

# 余弦调制滤波器组的原型滤波器设计<sup>1</sup>

张子敬 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要** 该文提出了一种近似重构的余弦调制滤波器组的原型滤波器设计方法。该方法将原型滤波器表示成  $A(z^2)B(z)$  的形式 (其中  $B(z)$  是最平坦 FIR 滤波器), 通过优化低阶 FIR 滤波器  $A(z)$  的通带边缘频率, 间接设计原型滤波器。文中给出的设计例子表明, 该方法可获得很高阻带衰减的滤波器组。

**关键词** 余弦调制滤波器组, 近似重构, 高阻带衰减

**中图分类号** TN713

## 1 引言

滤波器组在通信、图像编码、语音编码、雷达等许多领域都有广泛的应用, 图 1 为一个典型的  $M$  通道最大抽取滤波器组。余弦调制滤波器组 (CMFB) 是一种特殊的多速率滤波器组, 它的分析和综合滤波器是由一个或两个低通原型滤波器经过余弦调制得到的<sup>[1]</sup>。因此, 余弦调制滤波器组的设计可简化为原型滤波器的设计。由于设计简单且实现效率高, 余弦调制滤波器组成为多速率滤波器组的研究热点之一<sup>[1-7]</sup>。

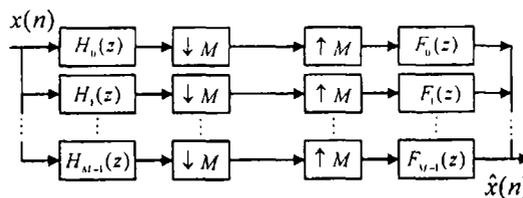


图 1  $M$  通道最大抽取滤波器组

Koipillai 和 Vaidyanathan 提出了余弦调制滤波器组精确重构的充要条件, 并给出了一种格形实现<sup>[2]</sup>。余弦调制滤波器组的精确重构性可由格形结构保证, 即使格形系数量化也可重构, 因而具有很好的稳健性。但它的目标函数是优化参数的高度非线性函数, 优化时需要一个好的起始点, 并且目标函数对格形系数的变化非常敏感, 很难获得高阻带衰减 (一般只有  $-40\text{dB}$  左右) 的滤波器。而且, 滤波器的阶次越高, 越难找到一个好的起始点, 使其优化算法收敛到一个好的滤波器组。

在宽带音频信号 (通常为 16 位精度) 的编码中, 为了得到高质量的重构, 一般要求非相邻子带间的阻带衰减高达  $-100\text{dB}$ <sup>[8]</sup>。放松精确重构性, 将滤波器组的重构误差控制在一个合理的范围内, 可以使分析和综合滤波器组具有很高的阻带衰减 (超过  $-100\text{dB}$ )。

Nguyen 直接优化原型滤波器的系数使阻带衰减达到  $-100\text{dB}$  左右<sup>[4]</sup>, 该方法采用的是有约束的多参数非线性优化, 因而计算非常复杂。Lin 和 Vaidyanathan 采用 Kaiser 窗方法直接设计高阻带衰减的原型滤波器<sup>[3]</sup>, 该方法是一种单参数的优化方法, 其最优参数是通过在一定区间内全部搜索 (而不是迭代) 得到的, 因而计算效率较低。虽然该方法欲设计阻带衰减为  $-100\text{dB}$  的原型滤波器, 但所得到的原型滤波器的阻带衰减只有  $-81\text{dB}$  (见文献 [3] 的图 2 中  $\pi/M$

<sup>1</sup> 2000-01-28 收到, 2000-08-17 定稿

国家自然科学基金 (69772029) 和国家“863”高技术资助项目

处的幅度衰减)。本文方法也是一种单参数的优化方法, 该方法通过设计一个低阶 FIR 滤波器间接设计高阻带衰减的原型滤波器, 其性能明显优于 Kaiser 窗法。

## 2 余弦调制滤波器组

在余弦调制滤波器组中, 原型滤波器  $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$  是一个线性相位、低通 FIR 滤波器, 截止频率为  $\pi/(2M)^{[5]}$ 。分析滤波器  $H_k(z)$  和综合滤波器  $F_k(z)$  的脉冲响应分别为

$$h_k(n) = 2h(n) \cos\{(2k+1)\pi/(2M)[n - (N-1)/2] + (-1)^k(\pi/4)\},$$

$$0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq M-1 \quad (1)$$

$$f_k(n) = 2h(n) \cos\{(2k+1)\pi/(2M)[n - (N-1)/2] - (-1)^k(\pi/4)\},$$

$$0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq M-1 \quad (2)$$

令  $\tilde{H}_k(z) = H_k(z^{-1})$ , 由 (1), (2) 式可得

$$f_k(n) = h_k(N-1-n), \quad F_k(z) = z^{-(N-1)}\tilde{H}_k(z), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (3)$$

