

# 有强相对论性非中和电子束环的 环形自由电子激光器理论

尹元昭

(中国科学院电子学研究所, 北京 100080)

**摘要** 本文用弗拉索夫-麦克斯韦方程研究了有强相对论性非中和电子束环的环形自由电子激光器的工作特性。结果表明, 强电子束的空间电荷效应有提高辐射频率和强度的作用。

**关键词** 环形自由电子激光器; 非中和电子束环; 空间电荷效应

## 一、引言

近来对环形自由电子激光器已有不少理论<sup>[1-5]</sup>和实验<sup>[6,7]</sup>研究。环形自由电子激光器的特点是电子在环形静磁摆动器中大半径回旋, 增加了电子与波的相互作用距离, 从而大大缩短了器件长度; 并因为它具有正反馈作用, 所以更类似于一个振荡器。但因受轴向磁场强度的限制, 辐射波长在毫米和亚毫米范围, 可看作微波管向高功率短波长方面的发展。从前的研究都假定电子束强度低或被不动的正离子中和而不考虑空间电荷效应。本文则研究非中和的强相对论性电子束环的空间电荷对环形自由电子激光器工作特性的影响, 并指出空间电荷效应在一定条件下有提高辐射频率和强度的作用。

## 二、色散关系

环形自由电子激光器的结构示意图如图1所示。在同轴波导的内外筒壁上附有永久磁体组成的环形摆动器。来自跃变磁场的电子束环从中通过。电子束环的平衡半径  $R_0$ , 半宽度  $a_0$ , 平衡速度  $\mathbf{v}_0 = v_{\theta 0} \mathbf{e}_\theta + v_{\parallel} \mathbf{e}_z$ ,  $v_{\theta 0} = R_0 \Omega_{\parallel}$ ,  $\Omega_{\parallel} = e B_{\parallel} / (m_0 c \gamma_0)$  是电子在轴向磁场  $\mathbf{B}_{\parallel} = B_{\parallel} \mathbf{e}_z$  中的回旋频率,  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_0 = v_0 / c$ 。同轴波导的内外半径分别为  $b$  和  $a$ 。

对于 TM 模, 将波动方程

$$\nabla^2 E_z - (1/c^2) \partial^2 E_z / \partial t^2 = (4\pi/c^2) \partial j_z / \partial t + 4\pi \partial \rho / \partial z \quad (1)$$

经电子束环径向积分, 定义电子束环边界上的导波电纳

$$\left. \begin{aligned} d_+ &= -[r \partial E_{z1}(r) / \partial r]_{R_2} / [l E_{z1}(R_2)] \\ d_- &= [r \partial E_{z1}(r) / \partial r]_{R_1} / [l E_{z1}(R_1)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

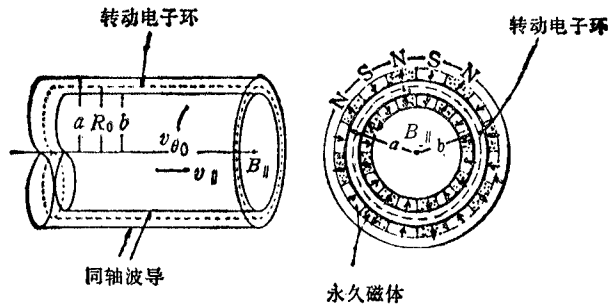


图1 环形自由电子激光器的结构示意图

并利用电磁场在电子束环边界上的连续条件,可得

$$\begin{aligned} [d_+ + d_- - (\omega^2/c^2 - l^2/R_0^2 - k_{||}^2)2a_0R_0/l]E_{z1}(R_0) \\ - i4\pi\omega/(c^2l) \int_{R_1}^{R_2} r j_{z1}(r)dr - i(4\pi k_{||}/l) \int_{R_1}^{R_2} r \rho_1(r)dr \end{aligned} \quad (3)$$

