准的  $M$  阶恒幅度 PPS 时,

$$s(n) = b_0 \exp \left\{ j \left( \sum_{m=0}^M a_m \cdot (n\Delta)^m \right) \right\}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

其中  $\Delta$  为采样间隔。因此  $M$  阶 HAF 可表示为

$$\text{HAF}_M(s(n); \omega, \tau) = \sum_{n=(M-1)\tau}^{N-1} \text{HIM}_M(s(n); \tau) e^{-j\omega n \Delta} \quad (7)$$

而  $s(n)$  的  $M$  阶多项式相位系数可由下式估计出

$$\hat{a}_M = \frac{1}{M!(\tau\Delta)^{M-1}} \arg \max_{\omega} |\text{HAF}_M(s(n); \omega, \tau)| \quad (8)$$

这里利用了 HIM 算子的一个性质, 即  $M$  阶 HIM 可将同阶的 PPS 信号变换成单频信号, 而变换后的频率与 PPS 的最高阶 (第  $M$  阶) 系数有关。再用  $\exp(-j\hat{a}_M \cdot (n\Delta)^M)$  乘上  $s(n)$ , 可将相位的阶数降低一阶, 从而得到一个  $M-1$  阶的 PPS  $s^{(1)}(n)$ , 这里  $s^{(i)}(n)$  定义为经过第  $i$  次降阶后的信号。然后令  $M = M-1$ , 重复上述同样的估计过程直至阶数为 1, 这样所有低阶的相位多项式系数均可估计出来。

在这一降阶迭代估计过程之后, 零阶多项式相位系数  $a_0$  和幅度  $b_0$  的估计可由极大似然(ML)估计方法给出

$$\hat{a}_0 = \text{phase} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} s^{(M-1)}(n) \right\} \quad (9)$$

以及

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} s^{(M-1)}(n) \right| \quad (10)$$

其中  $\text{phase}$  为求相位操作。

上面提出的算法相对于最优的 ML 方法而言是次最优的, 但是却易于实现并且对多普勒平移, 时延偏移 和多径这些现象提供了一定的抑制能力。

为了解决多分量 PPS 参数估计中的模糊问题, Barbarossa 等人提出了 HAF 的改进方法<sup>[6]</sup>。该方法被称为 PHAF 法, 利用了 HAF 谱谱峰与延迟参数  $\tau$  之间的依赖关系, 采用不同的延迟参数集来获得多个 HAF 谱, 然后对获得的谱所对应的延迟参数进行缩放(scaling), 然后将缩放后的多个谱相乘, 从而达到抑制多分量信号情况下的交叉项的目的。

PHAF 在传统的 HAF 方法的式(7)与式(8)之间加入了下式以形成 PHAF 谱,

$$\text{PHAF}_M^L(s(n); \omega, \tau^L) = \prod_{l=1}^L \text{HAF}_M \left( s(n); \frac{\prod_{k=1}^{M-1} \tau_k^{(l)}}{\prod_{k=1}^{M-1} \tau_k^{(l)}} \omega, \tau_{M-1}^l \right) \quad (11)$$

余下步骤除式(8)中用 PHAF 谱代替 HAF 谱外皆相同。

## 4 仿真结果

图 1 中给出了短序列条件下  $M=3$  时的 HAF 谱和 PHAF 谱( $L=3$ )。这里仿真所采用的信号为式(1)中定义的 PPS 信号, 短序列条件下的序列长度  $N$  为 32 点, 信噪比设为 5dB, 采用补零 FFT 来获得 HAF 谱, FFT 长度为 4096。本仿真中利用了多 lag 的定义, 因而 HAF 方法所用的延迟参数

$\tau = [9 \ 12]$ , 而 PHAF( $L=3$ )方法所用的延迟参数集为  $\tau = [9 \ 12; 6 \ 18; 4 \ 27]$ 。图 1 中的横坐标表示经过式(8)变换后的  $\hat{a}_3$  值, 也就是最大值所对应的横坐标值为估计的  $\hat{a}_3$  值。