尽管原型滤波器具有线性相位, 但分析和综合滤波器都没有线性相位。

整个滤波器组的输出可表示为

$$\hat{X}(z) = X(z)T(z) + \sum_{l=1}^{M-1} X(zW^l)T_l(z) \quad (4)$$

其中

$$W = e^{-j2\pi/M} \quad (5)$$

$$T(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)F_k(z) = \frac{z^{-(N-1)}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)H_k(z^{-1}) \quad (6)$$

$$T_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW^l)F_k(z), \quad 1 \leq l \leq M-1 \quad (7)$$

$|T(e^{j\omega})|$  表示整个滤波器组的幅度失真,

$$1 - \delta_1 \leq |T(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_2 \quad (8)$$

其中  $\delta_1$  和  $\delta_2$  是远小于 1 的正常数, 表示幅度失真的程度。  $T_l(z)$  是混叠输入项  $X(zW^l)$  的传递函数, 定义混叠误差为

$$E(\omega) = \frac{1}{M} \left[ \sum_{l=1}^{M-1} |T_l(e^{j\omega})|^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

因为  $H_k(z)H_k(z^{-1})$  是  $h_k(n)$  的自相关 (对称) 的 Z 变换, 故  $T(z)$  具有线性相位。也就是说, 整个滤波器组没有相位失真, 只有幅度和混叠失真。

## 3 余弦调制滤波器组的设计

为了得到高质量的重构, 一个好的原型滤波器应尽可能满足如下两个条件<sup>[6]</sup>:

$$|H(\omega)| = 0, \quad \pi/M < \omega \leq \pi \quad (10)$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega - \pi/M)|^2 = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/M \quad (11)$$

调制时,选择合适的相位因子,可以消除相邻子带间的混叠(混叠的主要部分)。如果满足条件(10)式,则非相邻子带间也没有混叠。如果满足条件(11)式,则滤波器组没有幅度失真。

为便于优化,我们将原型滤波器  $H(z)$  表示为

$$H(z) = A(z^2)B(z) \quad (12)$$

其中  $A(z)$  是待优化的线性相位低通滤波器,它的幅频特性是  $H(z)$  的 2 倍扩展。假定  $H(z)$  的通带和阻带的边缘频率分别为  $\omega_p^H, \omega_s^H$ , 通常选择  $\omega_s^H = \pi/M$ 。则  $A(z)$  的通带和阻带的边缘频率分别为  $\omega_p^A = 2\omega_p^H, \omega_s^A = 2\omega_s^H = 2\pi/M$ 。

$A(z^2)$  的脉冲响应是  $A(z)$  的脉冲响应  $a(n)$  的 2 倍插值(相邻样本点之间插入一个零点)。 $A(z^2)$  的频谱  $A(e^{j2\omega})$  是  $A(e^{j\omega})$  的 2 倍压缩。由于  $A(e^{j2\omega})$  的周期是  $\pi$ , 因此,在  $A(e^{j2\omega})$  中,除了相当于  $H(e^{j\omega})$  的部分外,还出现了一个  $H(e^{j\omega})$  的平移部分。它是由插值引起的镜像,其中心位于  $\omega = \pi$ 。显然,  $B(z)$  应是一个线性相位低通滤波器,抑制不需要的镜像。

由于  $A(z)$  的过渡带宽是  $H(z)$  的 2 倍,因此,  $A(z)$  的阶次约为  $H(z)$  的一半。 $H(z)$  是一个窄带低通滤波器,  $A(e^{j2\omega})$  中  $H(e^{j\omega})$  部分与其镜像比较远,因而  $B(z)$  有较宽的过渡带宽,阶次很低。

