

实测大气模型下雷达定位公式的解析式 兼论有效地球半径

韩文俊 张喜镇

(中国科学院国家天文台 北京 100012)

摘要: 实测大气模型, 只能用多个线性成层大气模型的总和来代表。据此导出了实测大气模型下, 目标视在距离的精确解析求和式。从而当初始视在仰角为零时, 可得到目标视在距离的精确解。该文指出, 使用中值近似是获取大气折射精确解的一种途径, 而且通过积分中值近似可导出有效地球半径。对有效地球半径的推导方法和应用进行了讨论。

关键词: 大气折射, 视在距离, 有效地球半径, 雷达定位

中图分类号: TN953 文献标识码: A 文章编号: 1009-5896(2005)02-0269-05

Analytical Formulae of Radar Location for Measured Atmospheric Model with Discussion on Effective Earth Radius

Han Wen-jun Zhang Xi-zhen

(National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China)

Abstract The measured atmospheric model can only be represented as sum of spherical linear stratified models. Then the formula of apparent range of target is derived as sum of analytical expressions. When the initial elevation angle equals zero, therefore the accurate solution of apparent range of target can be obtained. It is indicated in this paper that effective earth radius can be introduced by using median value approximation of integration, which is also an effective technique to obtain accurate solution of atmospheric effects on radio wave propagation. Application of effective earth radius and methods to derive it are discussed.

Key words Atmospheric refraction, Apparent range of target, Effective earth radius, Radar location

1 前言

雷达定位中的大气效应是一实用问题, 但在实测大气模型下, 以有效地球半径为函数, 精度与数值积分相同的解析解, 尚未见到。

大气模型, 即折射指数随空间分布, 同一时间很难准确测到三维数据, 历史资料, 更是空白。工程应用, 一般是用一维, 最多用到二维, 与射线面垂直方向的大气效应, 可忽略不计。

雷达定位中的两个基本公式是目标的视在距离(R_l)和它的地面距离(D)。在球面成层大气模型下, 应用极坐标 Snell 定律不难得到^[1,2] (参照图 1)

$$R_l = \int_0^{S_0} n ds = \int_0^{H_0} \frac{n}{\sin \theta} dh$$
$$= \int_0^{H_0} \frac{n^2(r_0 + h_0 + h)}{\sqrt{n^2(r_0 + h_0 + h)^2 - n_0^2(r_0 + h_0)^2 \cos^2 \theta_0}} dh \quad (1)$$

$$D = \int_0^{H_0} \frac{(r_0 + h_0) \text{ctg} \theta}{(r_0 + h_0 + h)} dh$$
$$= \int_0^{H_0} \frac{\cos \theta_0 n_0 (r_0 + h_0)^2}{(r_0 + h_0 + h) \sqrt{n^2(r_0 + h_0 + h)^2 - n_0^2(r_0 + h_0)^2 \cos^2 \theta_0}} dh \quad (2)$$

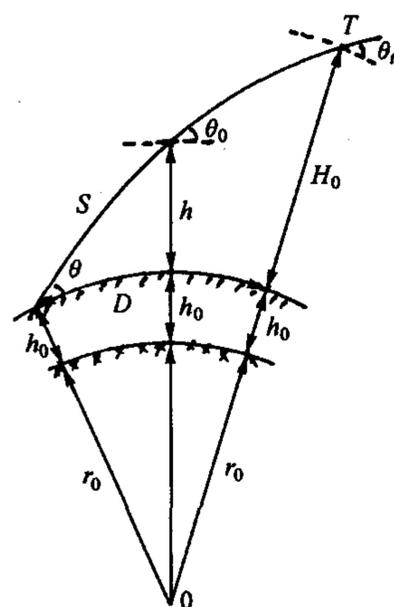


图1 射线的几何关系

式中, h_0 和 H_0 分别为地面的海拔高度和目标的地面高度, r_0 为地球半径, θ_0 为射线的初始仰角, n 和 n_0 为大气折射指数和地面折射指数, S_0 为到目标的射线长, s , h 和 θ 分别为射线长, 射线高和射线仰角。

