第 21 卷 第 4 期
1999 年 7 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.21 No.4
July 1999

二阶非均匀带通采样信号的快速恢复 [1]

黄 勇　　肖先赐　　林云松

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

摘 要　本文讨论了实带通信号在二阶非均匀采样下的快速频域搬移、恢复，即用 FFT 方法将实带通信号恢复到两倍带宽 (2B) 内的复解析信号，而幅度和相位保持不变，最后经过简单的运算，得到原始频率．计算机模拟证实了上述方法．

关键词　非均匀采样， FFT， 内插恢复，混叠，频率移动

中图号　TN911.7

1 概 述

带通信号处理广泛应用于通信、雷达等领域，为保留原始信息，前端使用高速 ADC 以观察带内最高频率的 2 倍以上采样，得到大量的数据，而后续处理却跟不上。在监视的带宽是吉赫 (GHz) 数量级，如软件化 GSM 基站 [1] 等，而实际信号可能只有几兆赫 (MHz) 带宽，为使后续处理在实际信号的带宽内进行处理，可采用带通信号的均匀欠采样 [2] 和非均匀采样 [3], 使进入到数字信号处理器的数据量大大减少。二阶非均匀采样是一种有效的降低进入 DSP 的数据量的采样方法，它可以低至实际信号的带宽进行采样，相对于高阶非均匀采样，它有恢复相对较简单的特点。由于二阶采样是以低于奈奎斯特采样率进行的。因此，每一路采样后，谱线是混叠的，需用两路内插函数恢复，其恢复在数字信号处理中是一个多速率信号处理问题，即由其内插恢复函数得到的滤波器是一个时变滤波器，其实现方式之一是用多相结构提高运算的有效性 [4], 本文提出了在不增加很多的采样率下，避免多速率处理问题，而利用离散傅里叶变换对信号进行恢复。

2 二阶非均匀采样和频谱移动下的恢复

对实带通信号的二阶非均匀采样，是以两路时间上有一定延迟的均匀采样流合成的一个非均匀采样流。若带通信号 $d(t)$ 的频谱 $D(f)$ 在 $|f|>f_{U1}$ 和 $|f|<f_{L1}$ 时 $D(f)=0$, 带宽 $B=f_{U1}-f_{L1}$ 。带通信号的通带位置指比值： f_{L1}/B 。则 $d(t)$ 的二阶非均匀采样产生如下两个均匀采样流：

$$d_{2A}(t)=d(t)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-i/F_S), \tag{1a}$$

$$d_{2B}(t)=d(t)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-i/F_S-K_1), \tag{1b}$$

K_1 为第 2 路采样流相对第 1 路采样流的延迟， F_S 是每一路均匀采样流的采样率，由文献

[1] 1997-12-02 收到， 1998-09-26 定稿
电子部预研基金资助项目

[3] 有 $F_S \geq B$ 。其频域表达式：（* 表示卷积）

$$D_{2A}(f) = D(f) * F_S \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(f - iF_S), \tag{2a}$$

$$D_{2B}(f) = D(f) * F_S \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^i \delta(f - iF_S); \tag{2b}$$

$$\alpha = \exp(j2\pi F_S K_1). \tag{3}$$

要恢复原信号需用两个内插函数 $S_0(t)$, $S_1(t)$ 来恢复。其频域表达式为，（参看图 1):