其中高频量都取  $A = \sum_l A_l(r) \exp[i(l\theta + k_{||}z - \omega t)]$  形式,  $l$  是方位角模数,  $R_1 = R_0 - a_0$ ,  $R_2 = R_0 + a_0$  是电子束环的径向边界. 同轴波导 TM 模的电场  $z$  分量为

$$E_z = \sum_l c_l X_l(k_c r) \exp[i(l\theta + k_{||}z - \omega t)] \quad (4)$$

其中,  $X_l(k_c r) = J_l(k_c r)N_l(k_c a) - J_l(k_c a)N_l(k_c r)$ ,  $J_l$  和  $N_l$  分别是第一和第二类贝塞尔函数,  $k_c$  是同轴波导的截止波数, 由  $X_l(k_c b) = 0$  决定. 将(4)式代入(2)式可得

$$\left. \begin{aligned} d_+ &= -\frac{k_c R_2}{l} \frac{J_l'(k_c R_2)N_l(k_c a) - J_l(k_c a)N_l'(k_c R_2)}{J_l(k_c R_2)N_l(k_c a) - J_l(k_c a)N_l(k_c R_2)} \\ d_- &= -\frac{k_c R_1}{l} \frac{J_l'(k_c R_1)N_l(k_c a) - J_l(k_c a)N_l'(k_c R_1)}{J_l(k_c R_1)N_l(k_c a) - J_l(k_c a)N_l(k_c R_1)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

扰动电流密度  $\mathbf{j}$  和电荷密度  $\rho$  由下列积分求得

$$\mathbf{j} = -e \int d^3p v \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (6)$$

$$\rho = -e \int d^3p \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (7)$$

环形摆动器的场在  $R_0$  附近可近似表示为

$$\mathbf{B}_w = B_w \cos(N\theta) \mathbf{e}_r \quad (8)$$

这里  $R_0 = (a^{N-1}b^{N+1})^{1/(2N)}$  非常接近同轴波导的中心位置,  $N$  是正整数, 环形摆动器的波长  $\lambda_w = 2\pi R_0/N$ . 解电子在轴向磁场和环形摆动器场中的运动方程可求得电子的未扰动速度  $\mathbf{v}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = [\Omega_{||}(r^2 + R_0^2 + a_0^2)/(2r) - f v_{||} \sin(N\theta) + f^2 r \Omega_{||} \cos(2N\theta)] \mathbf{e}_\theta \\ + [v_{||} + f r \Omega_{||} \sin(N\theta)] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $f = B_w/(NB_{||}) \ll 1$ .

扰动分布函数  $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  由下列线性化弗拉索夫方程决定:

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \partial/\partial \mathbf{r} - (e/c)\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_{||} + \mathbf{B}_w) \cdot \partial/\partial \mathbf{p}] \delta f$$

$$= c(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c) \cdot \partial f^{(0)}/\partial \mathbf{p} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  是同轴波导 TM 模的电磁场。我们取稳态分布函数  $f^{(0)}$  为<sup>[2]</sup>

$$f^{(0)} = n_0 R_0 \oplus [\Delta^2 - (P - \gamma_0 m_0 v_0)^2] \delta(P_r) \delta(C_\theta - P_\theta) \delta(C_x - \gamma_0 m_0 v_{||}) \quad (11)$$

其中  $n_0$  是电子密度;  $\Delta$  是动量分散;  $P_0 = (e/2c) B_{||} (R_0^2 + a_0^2)$ ;  $\oplus(x) = 1$ , 当  $x \geq 0$ ;  $\oplus(x) = 0$ , 当  $x < 0$ ;  $P, C_x, C_\theta, P_r$  都是运动常数。用未扰动轨道积分法积分(10)式, 可得扰动分布函数  $\delta f$ , 将求得的  $\delta f$  代入(6)和(7)式, 经过冗长的运算, 由(3)式得到考虑到强相对论性非中和电子束环空间电荷影响时的 TM 模色散关系。