值得注意的是, 对数据进行 HIM 操作会使得有效数据点数减少。例如, 对上述例子中的数据序列用延迟参数  $\tau$  进行一次 HIM 操作后的有效数据点只有 20 个点, 其余点全是零, 而 2 次 HIM 操作后的有效数据点仅剩 11 个, 这也是为什么从 HAF 谱上得到的分辨率较低的原因, 而短序列条件加剧了分辨率的下降。从得到的谱上我们可以看出, 在较低信噪比的条件下( $<10\text{dB}$ )和短序列的条件下, 对于 3 阶 PPS 的最高阶系数  $a_3$  的估计, PHAF 方法明显优于 HAF 方法, 在图 1(a)中次高的谱峰距最高谱峰相差不到 2dB, 极易造成伪峰的出现。

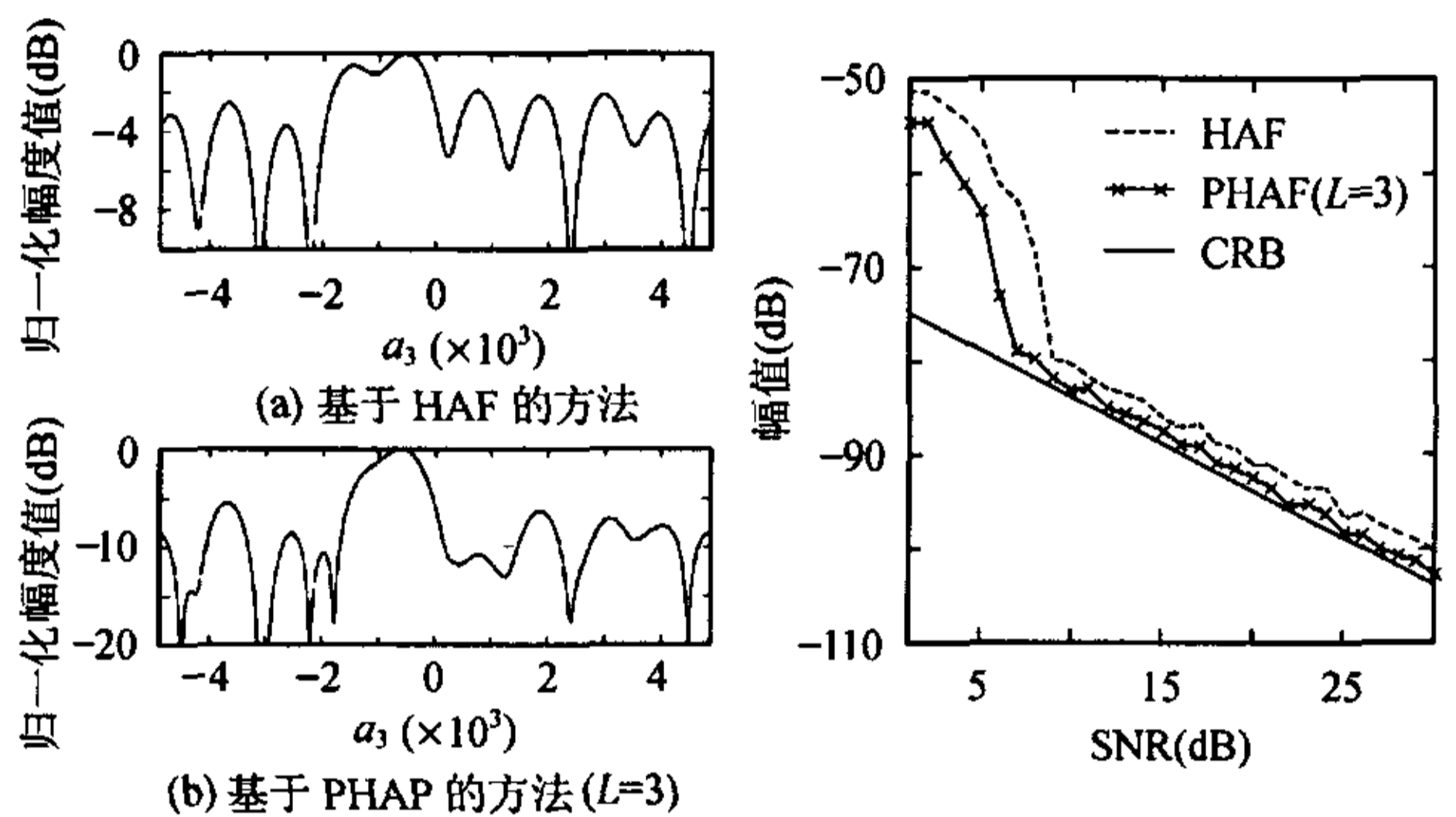


图 1 归一化 HAF 谱比较

图 2  $M=3$  时 PPS 最高阶系数的估计精度

关于两种方法在短序列条件下的统计性能比较, 如图 2 所示。仿真中所用参数与图 1 的相同, 独立产生背景噪声, 执行 200 次 Monte-Carlo 实验。图 2 中的实线给出的是 CRB 对应信噪比变化的曲线, CRB 的计算由下式给出<sup>[5]</sup>

$$\text{CRB}\{\hat{a}_M\} \geq \frac{(2M+1) \binom{2M}{M}^2}{2N^{(2M+1)} \Delta^{2M}} \cdot \frac{1}{\text{SNR}} \quad (12)$$

这里  $\binom{\cdot}{\cdot}$  代表组合运算。虚线所示为 HAF 方法所能获得的估计精度, 可以发现其信噪比门限为 9dB 左右, 亦即当信噪比小于 9dB 时, 该方法的估计性能下降严重。‘x’ 标记的实线为 PHAF ( $L=3$ ) 方法所能获得的估计精度, 与 HAF 方法比较来看, 信噪比门限下降 2dB 左右, 这在低信噪比情况下非常有利。在高信噪比的情况下, PHAF( $L=3$ )方法的估计精度也比 HAF 方法好 2~4dB。总的来说, 在短序列条件下, 采用 PHAF 方法能够实现比 HAF 方法更好的估计性能。