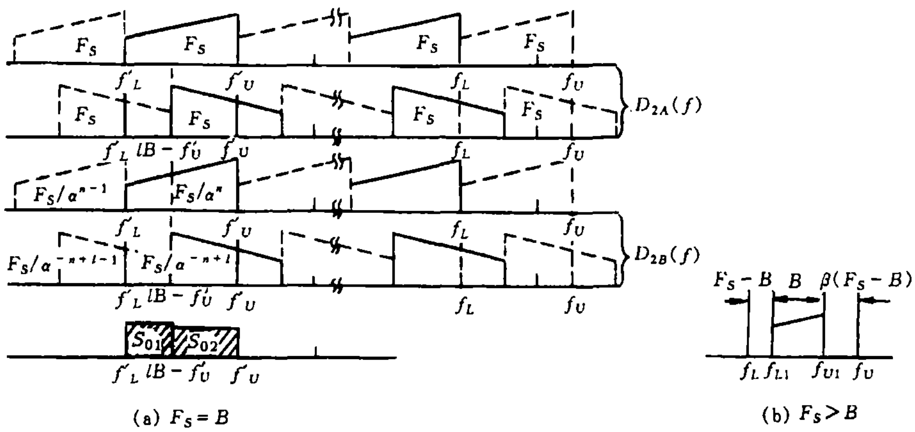

图 1 (a) 二阶采样流的频谱表示．其中 f_L, f_U 是原始频带位置； f'_L 、 f'_U 是频谱移动后的位置．本图中 n 是负整数． (b) 是 $F_S > B$ 时带通单元图

$$S_0(f) = S_{01}(f) + S_{02}(f), \qquad f'_L \leq f \leq f'_U, \tag{4}$$

$$f'_L = f_L + nF_S, \qquad f'_U = f_U + nF_S, \tag{5a}$$

$$f_U = f_{U1} + (1-\beta)(F_S - B), \tag{5b}$$

$$f_L = f_{L1} - \beta(F_s - B); \tag{5c}$$

$$S_1(f) = S_{11}(f) + S_{12}(f), \qquad f'_L \leq f \leq f'_U; \tag{6}$$

$$S_0(f)D_{2A}(f) + S_1(f)D_{2B}(f) = 2D(f + nF_S); \tag{7}$$

且 $f'_L \leq f \leq f'_U$ 如图 1 。由 (7) 式有：

$$F_S S_{01} + F_S S_{11}(f)/\alpha^n = 2, \qquad f'_L \leq f \leq lF_S - f'_U; \tag{8}$$

$$F_S S_{02} + F_S S_{12}(f)/\alpha^n = 2, \qquad lF_S - f'_U \leq f \leq f'_U; \tag{9}$$

$$F_S S_{01} + F_S S_{11}(f)/\alpha^{-n+l-1} = 0, \qquad f'_L \leq f \leq lF_S - f'_U; \tag{10}$$

$$F_S S_{02} + F_S S_{12}(f)/\alpha^{-n+l} = 0, \qquad lF_S - f'_U \leq f \leq f'_U. \tag{11}$$

(7) 、 (8) 、 (9) 式中考虑到要恢复的复解析信号只有正频谱且是实信号频谱幅度的 2 倍，故用 2 倍.

$$S_{01}(f)=\frac{1}{F_S(1-\alpha^{-2n+l-1})}=\frac{\exp[j\pi F_SK_1(2n+1-l)]}{jF_S\sin[\pi F_SK_1(2n+1-l]},\quad f'_L\le f\le lF_S-f'_U;\tag{12}$$

$$S_{02}(f)=\frac{1}{F_S(1-\alpha^{-2n+1})}=\frac{\exp[j\pi F_SK_1(2n-l)]}{jF_S\sin[\pi F_SK_1(2n-l]},\quad lF_S-f'_U\le f\le f'_U;\tag{13}$$

$$S_{11}(f)=-\alpha^{-n+l-1}S_{01}(f)=\frac{\exp[j\pi F_SK_1(l-1)]}{jF_S\sin[\pi F_SK_1(2n+1-l]},\quad f'_L\le f\le lF_S-f'_U;\tag{14}$$

$$S_{12}(f)=-\alpha^{-n+l}S_{02}(f)=-\frac{\exp[j\pi F_SK_1l]}{jF_S\sin[\pi F_SK_1(2n-l]},\quad lF_S-f'_U\le f\le f'_U,\tag{15}$$

其中 n 是正或负的整数， nF_S 表示频谱的搬移 $0\le\beta\le1$， F_S-B 可看作保护带， β 表示保护带的分配， $l=\lfloor 2f'_U/F_S\rfloor$, $\lfloor x\rfloor$ 表示求小于等于 x 的最大整数.