本文选择  $B(z)$  为最平坦的 FIR 线性相位滤波器<sup>[9,10]</sup>。 $P$  阶最平坦 FIR 滤波器  $B(z)$  满足<sup>[9]</sup>:

$$B(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1 \quad (13)$$

$$B(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{d^n B(e^{j\omega})}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 2L - 1 \quad (15)$$

$$\left. \frac{d^n B(e^{j\omega})}{d\omega^n} \right|_{\omega=\pi} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 2K - 1 \quad (16)$$

其中,  $L$  和  $K$  分别代表  $\omega = 0$  和  $\omega = \pi$  处的平坦度且有如下关系:

$$P = 2(L + K - 1) \quad (17)$$

最平坦 FIR 滤波器的幅度响应为

$$B(\omega) = \cos^{2K}(\omega/2) \sum_{n=0}^{L-1} d(n) \sin^{2n}(\omega/2) \quad (18)$$

$$d(n) = (K - 1 + n)! / [(K - 1)!n!] \quad (19)$$

对  $B(\omega)$  作  $P + 1$  点的逆 DFT 可以得到  $B(z)$  的脉冲响应<sup>[10]</sup>。本文选择  $L = 2, K = 2$  或 3。

精确重构的余弦调制滤波器组的原型滤波器应是一个 Nyquist( $2M$ ) 滤波器  $G(z)$  (半带滤波器的推广)的谱因子<sup>[4]</sup>, 即

$$G(z) = H(z)\tilde{H}(z) \quad (20)$$

根据 Nyquist( $2M$ ) 滤波器的性质,  $G(z)$  的脉冲响应  $g(n)$  满足

$$g(2Mn) = \begin{cases} 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 1/(2M), & n = 0 \end{cases} \quad (21)$$

因此优化的目标函数可选为<sup>[3]</sup>

$$\phi = \max_{n \neq 0} |g(2Mn)| \quad (22)$$

因为  $g(n) = h(n) * h(-n)$ ,  $g(2Mn)$  是  $g(n)$  的  $2M$  倍抽取, 即仅有  $1/(2M)$  的  $g(n)$  需要计算。因而目标函数的计算非常简单。

条件 (10) 式靠原型滤波器的高阻带衰减近似满足。采用 Parks-McClellan 算法设计  $A(z)$ , 先令  $A(z)$  的通带和阻带边缘频率分别为  $\pi/M$ ,  $2\pi/M$ , 选择合适的滤波器阶次, 使  $A(z)$  有期望的低旁瓣 (如  $-100$  dB)。在 Parks-McClellan 算法中, 滤波器阶次  $R$  可由下式近似给出<sup>[11]</sup>。

$$R \approx (-20 \log \sqrt{\delta_p \delta_s} - 13) / (14.6 \Delta F), \quad \Delta F = (\omega_s - \omega_p) / (2\pi) \quad (23)$$

整个优化过程可归结为

(1) 选择  $A(z)$  的阶次, 使  $A(z)$  有期望的低旁瓣。

(2) 选择  $B(z)$  的  $K$  值 (2 或 3),  $L = 2$ , 使其有足够大的阻带衰减, 保证  $H(z)$  有期望的低旁瓣。

(3) 初始化  $A(z)$  的通带边缘频率  $\omega_p^A$  以及  $\omega_p^A$  的变化步长 step 和搜索方向 dir (+1 或 -1), 令目标函数  $\phi$  的初始值为一个较大的常数, 例如 9999。

(4) 计算  $\omega_p^A = \omega_p^A + \text{dir} \cdot \text{step}$ 。

(5) 用 Parks-McClellan 算法设计  $A(z)$ 。

(6) 按 (22) 式计算目标函数  $\phi$ 。

(7) 如果本次  $\phi$  值与上次  $\phi$  值之差足够小, 则优化停止, 否则转向步骤 (8)。

(8) 如果本次  $\phi$  值比上次  $\phi$  值小, 返回步骤 (4)。否则令  $\text{step} = \text{step}/2$ ,  $\text{dir} = -\text{dir}$ , 返回步骤 (4)。

当通道数增加时, 原型滤波器的带宽变窄, 阶次升高。过高的阶次可能使 Parks-McClellan 算法出现数值问题<sup>[12]</sup>, 并且所需要的 CPU 时间与阶次的平方成正比<sup>[13]</sup>。由于在上述算法中, 高阶滤波器  $H(z)$  的优化设计被转化为低阶滤波器  $A(z)$  的优化设计, 并且每次迭代都要重新设计一次滤波器。因此, 这种间接设计法大大降低了运算量。