实测大气模型下, 一般说来, 式(1)的解有二, 一为根据实测值, 进行统计, 把式(1)表为一个经验公式^[3-5], 再一个就是根据实测大气模型, 利用式(1), 进行数值积分求解, 也就是射线描迹法。不难看出, 当 $\theta_0 = 0$ 时, 式(1)的被积函数在 $h=0$ 处有奇点, 也就是说, 当 $\theta_0 = 0$ 时, 直接利用式(1)是不可能的。对于空载雷达, 如遥感卫星雷达, 全球定位系统, $\theta_0 = 0$ 的情况, 实际上是存在的。

实测大气模型可看为多个线性球面成层大气模型的总和, 正是这一众所周知的概念, 奠定了本文求得精确解析解(或说解析求和解)的基础。

2 雷达定位公式的解析式

如前所述, 实测大气模型可看为多个球面线性成层大气模型的总和, 因此下面的讨论仅限于一个线性层, 总的效应, 求和即可。

2.1 射线方程

大气模型和 Snell 定律如下:

$$n = n_0 + C_0 \times 10^{-6} h \quad (3)$$

$$n(r_0 + h_0 + h) \cos \theta = n_0(r_0 + h_0) \cos \theta_0 \quad (4)$$

其中 C_0 (N 单位/km) 为折射指数随高变化率。

根据式(3), (4)可得射线方程为

$$[1 + (h/a_0(h))] \cos \theta = \cos \theta_0 \quad (5)$$

其中 $a_0(h)$ 为一变参数, 应表为

$$\frac{1}{a_0(h)} = \frac{1}{r_0 + h_0} + \frac{C_0 \times 10^{-6}}{n_0} \left(1 + \frac{h}{r_0 + h_0} \right) \quad (6)$$

因为, $\frac{h}{r_0 + h_0} \ll 1$, (在应用范围内), 则

$$\frac{1}{a_0(h)} = \frac{1}{a_0(\bar{h})} = \frac{1}{r_0 + h_0} + \frac{C_0 \times 10^{-6}}{n_0} \left(1 + \frac{\bar{h}}{r_0 + h_0} \right) \quad (7)$$

其中, \bar{h} 为层厚的平均值。

不难看出, $a_0(\bar{h})$ 正是大家熟知的有效地球半径, 文献[6]曾指出, $a_0(h)$ 是式(5)的一个变参数, $a_0(\bar{h})$ 是有效地球半径, 弯曲的射线变为直线。下面将讨论二者的关系。

2.2 射线长(S)与射线高(h)的关系

据式(5), 弯曲的射线长(S)应表为

$$S = \int_0^h \frac{1}{\sin \theta} dh \int_0^h \frac{(1 + h/a_0(h))}{\sqrt{(1 + h/a_0(h))^2 - \cos^2 \theta_0}} dh$$

利用中值近似, 令 $a_0(h) \approx a_0(\bar{h})$, 则

$$S = \int_0^h \frac{(1 + h/a_0(\bar{h}))}{\sqrt{(1 + h/a_0(\bar{h}))^2 - \cos^2 \theta_0}} dh = \sqrt{(a_0(\bar{h}) + h)^2 - a_0^2(\bar{h}) \cos^2 \theta_0} - a_0(\bar{h}) \sin \theta_0 \quad (8a)$$

或者

$$h = \sqrt{(S + a_0(\bar{h}) \sin \theta_0)^2 + a_0^2(\bar{h}) \cos^2 \theta_0} - a_0(\bar{h}) \quad (8b)$$

因为 $a_0(\bar{h})$ 可看为有效地球半径, 则弯曲的射线 S 可看为直线。据图 2, 从几何关系, 同样可得到式(8a)或式(8b)。

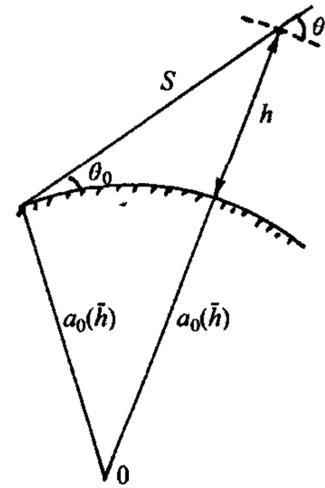


图 2 等效地球的射线关系

从上面的推导可知, 引出有效地球半径 $a_0(\bar{h})$ 来源于应用积分中值近似 $a_0(h) \approx a_0(\bar{h})$ 。

式(8a)的左边是弯曲的射线长, 其右边是直线的射线长, 令二者相等, 则得到有效地球半径 $a_0(\bar{h})$, 这正是文献[7]求取有效地球半径的思路。