要获得时域复的内插恢复函数，只需对 (4) 、 (6) 式作傅氏反变换：

$$\begin{aligned}S_i(t)&=\int_{f'_L}^{f'_U}S_i(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f\\&=\int_{f'_L}^{lF_S-f'_U}S_{i1}(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f+\int_{lF_S-f'_U}^{f'_U}S_{i2}(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f,\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $i=0,1$. 要获得实的内插恢复函数，只要对 (16) 式求取实部. 利用 (16) 式，对应于实带通信号 $d(t)$ 的复解析信号 $\tilde{d}(t)$ 为

$$\tilde{d}(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{d_{2A}\left(\frac{i}{F_S}\right)S_0\left(t-\frac{i}{F_S}\right)+d_{2B}\left(\frac{i}{F_S}\right)S_1\left(t-\frac{i}{F_S}\right)\right\}.\tag{17}$$

对 (17) 式作数字处理时，需要对内插函数 $S_i(t)(i=0,1)$ 进行采样. 设采样率为 F', 则 (17) 式成为

$$\tilde{d}\left(\frac{m}{F'}\right)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{d_{2A}\left(\frac{i}{F_S}\right)S_0\left(\frac{m}{F'}-\frac{i}{F_S}\right)+d_{2B}\left(\frac{i}{F_S}\right)S_1\left(\frac{m}{F'}-\frac{i}{F_S}\right)\right\}.\tag{18}$$

(18) 式的运算在 $F_S\neq F'$ 时是复杂的时变滤波运算，运算量很大. 若 $F_S/F'=D/I$, 其中 D 、 I 是整数，则首先应经过一个带通滤波后只保留 $|f'_L|<|f|<|f'_U|$ 内的频率成份，经过一个 I 倍内插运算，为防止内插引起的镜像频谱用一个工作在采样率为 $I\cdot F_S$, 带宽 $|f'_L|<|f|<|f'_U|$ 的滤波器来滤掉镜像部分，再进行 D 倍抽取并在抽取前应用滤波器来作防混叠滤波，最后获得抽样率为 F' 的序列并与 $S_i(t)$ 作卷积来完成二阶非均匀采样下信号的恢复. 上述时变滤波过程可用并行的多相滤波器实现 [4], 其代价是结构复杂成本增加，为此，本文提出如下的频域快速恢复方法.

3 频域的快速搬移和恢复

文献 [5] 讨论了带通信号的通带位置是整数下的频谱移动．本文讨论任意通带位置将 $d(t)$ 恢复为在 $(0,F')$ 内的复解析信号 $\tilde{d}(t)$, 并使 $\tilde{d}(t)$ 不被 $f=0$ 或 $f=F'$ 分割．为此对 F' 作如下限制： $F'\geq B$ 且

$$f_L - rF' \geq 0, \tag{19a}$$

$$f_U - (r+1)F' \leq 0. \tag{19b}$$

(19a)、(19b) 式的等号在 f_L, f_U 处无谱线时成立，则有

$$f_U/(r+1) \leq F' \leq f_L/r, \tag{20}$$

其中

$$0 \leq r \leq \lfloor f_L/B \rfloor. \tag{21}$$

当要恢复实带通信号 $d(t)$ 为频率在 $(0,F')$ 内的实信号时， $F'\geq 2B$, 且 [2]：

$$2f_U/n' \leq F' \leq 2f_L/(n'-1), \tag{22}$$

其中

$$1 \leq n' \leq \lfloor f_U/B \rfloor. \tag{23}$$

这样，将 F' 看成是 $d(t)$ 的带宽， $F'-B$ 看成是保护带，恰当选择 (5) 式中的 β, 使在 $(0,F')$ 内出现一个完整的边带，即让 $f'_L=0$, $f'_U=F'$ 来选择 n 和 β ．对实信号 $d(t)$ 以 F' 采样后，其负边带移动有一位置恰与 $(0,F')$ 内正边带重合，实现了整数倍通带位置．若这时同时对实信号 $d(t)$ 和内插恢复函数 $S_0(t)$ 和 $S_1(t)$ 以 $F'=F_S$ 采样， (18) 式成为

$$\tilde{d}\left(\frac{m}{F'}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{d_{2A}\left(\frac{n}{F'}\right)S_0\left[(m-n)\frac{1}{F'}\right] + d_{2B}\left(\frac{n}{F'}\right)S_1\left[(m-n)\frac{1}{F'}\right]\right\}. \tag{24}$$

