

波导截止现象的量子类比*

黄志洵

(清华大学分校)

(一) 引言 Stratton^[1] 说过:“事物在表面上极其复杂多样,这激励人们从中发现经常出现的一致性。……例如可以设计出这样的电路,使其性能与力学系统的振荡能用同样的微分方程组描写,两者具有一一对应的关系”。1936年,波导传输实验成功^[2],从此开始了微波技术的历史**^[3]。次年, Schelkunoff^[4] 即采用等效电压、电流概念,对自由空间的横磁(TM)平面波作了分析,并第一次采用等效电路,即用分布式多节网络,模拟一个带有截止条件的波动过程。他在文献[4]中,把阻抗概念推广到电磁场领域,并从一维的传输线模拟开始,建立了基本理论基础。而阻抗本来是力学、声学、流体力学中的一个固有参数。

本世纪初量子理论的发展,使人们认识到电磁场具有波粒二象性。1901年, Лебедев 发表了光压实验的结果 ($3.08 \times 10^{-5} \text{dyne}$),使人们第一次认识到光子有辐射压力。1949年, Carrara 和 Lombardini 报道了波在微波频率上存在辐射压力的验证,这可作为微波粒子性的证明;当然这也是波动性的证明,因为在微波电磁场中,磁场作用于电流,电场作用于表面电荷,都会产生力的效应。

Thomson、Rayleigh 等人^[5-8]的工作,奠定了波导(包括传输波导和截止波导)的理论基础,但都是纯粹经典电动力学的理论,与同一时期内量子理论的进展^{9,10}毫无关系。我们知道,微波场的量子化构成粒子,称为微波量子,它的能量很小 ($10^{-6} \text{eV} - 10^{-2} \text{eV}$),但密度极大,因而对微波的粒子性一般不予重视。微波对生物组织(细胞)的破坏作用,不是由于单个微波量子的能量大,而是由于微波量子群的数目庞大。这一情况曾经使人们以为,对于象波导理论这样的由宏观 Maxwell 方程组描述的领域,量子理论是无能为力的。

后来由于用边界条件微扰法处理波导中简并模的传输衰减问题成功^[11](而简并态微扰理论却是量子力学中的一般问题),才开始认识到两种思想体系之间并非没有联系^[12]。

本文将波导截止现象与量子隧道效应类比,使表面上看来互不相关的问题得到某些统一的解释。作者认为,从量子力学角度去研究和解释金属壁规则柱波导的截止现象,既有趣又有意义——它也许对 A. Einstein 所坚信的“自然(宇宙)的统一性”提供出又一例证!

(二) 传输线理论的广义化 以平行双导线为基础的均匀传输线方程组是一阶偏微分方程组。它在稳定正弦状态 ($e^{j\omega t}$) 下,变为一阶常微分方程组。在此基础上,建立了完

* 1983年8月18日收到,1984年11月6日修改定稿。

** 国际电工委员会(IEC)对“微波”的定义是:“波长足够短,以致能实际应用波导和谐振腔技术的电磁波”。

整的传输线理论体系,但其应用范围早已超出了平行双导线本身. 首先,平面波电磁场问题就可归结为熟知的传输线问题来解决. 其次,波导传输线亦可建立起分布参数等效电路^[4,13-15], (见表 1) 而 Schelkunoff^[4] 最先给出了波导的“高通滤波器”特性. 根据他的观点得知: 对于 TM 波导,串联电抗为零时,发生截止;对于 TE 波导,并联电纳为零时,发

表 1

	分布参数等效电路<无损耗>	分布参数等效电路<有损耗>
TEM 传输线	1	2
TM 波导	3	4
TE 波导	5	6

生截止. 在这两种情况下均可得到:

$$\omega_c = \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{或} \quad f_c = \frac{h_0}{2\pi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (1)$$

式中 h_0 是本征值, ϵ_0 是真空介电常数, μ_0 是真空导磁率, f_c 是截止频率.

微波电子管中的空间电荷波可用传输线模拟. 不仅如此,现在传输线的基本表述方式,已用于光纤理论中^[16]. 例如,1980 年曾有人在低损单模光纤中,1.55 μm 波长上,观察到孤立子;而具有孤立子群的三种典型非线性方程都有相应的传输线模型^[17]. 这说明广义传输线理论、方法的重要性!