$$\begin{aligned} & [d_+ + d_- - (\omega^2/c^2 - l^2/R_0^2 - k_{||}^2) 2a_0 R_0/l] [\omega - (l+N)\Omega_{||} - v_{||} k_{||}]^2 \\ & = -a_0 R_0^2 \Omega_{||} \omega_p^2 \omega^2 / (2k_c^2 c^4) [(l+N)\Omega_{||} + k_{||} v_{||}] J_0^2(k_{||} f R_0/N) \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\omega_p = [4\pi e^2 n_0 / (\gamma_0 m_0)]^{1/2}$  是相对论性等离子体频率。

### 三、结果和讨论

在我们对环形自由电子激光器的分析中, 假定  $f \ll 1$ ,  $v_{||}/(R_0 \Omega_{||}) \ll 1$  和  $R_0 \gg a_0$ , 从(9)式可见环形摆动器引起的扰动是在  $z$  方向。对 TM 模来说, 其  $E_z$  分量能与这个扰动很好耦合, 这正是环形自由电子激光器产生相干辐射的基础。但对 TE 模来说, 它没有  $E_z$  分量, 所以这个扰动速度须与电磁场的  $B_r$  或  $B_\theta$  分量作用, 产生  $\theta$  或  $r$  方向的扰动再与  $E_\theta$  或  $E_r$  相耦合, 因此是二级效应, 效果就比 TM 模的直接耦合差。并且因为当  $k_{||} = 0$  时,  $B_r$  和  $B_\theta$  分量消失, 所以 TE 模的增长率为零。另一种产生 TE 模辐射的途径是利用  $v_{||}$  与摆动器场相互作用产生  $\theta$  方向的扰动, 再和  $E_\theta$  耦合, 这使 TE 模的增长率正比于  $v_{||}$ 。然而在环形自由电子激光器中已假定  $v_{||}/(R_0 \Omega_{||}) \ll 1$ , 所以这种途径产生辐射的效果也差。而对 TM 模来说, 从色散关系(12)式可见, 增长率在  $k_{||} = 0$  或  $v_{||} = 0$  时不等于零。所以我们不再对 TE 模感兴趣, 而只讨论 TM 模的情形。

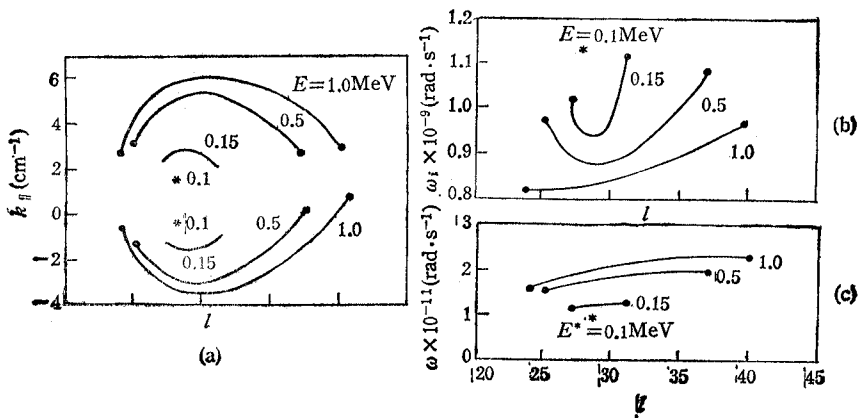


图2 轴向波数  $k_{||}$ (a), 不稳定性增长率  $\omega_i$ (b) 和辐射频率  $\omega$ (c) 随方位角模数  $l$  的变化以电子束能量  $E$  为参数  $N = 6$ ,  $a = 6.509$  cm,  $b = 5.398$  cm,  $\omega_{p0} = \omega_p r_0^{1/2} = 1.5 \times 10^9$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$ ,  $B_{||} = 0.75$  kGs,  $a_0 = 0.01 R_0$ ,  $(\beta_\theta/\beta_0)^2 = 0.95$ 。圆点代表切点, 星号代表合点 (参见正文)