### 3 设计举例

为便于与文献 [3] 比较, 用上述方法设计一个 32 通道余弦调制滤波器组 ( $M = 32$ )。

选择最平坦 FIR 滤波器的  $L = 2$ ,  $K = 2$ , 其幅度响应如图 2 中的虚线所示。

用上述单参数优化算法可得到一个 230 阶的线性相位滤波器  $A(z)$ , 因此,  $H(z)$  的阶次为  $230 \times 2 + 2 \times (2 + 2 - 1) = 466$ 。  $A(z^2)$  的幅频特性如图 2 中的实线所示, 图 3 为原型滤波器  $H(z)$  的幅度响应。图 4 为分析滤波器组  $H_k(z)$  的幅度响应, 由图 4 可见, 阻带衰减约为  $-110$  dB, 相邻子带间存在重叠, 而非相邻子带不存在重叠 (忽略旁瓣)。

图 5 是整个滤波器组的幅度响应 (周期为  $\pi/M$ <sup>[3]</sup>, 仅画出一个周期)。幅度响应非常平坦, 具有等波纹特性, 最大幅度失真约为 0.0007。由于分析 (综合) 滤波器组的旁瓣很低, 因而混叠失真非常小, 混叠误差  $E(\omega)$  小于  $3.97 \times 10^{-8}$ 。表 1 为本文方法和 Kaiser 窗法<sup>[3]</sup> 的比较, 可见其性能优于 Kaiser 窗法。

表 1 本文方法与 Kaiser 窗法的比较

	最大幅度误差	最大混叠误差	$H(z)$ 在 $\pi/M$ 处的幅度衰减	通道数	$H(z)$ 的阶次
Kaiser 窗法	0.002	$3.86 \times 10^{-7}$	-81 dB	32	466
本文方法	0.00073	$3.97 \times 10^{-8}$	-110 dB	32	466

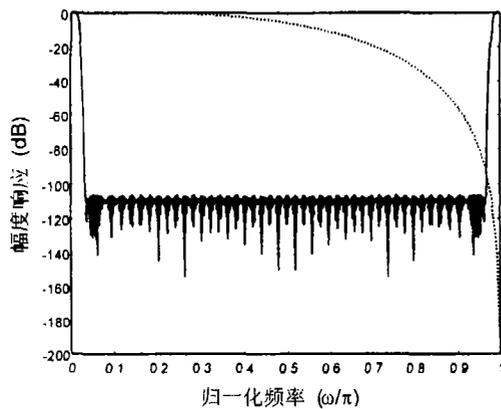
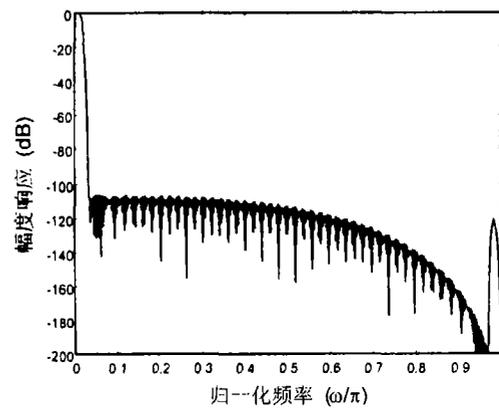
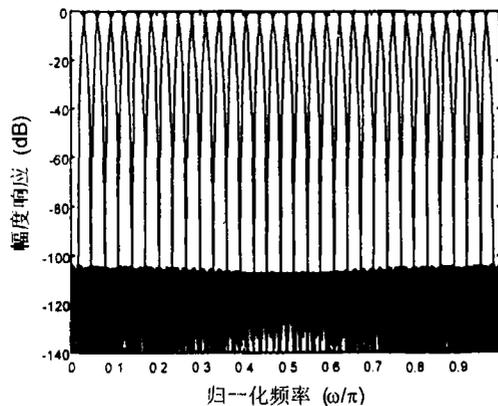
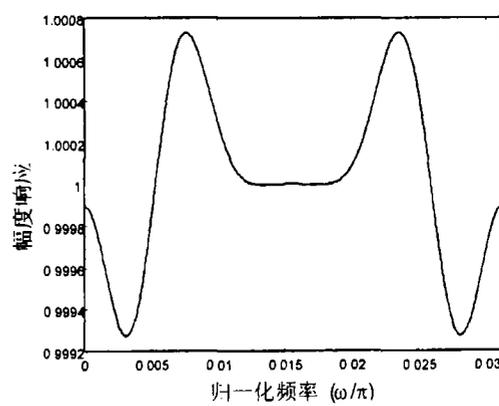
图2  $A(z)$  和  $B(z)$  的幅度响应图3 原型滤波器  $H(z)$  的幅度响应图4 分析滤波器组  $H_k(z)$  的幅度响应