上面两个例子讨论的是短序列 PPS 条件下的最高阶系数的估计结果, 接下来介绍的是一般相位信号 (非 PPS) 的多项式建模和参数估计精度。

图 3 给出了短序列条件下 ( $N=32$ ) 相位缓变信号的多项

式相位建模精度, 该信号采用正弦相位模型, 利用一个3阶的PPS对其进行建模, 然后分别采用HAF和PHAF( $L=3$ )的方法进行参数估计。图3中两条虚线均为PHAF( $L=3$ )的估计精度, 信噪比分别为10dB(上方)和30dB(下方); 4条实线均为HAF方法的估计结果, 对应的信噪比从上至下分别为5dB, 10dB, 20dB和30dB。从图中可以看出, 虽然在短序列条件下对PPS信号参数估计, PHAF( $L=3$ )方法要好过HAF方法, 但是对于非PPS情况的瞬时相位估计精度而言, PHAF( $L=3$ )方法不如HAF方法。PHAF的缺点突出体现在平均估计精度不高, 数据段两端的相位估计尤其不准, 而这些对于分段建模后的相位综合过程是极其不利的。因此, 从分段多项式相位建模的角度而言, HAF方法要优于PHAF方法。

图4给出了一个长序列的正弦相位信号利用多项式分段建模后的瞬时相位估计结果, 实线表示信号的实际相位, 虚线为采用分段建模方法估计出的相位。估计采用的是基于HAF的方法, 信噪比为10dB, 采样点数为128点, 每段长度为16个采样点, 数据重用率为93.75%, 即数据窗每次滑过一个采样, 总分段数为113。这里采用滑动窗的用意在于平滑各分段的相位估计值, 并且能够跟踪较快的相位变化, 在本实验中的数据重用率条件下, 每个采样点有16个估计值, 而最终的估计值取其平均值。最后的15个采样点瞬时相位估计值也由前面分段所估计值平均得到。从图中给出的结果可以看出, 分段建模的方法由于采用了有效的分段策略, 能够跟踪相位变化较快的时变信号, 并且获得较好的估计精度。