在此顺便指出, 如果等效前后保持射线的仰角(θ)和射线的地面高(h)均不变, 同样可得到有效地球半径 $a_0(\bar{h})$, 从射线方程式(5), 不难证明此结论。式(5)描述等效前射线的几何关系, 等效后, 据图 2, 保持 θ_0 、 θ 和 h 与等效前相同, 应用正弦定理, 同样可得到式(5), 只不过, 把式(5)中的 $a_0(h)$ 换为 $a_0(\bar{h})$ 而已。这就是上面的结论。

2.3 解析表达式

根据式(1)、(3)、(5), 目标的视在距离应表为

$$R_t = \int_0^{H_0} \frac{n}{\sin \theta} dh \int_0^{H_0} \frac{(n_0 + C_0 \times 10^{-6} h)(1 + h/a_0(h))}{\sqrt{(1 + h/a_0(h))^2 - \cos^2 \theta_0}} dh \quad (9a)$$

利用中值近似, 令 $a_0(h) = a_0(\bar{h})$, 并变换积分变数, 则上式化为

$$R_t = \int_{u_1}^{u_2} \frac{[n_0 + C_0 \times 10^{-6} (u-1)a_0(\bar{h})] a_0(\bar{h}) u}{\sqrt{u^2 - \cos^2 \theta_0}} du$$

$$= a_0(\bar{h}) \left\{ n_0 \left[\sqrt{A^2 - \cos^2 \theta_0} - \sin \theta_0 \right] + \frac{C_0 \times 10^{-6}}{2} a_0(\bar{h}) \left[\sin \theta_0 + (A-2) \sqrt{A^2 - \cos^2 \theta_0} + \cos^2 \theta_0 \ln(A + \sqrt{A^2 - \cos^2 \theta_0}) / (1 + \sin \theta_0) \right] \right\} \quad (9b)$$

其中 $A = 1 + [H_0 / a_0(\bar{h})]$ 。

R_l 的另一种解法, 即沿高度的积分改为沿射线的积分。此时, 应首先引出有效地球半径 $a_0(\bar{h})$, 如前所述, 根据图 2 的几何关系, 可得到射线高(h)与射线长(S)的关系式(8b), 代入到式(3), 从而有

$$R_l = \int_0^{S_0} n ds = \int_0^{S_0} \left\{ n_0 + C_0 \times 10^{-6} \times \left[\sqrt{(S + a_0(\bar{h}) \sin \theta_0)^2 + a_0^2(\bar{h}) \cos^2 \theta_0} - a_0(\bar{h}) \right] \right\} ds$$

$$= S_0 \left\{ n_0 - C_0 \times 10^{-6} a_0(\bar{h}) \right\} + \frac{C_0 \times 10^{-6}}{2} a_0^2(\bar{h}) \times \left\{ \left(S_0 / a_0(\bar{h}) + \sin \theta_0 \right) \sqrt{\left(S_0 / a_0(\bar{h}) + \sin \theta_0 \right)^2 + \cos^2 \theta_0} - \sin \theta_0 + \cos^2 \theta_0 \times \ln \left[S_0 / a_0(\bar{h}) + \sin \theta_0 + \sqrt{\left(S_0 / a_0(\bar{h}) + \sin \theta_0 \right)^2 + \cos^2 \theta_0} / (1 + \sin \theta_0) \right] \right\} \quad (10)$$

应用式(8a), 把式(10)中的 S_0 换为 H_0 , 则式(10)与式(9b)完全相同。这就是说, 引出有效地球半径得到的 R_l (式 10) 与应用中值近似得到的 R_l (式(9b))是相同的。据式(2)和式(5), 目标的地面距离可表为

$$D = \int_0^{H_0} \frac{(r_0 + h_0) \operatorname{ctg} \theta}{(r_0 + h_0 + h)} dh$$

$$= \int_0^{H_0} \frac{\cos \theta_0}{\left(1 + \frac{h}{r_0 + h_0} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{h}{a_0(h)} \right)^2 - \cos^2 \theta_0}} dh \quad (11a)$$