图5 余弦调制滤波器组的幅度响应

## 4 结 论

放松精确重构性,可以使分析和综合滤波器组具有很高的阻带衰减(超过  $-100$  dB)。本文提出了一种近似重构的余弦调制滤波器组的设计方法。该方法将原型滤波器表示成  $A(z^2)B(z)$  的形式,通过优化低阶 FIR 滤波器  $A(z)$  的通带边缘频率,间接设计原型滤波器。在优化过程中,采用常用的 Parks-McClellan 算法设计线性相位滤波器  $A(z)$ 。虽然对原型滤波器的形式有所限制,但所设计的滤波器组优于 Kaiser 窗法所设计的滤波器组。

## 参 考 文 献

- [1] Y. P. Lin, P. P. Vaidyanathan, Linear phase cosine modulated maximally decimated filter banks with perfect reconstruction, IEEE Trans. on SP, 1995, SP-42(11), 2525-2538.
- [2] R. D. Koilpillai, P. P. Vaidyanathan, Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction, IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(4), 770-783.
- [3] Y. P. Lin, P. P. Vaidyanathan, A Kaiser window approach for the design of prototype filters of cosine modulated filter banks, IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(6), 132-134.

- [4] T. Q. Nguyen, Near-perfect-reconstruction pseudo-QMF banks, *IEEE Trans. on SP*, 1994, SP-42(1), 65-76.
- [5] T. Q. Nguyen, R. D. Koilpillai, The theory and design of arbitrary length cosine-modulated filter banks and wavelets, satisfying perfect reconstruction, *IEEE Trans. on SP*, 1996, SP-44(3), 473-483.
- [6] J. H. Rothweiler, Polyphase quadrature—A new subband coding technique, *ICASSP83*, Boston, U. S. A., 1983, 1280-1283.
- [7] P. N. Heller, T. Karp, T. Q. Nguyen, A general formulation of modulated filter banks, *IEEE Trans. on SP*, 1999, SP-47(4), 986-1002.
- [8] G. Lohhoff, Precision adaptive coding for the digital compact cassette, *IEEE Trans. on Consumer Electron.*, 1992, CE-38(4), 784-789.
- [9] L. R. Rajagopal, S. Roy, Optimal design of maximally flat FIR filters with arbitrary magnitude specifications, *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, ASSP-37(4), 512-518.
- [10] J. F. Kaiser, Design Subroutine (MAXFLAT) for Symmetric FIR Low Pass Digital Filters with Maximally-Flat Pass and Stop Bands, In *Programs for Digital Signal Processing*, New York, IEEE Press, 1979, 5.3.1-5.3.6.
- [11] V. K. Madisetti, D. B. Williams, *The Digital Signal Processing Handbook*, New York, IEEE Press, 1997, 11.21-11.30.
- [12] T. W. Parks, C. S. Burrus, *Digital Filter Design*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1987, 83-94.
- [13] F. Bonzanigo, Some improvements to the design programs for equiripple FIR filters, *ICASSP82*, Paris, France, 1982, 274-277.

## DESIGN OF PROTOTYPE FILTER FOR COSINE-MODULATED FILTER BANKS

Zhang Zijing     Jiao Licheng

(*National Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

**Abstract** A new method for designing the prototype filter for cosine-modulated filter banks with near-perfect-reconstruction is proposed. The prototype filter is formulated as the form  $A(z^2)B(z)$  and indirectly designed by varying the passband edge of the FIR filter  $A(z)$  with low order, where  $B(z)$  is a maximally flat FIR filter. A design example is presented to show that filter banks with high stop attenuation can be achieved using this method.

**Key words** Cosine-modulated filter banks, Near-perfect-reconstruction, High stop attenuation

张子敬: 男, 1967 年生, 博士, 主要研究方向为多速率滤波器组的理论及应用, 子波变换, 雷达与通信信号处理.  
焦李成: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为非线性系统理论, 智能信息处理, 子波理论及应用.