(24) 式成为卷积式，避免了采样率的转换． (24) 式的频域表达为

$$\tilde{D}(f) = D_{2A}(f)\cdot S_0(f) + D_{2B}\cdot S_1(f), \quad 0\leq f\leq F', \tag{25}$$

其中内插函数的频域表达 $S_0(f), S_1(f)$ 可用 (4)、(6)、(12)~(15) 式表达．但由于实现了整数倍通带位置，其中 (13)、(15) 式可去掉而无子通带．这时，由于 $F'=F_S, r=-n, l=2$ 有

$$S_0(f) = \frac{\alpha}{F'(1-\alpha^{2r+1})} = \frac{j\exp[j\pi F'K_1(2r+1)]}{F'\sin[\pi F'K_1(2r+1]}, \quad 0\leq f\leq F'; \tag{26a}$$

$$S_1(f) = \frac{-2\alpha^{r+1}}{F'(1-\alpha^{2r+1})} = \frac{j\exp[j\pi F'K_1]}{F'\sin[\pi F'K_1(2r+1]}, \quad 0\leq f\leq F'; \tag{26b}$$

显然，由 (25) 式在频域作运算是非常简单的，因为 $S_0(f)$、 $S_1(f)$ 在 $(0,F')$ 内是复常数，实际应用时只需对 (26a)、(26b) 式直接读取，点数为 $N=F'\cdot T_0$, 间隔为 $1/T_0$, T_0 为观察时间长度，从而有如图 2 结构．

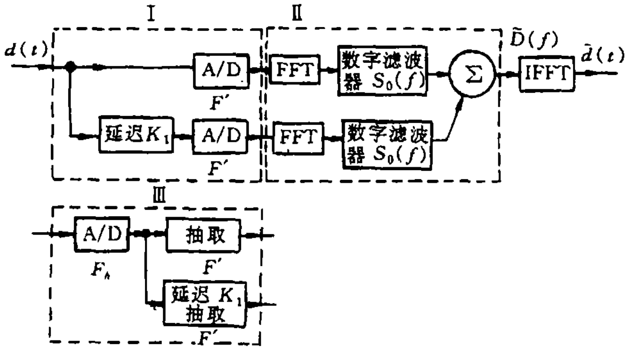

图 2　二阶非均匀采样下实现实信号频谱搬移和恢复

图 2 中，虚线部分 II 可用两路并行切换实现 $\tilde{d}(t)$ 的连续输出．而部分 I 可用部分 III 来代替，延迟 K_1 、两路 A/D 可用抽取方法来获得．整个过程可由软件来控制．若在 $(0, F')$ 内，$\tilde{d}(t)$ 的频率为 f'，则其真实频率 f 为

$$f = rF' + f'. \tag{28}$$

4　计算机模拟结果

如图 3, 用合成信号，频率数据用带宽 B 归一化：$f_c/B = 158.7$, $B = 1$ ．图 3(a), 3(b) 是真实信号对应的复解析信号的幅度谱和相位谱 (频移后)，图 3(c), 3(d) 分别是实带通信号经二阶采样后恢复的经频率搬移后的复信号的幅度和相位谱，对输入的实信号直接实现了