与处理式(9a)的方法相同, 应用中值近似 $a_0(h) \approx a_0(\bar{h})$, $1 + h / (r_0 + h_0) \approx 1 + \bar{h} / (r_0 + h_0)$, 从而上式化为

$$D \approx \int_{u_1}^{u_2} \frac{a_0(\bar{h}) \cos \theta_0 \left[1 - (u-1) a_0(\bar{h}) / (r_0 + h_0) \right]}{\sqrt{u^2 - \cos^2 \theta_0}} du$$

$$= \frac{(r_0 + h_0) a_0(\bar{h}) \cos \theta_0}{r_0 + h_0 + \bar{h}} \cdot \ln \frac{A + \sqrt{A^2 - \cos^2 \theta_0}}{1 + \sin \theta_0} \quad (11b)$$

2.4 解析表达式的精度分析

式(9b)和式(11b)的精度, 决定于 $a_0(\bar{h})$ 中的层厚 h , 也就

是式(1)和式(2)积分的步长。把层厚为 H_0 的大气层分为多个(整数倍)层厚为 Δ 的薄层, 则每个薄层的折射指数变化率均相同, 但每个薄层层底的折射指数不同, 每个薄层的初始仰角也不相同, 从而有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_{0i}} &= \frac{1}{r_0 + h_0 + (i-1)\Delta} \\ &+ \frac{C_0 \times 10^{-6}}{n_0 + C_0 \times 10^{-6} (i-1)\Delta} \left(1 + \frac{0.5\Delta}{r_0 + h_0 + (i-1)\Delta} \right) \\ \theta_i &= \cos^{-1} \left\{ \frac{n_0 (r_0 + h_0) \cos \theta_0}{[n_0 + C_0 \times 10^{-6} (i-1)\Delta] [r_0 + h_0 + (i-1)\Delta]} \right\} \\ A_i &= 1 + \frac{\Delta}{a_{0i}}, \text{ 并令 } B_i = \ln \frac{A_i + \sqrt{A_i^2 - \cos^2 \theta_i}}{1 + \sin \theta_i} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

因此, 我们有

$$\left. \begin{aligned} R_l &= \sum_{i=1}^{H_0/\Delta} R_{li} \\ R_{li} &= a_{0i} \left\{ [n_0 + C_0 \times 10^{-6} (i-1)\Delta] \left[\sqrt{A_i^2 - \cos^2 \theta_i} - \sin \theta_i \right] + \frac{C_0 \times 10^{-6}}{2} a_{0i} \left[\sin \theta_i + (A_i - 2) \sqrt{A_i^2 - \cos^2 \theta_i} + \cos^2 \theta_i B_i \right] \right\} \\ D &= \sum_{i=1}^{H_0/\Delta} D_i \\ D_i &= \left(\frac{r_0 + h_0}{r_0 + h_0 + 0.5\Delta} \right) a_{0i} \cos \theta_i \ln \frac{A_i + \sqrt{A_i^2 - \cos^2 \theta_i}}{1 + \sin \theta_i} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

取 $H_0=1\text{km}$, 大气模型(n_0, C_0)取为(1.00031, -40), θ_0 取为 0 和 $\pi/18$ 两种, $r_0=6375\text{km}$, $h_0=0.05\text{km}$, 层厚 Δ (km) 取为, $10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-1}$, 根据上列参数, 用式(1)和式(13)进行计算, 结果列于表 1。根据此表, 比较式(1)和式(13)的计算精度。

层厚 Δ 愈小, R_l 的计算精度愈高, Δ 也是式(1)的积分步长, 或式(13)的求和步长。当 $\theta_0 = \pi/18$ 时, 据表 1, R_l 的精确值取为 5.750km, 此时, 式(1)所需的积分步长和式(13)所需的求和步长, 基本上相同的。但当 $\theta_0 = 0$ 时, 据表 1 和 2, R_l 的精确值取为 130.858km, 此时, 式(13)所需的求和步长为 10^{-1} km , 式(1)所需的积分步长为 5×10^{-10} , 这就是说, 相同精度要求下, 式(13)的求和步长是式(1)的积分步长的 2×10^8 倍。

2.5 对式(9b)和式(10)的物理解释

前面导出的视在距离表达式是有效地球半径和初始仰角的函数, 直接讨论式(9b)、式(10)较困难。但在 $\theta_0 = 0$ 或 $\pi/2$ 时, 物理概念则一目了然。

表1 R_l 的计算结果 (km)