从色散关系(12)式可见, TM 模的工作点由导波色散关系

$$\omega^2 = c^2 k_{\parallel}^2 + c^2 k_e^2 \tag{13}$$

和电子束波的色散关系

$$\omega = (l + N)\Omega_{\parallel} + v_{\parallel} k_{\parallel} \tag{14}$$

的交点决定为

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \gamma_{\parallel}^2 (l + N)\Omega_{\parallel} \pm \beta_{\parallel} \gamma_{\parallel} [\gamma_{\parallel}^2 (l + N)^2 \Omega_{\parallel}^2 - \omega_e^2]^{1/2} \\ k_{\parallel} &= \beta_{\parallel} \gamma_{\parallel}^2 (l + N)\Omega_{\parallel} / c \pm (\gamma_{\parallel} / c) [\gamma_{\parallel}^2 (l + N)^2 \Omega_{\parallel}^2 - \omega_e^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

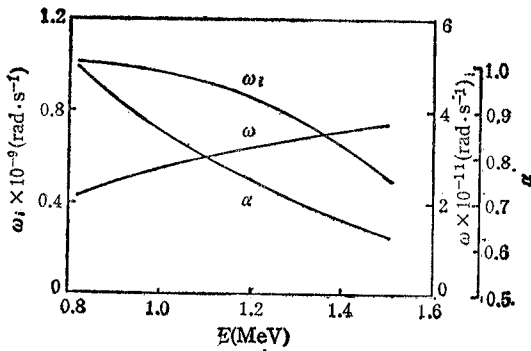


图3 增长率  $\omega_i$ , 辐射频率  $\omega$  和迴旋比  $\alpha$  随电子束能量  $E$  的变化

$l = 37$  (切点),  $B_{\parallel} = 0.7 \text{ kGs}$ , 其它参数与图2同

在交点二波的相速度相等, 其中  $\gamma_{\parallel} = (1 - \beta_{\parallel}^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel} / c$ ,  $\omega_e = ck_e$  是在电子束环空间电荷效应影响下的导波截止频率, 而相应的截止波数  $k_e$  为

$$k_e = (d_+ + d_-)l / (2a_0 R_0) + l^2 / R_0^2 \tag{16}$$

从(15)式可见, 当

$$\gamma_{\parallel} (l + N)\Omega_{\parallel} = \omega_e \tag{17}$$

时, 二波的轴向群速度  $\partial\omega / \partial k_{\parallel}$  相等并等于电子轴向速度  $v_{\parallel}$ , 二波的方位角方向群速度  $\partial\omega / \partial l$  也相等并等于电子的迴旋频率  $\Omega_{\parallel}$ . 我们称满足条件(17)式的交点为切点. 适当选择参数可使两个切点趋近于一点, 称为合点. 从能量交换的观点来看, 切点的增长率应是交点中最大的,