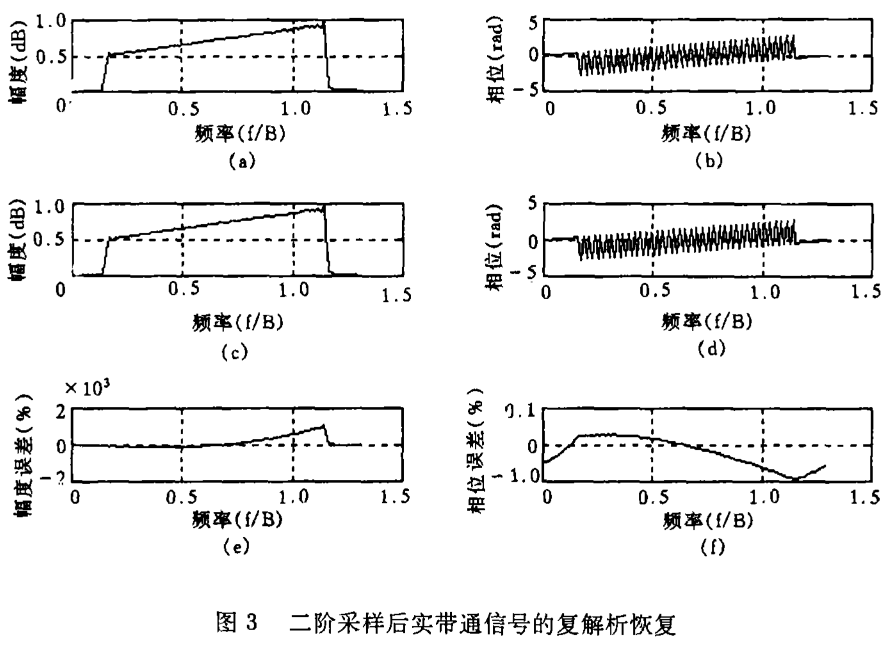

图 3　二阶采样后实带通信号的复解析恢复

频率搬移和正交处理。只需恰当调整延迟 K_1，不存在通道校正等问题引起的误差。图 3(e), 3(f) 是用有限点频率响应函数恢复前、后的频域幅度谱和相位谱的误差。可以看到，在信号通带内幅度和相位误差是很小的。

5 结束语

二阶非均匀采样，可使两路均匀采样流采样率低至带通信号的带宽，在恰当选择采样率并使采样率不增加很多的情况下，实现了带通信号的整数通带位置，利用一简单的滤波器即可实现信号正交化处理，并将此实带通信号搬移到了低频谱端。

参 考 文 献

[1] Turletti T, Tennenhouse D. Estimating the computational requirements of a software GSM base station. Proc. IEEE 1997 International Conference on Communications, Montreal, Quebec, Canada: 1997, 169–175.

[2] Vaughan R G, Scott N L, White D R. The theory of bandpass sampling. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(9): 1973–1984.

[3] Coulson A J. A generalization of nonuniform bandpass sampling. IEEE Trans. on SP, 1995, SP-43(3): 694–794.

[4] Crochiere R E, Rabiner L R. Multirate Digital Signal Processing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc. 1983.

[5] Coulson A J, Vaughan R G, Poletti M A. Frequency-shifting using bandpass sampling. IEEE Trans. on SP, 1994, SP-42(6): 1556–1559.

SECOND-ORDER NONUNIFORM SAMPLING FOR THE FAST RECOVERY OF BANDPASS SIGNAL

Huang Yong Xiao Xianci Lin Yunsong

(*Department of Electronic Engineering, UESTC of China, Chengdu* 610054)

Abstract Fast recovery and frequency-shifting of real bandpass signal based on second-order sampling is discussed. Using FFT and complex filtering, real bandpass signal can be recovered as a analytic signal whose central frequency is within two times of its bandwidth, and phase property is not changed. Finally, using simple computation, original frequency can be acquired. Computer simulation shows the correction of the method.

Key words Nonuniform sampling, FFT, Interpolation recovery, Aliasing, Frequency-shifting

黄 勇： 男， 1964 年出生，副教授，博士生，主要从事数字信号处理，采样理论和在实时信号处理中的应用的研究.

肖先赐： 男，教授，博士生导师，主要从事信号处理及其应用等方面的教学和研究工作.

林云松： 男， 1969 年生，博士生，主要从事数字信号处理等方面的研究.