Δ (km)	$\theta_0=0$		$\theta_0=\pi/18$	
	式(1)	式(13)	式(1)	式(13)
10^{-3}	129.606862	130.858397	5.74965641	5.74965641
2×10^{-3}	129.088462	130.858397	5.74965641	5.74965641
5×10^{-3}	128.059911	130.858397	5.74965641	5.74965641
10^{-2}	126.900828	130.858398	5.74965641	5.74965641
10^{-1}	118.356658	130.858411	5.74965630	5.74965641
5×10^{-1}	103.205530	130.858587	5.74965377	5.74965638

表2 $\theta_0=0$ 时, 式(1)的 R_l 的计算结果 (km)[即表1的 Δ 列和 $\theta_0=0$ 式(1)列的向上延伸]

Δ (km)	10^{-9}	5×10^{-10}	10^{-10}
R_l (km)	130.857145	130.857508	130.858006

注意到, $H_0/a_0(\bar{h}) \ll 1$, $S_0/a_0(\bar{h}) \ll 1$, 并且, 当 $\theta_0=0$ 或 $\pi/2$ 时, 从式(9b)和式(10), 可得到

$$\left. \begin{aligned} R_l(0) &= \sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})} \left[n_0 + C_0 \times 10^{-6} \sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})} / 4 \right] \\ R_l(0) &= S_0 \left[n_0 + C_0 \times 10^{-6} (S_0 / 4) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} R_l(\pi/2) &= H_0 \left[n_0 + C_0 \times 10^{-6} (H_0 / 2) \right] \\ R_l(\pi/2) &= n_0 S_0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

视在距离可近似地表为射线长与平均折射指数的乘积; 当 $\theta_0=0$, $S_0 = \sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})}$, 平均折射指数取在离射线始点的 1/4 处; 当 $\theta_0=\pi/2$ 时, $S_0=H_0$, 平均折射指数取在射线长的 1/2 处。式(16)的第二式, 与此概念不符合的原因, 是取近似所致, 因为 $\frac{H_0}{a_0(\bar{h})} < \frac{S_0}{a_0(\bar{h})}$ 。

当 $\theta_0=\pi/2$ 时, 射线不弯曲, 平均折射指数取在射线中点; $\theta_0=0$ 时, 射线弯曲, 而且主要体现在低层, 故取在离射线始点的 1/4 处。

3 大气模型测不准, 引起的视在距离误差

在此仅讨论两种情况, 即 $\theta_0=0$ 或 $\pi/2$ 。

首先, 从式(7), 我们有

$$\Delta a_0(\bar{h}) = a_0(\bar{h}) \left[a_0(\bar{h}) / (r_0 + h_0) - 1 \right] \left[\Delta C_0 / C_0 - \Delta n_0 / n_0 \right] \quad (17)$$

因为, $|\Delta n_0 / n_0| \ll |\Delta C_0 / C_0|$, 则 $\Delta a_0(\bar{h})$ 主要来自 ΔC_0 , 与物理概念一致。据式(15)和式(16), 可得到

$$\left. \begin{aligned} \Delta R_l(0) &= \sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})} \left[\Delta n_0 + \frac{\Delta C_0 \times 10^{-6}}{4} \sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})} \right] \\ &\quad + \left[\frac{n_0}{\sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})}} + \frac{C_0 \times 10^{-6}}{2} \right] H_0 \Delta a_0(\bar{h}) \\ \Delta R_l(\pi/2) &= H_0 \left(\Delta n_0 + \frac{H_0}{2} \Delta C_0 \times 10^{-6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Δn_0 的量级是 10^{-6} , ΔC_0 是 1, $\sqrt{2H_0 a_0(\bar{h})}$ 约为 $10 \sim 100$, 因此可知, 当 $\theta_0=0$ 时, $\Delta R_l(0)$ 主要来自 ΔC_0 , 当 $\theta_0=\pi/2$ 时, $\Delta R_l(\pi/2)$ 来自 Δn_0 和 ΔC_0 。

4 结论与讨论

(1) 在实测大气模型下, 本文导出了视在距离的解析式(9b)和求和式(13)。虽然在式(9b)中用了中值近似, 但在式(13)的求和运算中得到补偿, 从而式(13)的精度与射线描述式(1)的精度相同, 二者的唯一不同是式(13)的求和母函数与式(1)的被积函数不同。因此式(13)有其明显优点。当 $\theta_0=0$ 时, 式(13)的母函数不含有式(1)的被积函数的奇点。计算表明, 在标准大气模型下, 层厚取为 1km, R_l 的精度取为米的量级, 式(13)的求和步长是式(1)的积分步长的 2×10^8 倍, 从而可以说式(1)无用。当 $\theta_0 \neq 0$ 时, 对于一般精度要求, 二者无差异。