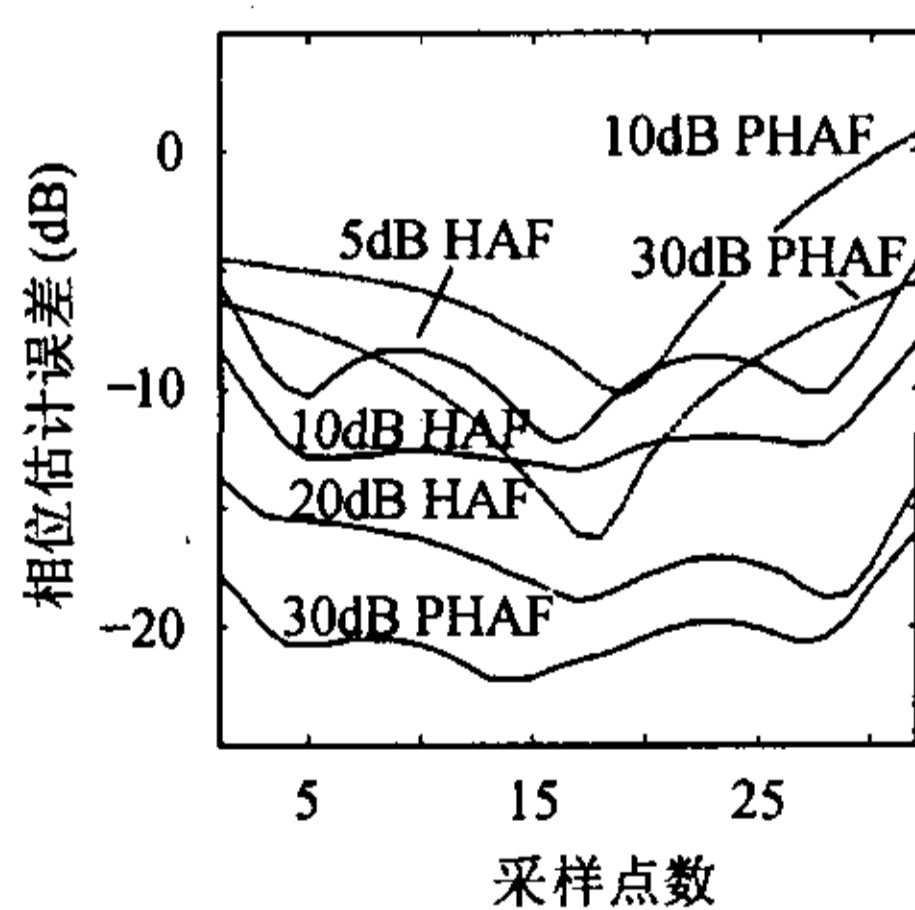


图3 分段多项式相位建模结果

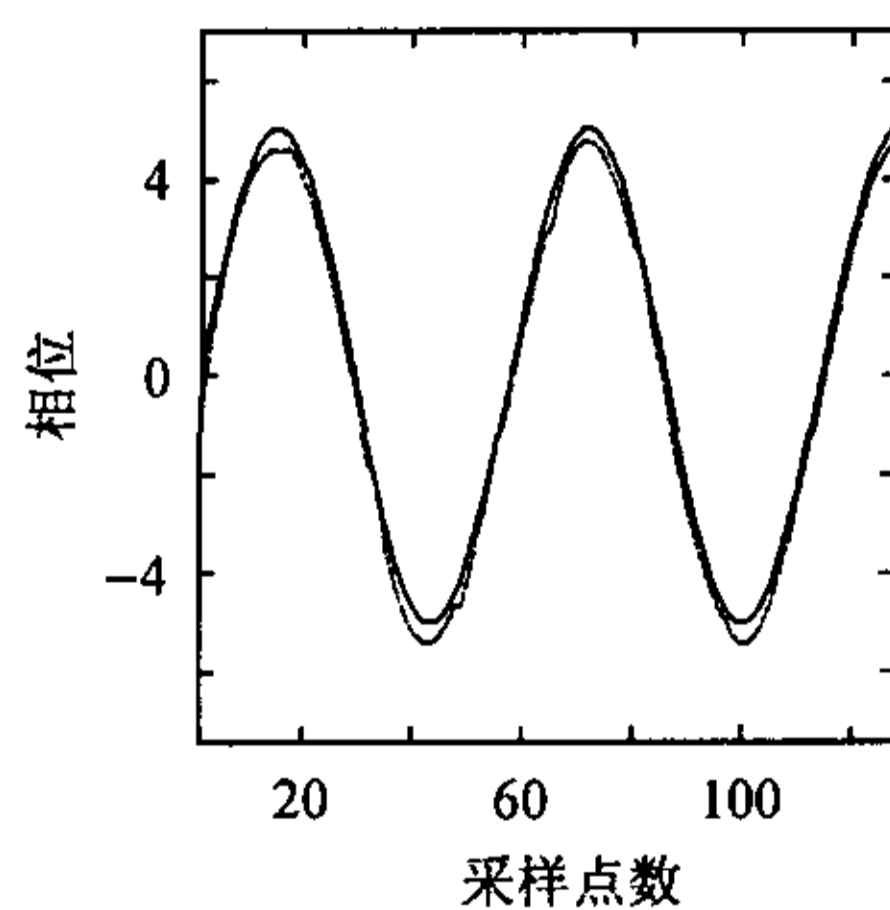


图4 一般相位信号的多项式相位建模精度

## 5 结束语

本文着重分析了短序列条件下基于HAF和PHAF的PPS参数估计算法的性能, 讨论了他们对分段多项式建模这一瞬时相位估计方案的影响, 比较了两种算法的表现。通过仿真实验说明, 在PPS参数估计上, 基于PHAF的方法要略优于

基于HAF的方法, 而在建模误差不可忽略情况下(即明显的非多项式相位)的短序列相位估计, 基于HAF的算法表现更好。总的说来, 基于HAF的算法具有更好的鲁棒性。

## 参考文献

- [1] Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 1: Fundamentals[J]. *Proc. IEEE*, 1992, 80(4): 520 - 538.
- [2] Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 2: Algorithms and applications[J]. *Proc. IEEE*, 1992, 80(4): 540 - 568.
- [3] Peleg S, Porat B. Estimation and classification of polynomial-phase signals[J]. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1991, 37(2): 422 - 430.
- [4] Peleg S, Porat B. The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase[J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1991, 39(3): 749 - 752.
- [5] Peleg S, Friedlander B. The discrete polynomial-phase transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1995, 43(8): 1901 - 1914.
- [6] Barbarossa S, Scaglione A, Giannakis G B. Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling[J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1998, 46(3): 691 - 708.
- [7] Peleg S, Porat B, Friedlander B. The achievable accuracy in estimating the instantaneous phase and frequency of a constant amplitude signal[J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 1995, 41(6): 2216 - 2224.
- [8] Barbarossa S, Scaglione A. Autofocusing of SAR images based on the product high-order ambiguity function[J]. *IEE Proc.-Radar, Sonar and Navig.*, 1998, 145(5): 269 - 273.
- [9] Barbarossa S, Scaglione A. Demodulation of CPM signals using piecewise polynomial-phase modeling[C]. *Proc. of ICASSP '98*, Seattle, WA, USA: [s.n.], 1998: 3281 - 3284.
- [10] Lu Kun, Wang Jiong, Liu Xingzhao. A piecewise parametric method based on polynomial phase model to compensate ionospheric phase contamination[C]. *Proc. of ICASSP '03*, HongKong, China: [s.n.], 2003: 406 - 409.

卢琨: 男, 1977年生, 博士生, 主要研究方向为高频天波雷达信号处理。

刘兴钊: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 毕业于日本德岛大学, 主要研究方向为高频雷达和SAR信号处理。