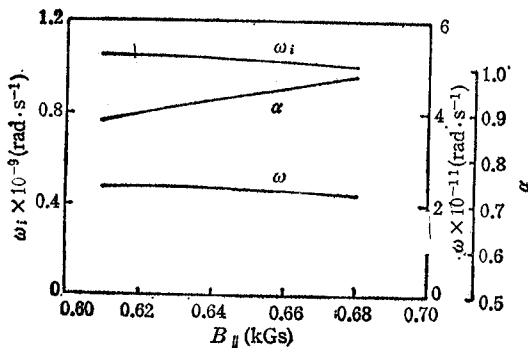


图4 增长率  $\omega_i$ , 辐射频率  $\omega$  和迴旋比  $\alpha$  随轴向磁场  $B_{\parallel}$  的变化

$l = 37$  (切点),  $E = 0.8 \text{ MeV}$ , 其它参数与图2同

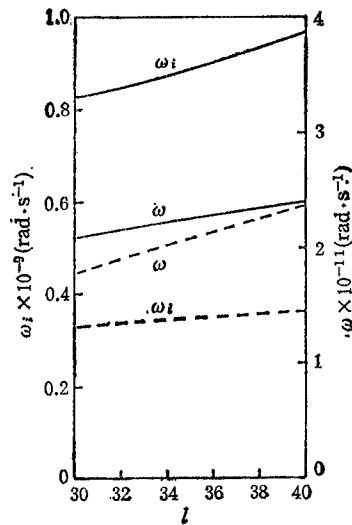


图5 增长率  $\omega_i$  和辐射频率  $\omega$  随方位角模数  $l$  的变化

实线用本文(12)式计算, 虚线用文献[2]的(23)式计算,  $E = 1.02 \text{ MeV}$ ,  $B_{\parallel} = 0.805 \text{ kGs}$ ,  $(\beta_{\theta} / \beta_e)^2 = 0.95$ , 其它参数与图2同

而合点的增长率又应是切点中最大的。数值解 TM 模的色散关系(12)式, 得到图 2, 完全证实了上述论断。注意方位角模数  $l$  是正整数, 所以(17)式不能精确满足, 切点和合点不能真正成为一个点。为了便于观察, 在图中都将分立的点联成了连续的曲线。这里我们只计算了  $k_{\parallel}$  为正的分支的增长率和相应的辐射频率。

图 3 和图 4 分别画出了  $l = 37$  的切点的增长率  $\omega_i$ , 频率  $\omega$  和迴旋比  $\alpha = \beta_{\theta}/\beta_0$  随电子束能量  $E(\beta_{\parallel} = 0.7\text{kGs})$  和轴向磁场  $B_{\parallel}(E = 0.8\text{ MeV})$  的变化, 其它参量与图 2 相同。由图 3 可见, 由于同轴波导场的三维作用和电子束空间电荷效应, 辐射频率和能量的关系已不是平方关系; 当  $\alpha = 1$ , 即  $v_{\parallel} = 0$  时, 增长率达到最大值, 这正是环形自由电子激光器所预期的结果。由图 4 可见, 当电子束能量不变时, 轴向磁场的变化对切点增长率和辐射频率的影响不大。

图 5 是用本文的考虑空间电荷效应的 TM 模色散关系 (12)式和文献[2]中不考虑空间电荷效应的 TM 模色散关系(23)式, 在可以比较的参量范围内计算得到的增长率  $\omega_i$  和辐射频率  $\omega$  随方位角模数  $l$  的变化关系。由图 5 可见在一定的条件下空间电荷效应有提高辐射频率和增长率的作

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Y. Z. Yin, G. Bekefi, *Phys. Fluids*, **28**(1985)4, 1186—1192.
- [ 2 ] Y. Z. Yin et al., *IEEE J. of QE*, **QE-23**(1987)9, 1610—1616.
- [ 3 ] H. Saito, J. S. Wurtele, *Phys. Fluids*, **30**(1987)7, 2209—2220.
- [ 4 ] H. Saito, Y. Z. Yin, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.* **A272**(1988)1/2, 319—322.
- [ 5 ] L. S. Schuetz et al., *Phys. Fluids*, **31**(1988)6, 1720—1726.
- [ 6 ] W. W. Destler et al., *Phys. Fluids*, **28**(1985)6, 1962—1967.
- [ 7 ] R. Chojnacki, W. W. Destler, *IEEE J. of QE*, **QE-23**(1987)9, 1605—1726.

## THEORY OF CIRCULAR FREE ELECTRON LASER WITH AN INTENSE RELATIVISTIC NONNEUTRAL ELECTRON RING

Yin Yuanzhao

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080)

**Abstract** The working properties of a circular free electron laser with an intense relativistic nonneutral electron ring have been investigated with in the framework of the Vlasov-Maxwell equations. The results show that the space charge of intense electron beam can enhance the radiation growth rate and frequency.

**Key words** Circular free electron laser; Nonneutral electron ring; Space charge effect