现在来看一看量子隧道效应. 设能量为 ϵ 的微观粒子,沿 z 轴正向射向矩形位垒(宽度 l 、高度 U_0),即粒子只在 z 方向作一维运动. 粒子有一定几率穿过位垒,也有一定几率被位垒反射. 粒子运动的几率波函数为:

$$\Psi(z) = C_+ e^{\gamma z} + C_- e^{-\gamma z}, \quad (z < 0); \quad (2)$$

$$\Psi(z) = B e^{\gamma z}, \quad (z > l); \quad (3)$$

式(2)由入射波、反射波组成,式(3)由透射波组成. Ψ 是粒子处于任何特定位置的几率的量度. Schrödinger 方程所表达的是几率波,同样可以用一定的 L 、 C 链接的分布参数的等效电路来描写. 在画出等效电路后,我们可以看出,它类似于 TE 波导,而非 TM 波导^[18]. 上述情况就是波导与量子隧道效应之间相似性的基础.

文献[19]指出,“不能认为量子力学规律与宏观世界无关;……一些宏观现象也直接地表现出量子效应”. 这种提法符合上述那些事实所展示的规律性.

(三) 波导的截止现象及其量子类比 Thomson^[5] 并未指出波导存在截止现象. 而 Rayleigh^[6] 才第一个指出理想导电壁截止波导的本质:“没有波能够传播”. Schelkunoff^[4] 认为:“使传播常数为零的频率叫截止频率”. 但这一定义对非理想导电壁波导没有意义,因为取传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta$, 全频域找不到任何频率点能使 $\alpha = 0$ 或使 $\beta = 0$.

Karbowiak^[20] 曾用表面阻抗微扰法研究了有限导电壁波导(矩形或圆形截面)的传播常数,给出能用于全频域(包括 f_c) 的公式:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + 2M(jZ_f)}, \quad (4)$$

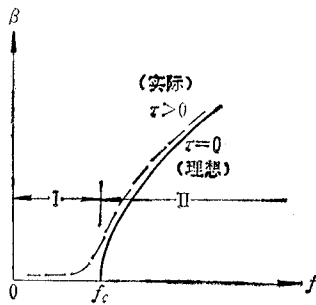
式中 γ_0 是理想导电壁波导的传播常数, Z_f 是归一化表面阻抗, M 是由工作频率、波导尺寸决定的系数. 当 $f = f_c$, $\gamma_0 = 0$ (这符合 Schelkunoff 的定义)时,得:

$$\gamma_c = \sqrt{2M(jZ_f)}. \quad (5)$$

这说明截止点上的参数是可以计算的.

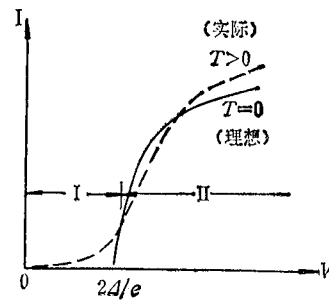
但是,波导在截止点上的突变,还是带有某种模糊性. 如前文所述,在波导壁的电导率为有限值时,尚无截止频率的定义. 作者^[21]曾指出:“绝对的截止并不存在,……仍有微量行波成分”. 显然,上面的陈述是不够深刻的. 作者^[22]还讨论过“等离子体的截止波导理论模型”,指出截止现象是电离气体的特性;还指出,当波在各向同性的媒质中传播时,场阻抗产生可观的电抗分量的三种情形(包括导波、电离气体和色散介质中的平面波). 这些都证明波动理论的一致性,但仍未从量子规律出发来考虑问题.

我们现在把波导的截止现象与量子隧道效应作些类比. 为此,首先画出金属壁柱波导的相位常数(β)在全频域中的变化,如图1所示. 理想情况为:壁电导率 $\sigma = \infty$ 、趋肤深度 $\tau = 0$;实际情况为: $\sigma \neq \infty$ 、 $\tau > 0$.



I——金属壁规则波导截止区
II——金属壁规则波导传输区
(τ ——趋肤深度)

图 1



I——超导结 Josephson 隧道效应
II——超导结单粒子隧道效应
(T ——绝对温度)

图 2

现在看一下超导体. 根据 BCS 理论^[23],两个自旋相反的电子,在极低温下形成弱束缚的 Cooper 对. 而当两块超导体经由绝缘的氧化薄层相连时,各自的波函数交叉重叠,产生弱耦合;如在结两端施加电压 V ,并由零起增大到能隙电压 $2\Delta/e$ (e 为电子电荷、 Δ 为能隙)时,电场能量就足以破坏电子对,形成单粒子,单粒子通过绝缘层形成隧道电流^[24]. 图2示出了超导结的隧道效应 ($V > 2\Delta/e$ 时称为单粒子隧道效应). 当温度 $T = 0\text{K}$, $V < 2\Delta/e$ 时,全部配成电子对,没有单粒子,故电流 $I = 0$. 在 $T > 0$ 、 $V < 2\Delta/e$ 的情况下,有少量单粒子,故只有微弱电流 ($I \neq 0$),它随 V 的增高而增大. 由图可见, $T > 0$ 时的伏安曲线与 $T = 0$ 时显著不同.