(2) 本文推导式(8a)时, 用了积分中值近似从而引出有效地球半径。据此可给出一个清晰的物理概念。 $a_0^{-1}(\bar{h})$ 是等效曲率, 其中 C_0/n_0 项表示射线曲率, 可理解为大气的影响, 该项分为两项, 即主要项, 量级为 1, 与高度无关, 和次要项, 量级为 r_0^{-1} , 与高度有关, 引出有效地球半径后, 即 $a_0(\bar{h})$, 等同于把与高度有关的次要影响集中体现于 \bar{h} 的高度上, 这正是相位屏的概念。

(3) 有效地球半径的推导法 在文献[8]中, 推导有效地球半径的思路是: 根据射线方程式(5), 定义有效地球半径为 $a_0(\bar{h})$, 然后以对比法(必要, 但不充分)说明弯曲的射线为直线。另外一些方法, 在此称它们为守恒法, 这些方法的思路是: 首先认为弯曲的射线是直线, 然后分别以等效前后, 射线长、射线仰角和地面高、射线的视在曲率差, 各自保持不变为条件, 从而求得有效地球半径应表为 $a_0(\bar{h})$; 但文献[9]和文献[6], 在文献[8]的基础上, 分别证明了等效前后射线长、射线地面高和仰角以及射线视在曲率差均保持不变; 因此可以说, 守恒法是文献[8]的方法的反演。但守恒法有其优点, 不需要证明弯曲的射线为直线, 而文献[8]的证明不充分。守恒法中射线的视在曲率差守恒法最好^[6], 因为该法的守恒条件可直接从准确的物理概念得到。

(4) 应用有效地球半径的要点和注释 (a) 有效地球半径是在线性球面成层的大气模型下推导出来的, 这就限制了有效地球半径的应用范围, 但实测大气模型可看为众多线性球面成层模型的总和, 从而又扩展了它的应用范围。(b) 处理大气折射问题时, 引出有效地球半径的途径有二, 一是通过式(8b)把高度改为射线长, 二是通过积分中值近似引出有效地球半径, 但此处有一要点, 必须通过射线方程式(5)寻求射线在任意高度处的仰角与初始仰角的关系, 否则, 就难于引出 $a_0(\bar{h})$ 。

参 考 文 献

- [1] 黄捷主编. 电波大气折射误差修正. 北京: 国防工业出版社, 1999: 76, 118.
- [2] 吕保维, 王贞松. 无线电波传播理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2003: 336.
- [3] Altshuler Edward E. Tropospheric range-error corrections for the global positioning system. *IEEE Trans. on AP*, 1998, 46(5): 643 - 649.
- [4] Herring T A. Modeling atmospheric delays in the analysis of space geodetic data. In *Refraction of Transatmospheric Signals in Geodesy*, Proc. of the Symp. Netherlands Geodetic Commission, New series No.36, 1992: 157 - 164.
- [5] Rec. ITU-R P.834-3. Effects of Tropospheric Refraction on Radiowave Propagation, p.4, ITU-R Recommendations, 2001, vol. 2000, P Series - Part 1.
- [6] 韩文俊. 对有效地球半径的诠释. *电波科学学报*, 1998, 13(4): 368 - 370.
- [7] 江长荫. China: Effective Earth Radios, Doc. 3J/E, ITU Radicommunication Study Groups, March, 1998.
- [8] 契尔内依(俄)著, 时振栋译. 无线电波传播. 北京: 电子工业出版社, 1966: 222.
- [9] 谢益溪等. 电波传播——超短波·微波·毫米波. 北京: 电子工业出版社, 1990: 74.

韩文俊: 男, 1923年生, 研究员, 从事电波传播研究工作多年, 现在的研究方向是利用射电天文技术监测空间传播环境.

张喜镇: 男, 1944年生, 研究员, 从事射电天文研究多年, 在射电天文图像、数据处理、电离层不均性对天文图像的影响及减缓方法等方面有较深入的研究, 目前他仍在这些领域内工作.