图1和图2对比,曲线的形状十分相似,它们的控制参量分别是 τ 和 T ; $\tau = 0$ 类似 $T = 0$, $\tau > 0$ 类似 $T > 0$. 由图可见,它们都是在一定条件下才发生突变. 在图1中,表面趋肤深度为零是不可能实现的;在图2中,绝对零度也是不可能实现的. 这就是说,物理实际总是 $\tau > 0$ 、 $T > 0$,这时突变不具有绝对的意义.

如何从物理本质上解释图1、图2的相似性? 从粒子性考虑时,波导中的电磁波是无

数个场量子,它们服从玻色统计,是玻色子。而超导金属中无数电子对的波运动也具宏观性质,电子对是近似玻色子。从波动性考虑时,在波导中是 Maxwell 电磁波,在超导现象中是 Schrödinger 几率波;两者虽不同,但都可用传输线模拟,在一定条件下有外形相似的等效电路。因此,图 1、图 2 在频域中有类似的规律、形状相似的曲线,也就不足为奇了。

(四) 量子隧道效应等效于截止波导时的衰减常数公式 量子隧道效应的传输线模型与金属壁规则柱波导中的 TE 模相似(图 3)^[18],因而隧道效应可与截止波导的工作情况相比拟。下面我们作一些推导。

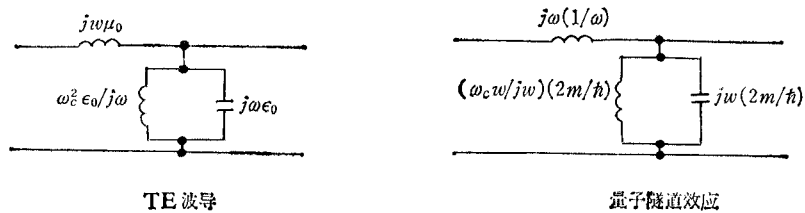


图 3

对理想导电壁波导有:

$$h_0^2 = \gamma_0^2 + k_0^2,$$

式中

$$k_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, \quad h_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 = \omega_c^2 \epsilon_0 \mu_0$$

(λ 为工作波长, λ_c 为截止波长)。由此可得:

$$\gamma_0 = j \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}. \quad (6)$$

对于微观粒子的隧道效应,公式外形略有区别^[18]:

$$\gamma = j \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \sqrt{\omega - \omega_c}. \quad (7)$$

ω_c 取决于一维矩形位垒的高度 U_0 ($\omega_c = U_0/\hbar$), 故如改变 U_0 , 即可改变 γ ; 当 $U_0 = 0$ 时,有

$$\gamma|_{U_0=0} = j \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \omega^{1/2}. \quad (8)$$

由此,我们就可知道隧道效应等效于截止波导时,衰减常数是多大? 显然,当 $\epsilon < U_0$ ($\omega < \omega_c$) 时, γ 是实数,即相当于规则柱波导的截止区! 这时衰减常数为:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} (\omega_c - \omega) = \frac{\sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}}{\hbar}. \quad (9)$$

由式(9)可见,改变位垒高度,即可改变等效截止波导的衰减常数。

最后应指出,从截止波导的应用,有可能引导出隧道效应的一些应用,例如应用于量子力学的几率波消失场。这些问题有待于进一步研究。

在写作过程中,曾得到南京大学吴培亨副教授、西北电讯工程学院杨德顺讲师的有益讨论和启发,在此一并表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] J. A. Stratton著,何国瑜译,电磁理论,北京航空学院,1983.
 [2] G. C. Southworth, *Bell Sys. Tech. J.*, **15**(1936), 284.
 [3] International Electrotechnical Vocabulary, Group 60, Radiocommunications, IEC, 1970.
 中译本:国际电工辞典第60组——无线电通信,科学出版社,1982.
 [4] S. A. Schelkunoff, *Proc. IRE*, **25**(1937), 1457.
 [5] J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism, London, 1893, § 300.
 [6] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), *Phil. Mag.*, S. 5, **43**(1897), 261, 125.
 [7] D. E. Harnett and N. P. Case, *Proc. IRE*, **23**(1935), 578.
 [8] J. R. Carson, S. P. Mead, and S. A. Schelkunoff, *Bell Sys. Tech. J.*, **15**(1936), 310.
 [9] M. Planck, *Ann. d. Physik*, **4**(1901), 553.
 [10] E. Schrödinger, *Ann. d. Physik*, **79**(1926), 489.
 [11] V. M. Papadopoulos, *Quant. J. Mech. and Appl. Math.*, Pt. 3, **7**(1954), 326.
 [12] J. D. Jackson 著,朱培豫译,经典电动力学,人民教育出版社,1978.
 [13] E. G. Jordan 著,人民邮电出版社译,电磁波与辐射系统,人民邮电出版社,1959.
 [14] O. Zinke, *Archiv für Elektrotechnik*, **41**(1955), 364.
 [15] R. Rauskolb, *A. E. Ü.*, **16**(1962), 427.
 [16] 黄宏嘉,电磁波,知识出版社,1983.
 [17] 汪业衡,传输线技术,1983年,第4期,第1页。
 [18] J. J. Hupert, *IRE Trans. on CT*, CT-9 (1962), No. 4, 425.
 [19] 曾谨言,量子力学(上册),科学出版社,1981。
 [20] A. E. Karbowiak, *Electronic and Radio Engineer.*, **34**(1957), 379.
 [21] 古乐天、黄志洵,截止波导与截止衰减器,人民邮电出版社,1977。
 [22] 黄志洵,截止波导理论导论,计量出版社,1981。
 [23] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, **106** (1957), 162.
 [24] 吴培亨,凯山计量,1982年,第2—3期,第1页。

附录 量子隧道效应传输线模型的基本关系式

假定微观粒子只在 z 方向作一维运动,一维 Schrödinger 方程为:

$$j\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dz^2} + U(z)\Psi,$$

式中 \hbar 是 Planck 常数与 2π 之比, m 是粒子质量, U 是粒子在力场中的位能, $\Psi = \psi e^{i\phi}$, 是粒子的波函数。上述方程可按分离变数法求解,即取

$$\frac{\Psi''(z)}{\Psi(z)} = -h^2,$$

这里 h 是分离常数(不是 Planck 常数);故有

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + h^2\Psi(z) = 0,$$

式中 h^2 为

$$h^2 = \frac{2m}{\hbar} (\varepsilon - U),$$

式中 ε 是粒子能量。而微分方程的解为

$$\Psi(z) = C_+ e^{r z} + C_- e^{-r z},$$

r 为传播常数，“+”号代表入射，“-”号代表反射。上式表明可以提出传输线模型。

在隧道效应中， U 是阻挡层位垒。在目前的情形下， U 代表一维的矩形位垒函数，如图 4 所示。（同时即是等效的均匀传输线的长度。）

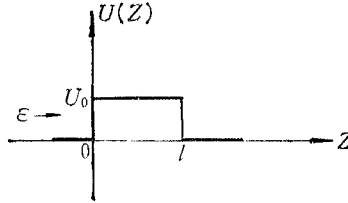


图 4

把 $\Psi(z)$ 看成电压波，则电流类似于 $-j\Psi(z)$ ；并提出以下公式：

- (1) 工作频率：
$$\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar};$$
- (2) 截止频率：
$$\omega_c = \frac{U_0}{\hbar};$$
- (3) 波特性阻抗：
$$Z_0 = \frac{\Psi_+(z)}{-j\Psi_+(z)};$$
- (4) 能流(概率密度流)：
$$\text{Re} \left[\Psi^* \frac{\hbar}{jm} \Psi \right] = K \text{Re} \left[\frac{\Psi \Psi^*}{z} \right]$$

AN ATTEMPT TO EXPLAIN THE CUT-OFF PHENOMENON OF WAVEGUIDE WITH QUANTUM MECHANICS

Huang Zhixun

(Branch School of Qinghua University, Beijing)

Discussions in the problem of cut-off phenomenon of the waveguide was made by many authors. In this paper, we make a comparison between the cut-off phenomenon of waveguide and the quantum mechanical tunnel effect. The significant result is presented.