

QAM 信号的非数据辅助信噪比估计方法

许 华 樊龙飞 郑 辉

(西南电子电信技术研究所 现代信号处理国家重点实验室 成都 610041)

摘 要: 该文利用统计量的知识, 推导了 QAM 信号在加性高斯白噪声信道且星座任意一点的发送概率相同条件下的非数据辅助(盲)信噪比估计算法。文章以 128QAM 信号为例进行了具体的分析和计算机仿真, 分析和仿真的结果表明该算法对实际感兴趣的信噪比范围都可进行有效估计。

关键词: QAM 信号, 信噪比估计, 数据拟合

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)02-0202-04

The NDA SNR Estimation for QAM Signals

Xu Hua Fan Long-fei Zheng Hui

(The National Key Laboratory of Modern Signal Processing,

Southwest Inst. of Electron & Telecom. Tech., Chengdu 610041, China)

Abstract This paper deduces the NDA SNR estimation algorithm for QAM signals in additive Gaussian white noise channel and on the condition of the equivalent *a priori* probability of transition signals positioning on every constellation point by using statistics. And the detail analysis and computer simulation for 128QAM signals are done. It is proved that the whole range interested in practice can be estimated by this algorithm.

Key words QAM signals, SNR estimation, Data fitting

1 引言

对接收信号的信噪比估计有利于在解调时采用更为合适的均衡、同步和译码方法或者利用信噪比信息可建立一种自适应的解调算法来提高解调性能。QAM 信号特别是高阶的 QAM 信号由于星座形式比较复杂, 解调相对比较困难, 并且各种信噪比下, 不同的解调算法有不同性能, 因此在 QAM 信号解调时, 对其信噪比进行准确的估计, 并利用这些信噪比信息将会给解调性能的提高带来相当的好处。对调制信号的信噪比估计已有文章进行了研究; Summer 和 Wilson 对 BPSK 信号的信噪比估计进行了研究, 提出了在加性高斯白噪声信道条件下 BPSK 信号的盲信噪比估计方法^[1]; 在前者工作的基础上, Ramesh 等采用与文献[1]类似的分析方法, 推导了 BPSK 信号在一般 Nakagami 衰落信道的盲信噪比估计方法^[2]。文献[3]讨论了 QPSK 信号在加性高斯白噪声信道和有训练序列的慢衰落信道的简易估计方法。由于 QAM 信号是相位和幅度同时调制的信号, 其星座形式(特别是高阶 QAM 信号)比 PSK 信号要复杂得多, 所以对 BPSK 及 QPSK 信号的信噪比估计方法不适用于 QAM 信号。本文通过使用与文献[1,2]相似的统计量方法推导得到了适用于 QAM 信号在加性高斯白噪声信道非数据辅助的(或称为盲)

信噪比估计算法。

2 算法

2.1 基本算法推导

在接收机中, 匹配滤波后的波特率抽样信号 r_k 是需要进行信噪比估计的目标信号。理想条件下, 当接收机处于完全均衡和完全同步的情况下, r_k 符合加性高斯白噪声的条件; 而在现实条件下, 当均衡和同步存在的剩余误差足够小时, 也不会对信噪比的估计造成大的影响, 可近似认为符合加性高斯白噪声条件^[4]。那么 r_k 可表示为

$$r_k = a_k + n_k, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1)$$

这里 a_k 是真实的星座信号, n_k 是零均值的复高斯白噪声, 其实部和虚部的方差都为 σ^2 。

将式(1)实部和虚部分别考虑, 式(1)可重新写成:

$$\left. \begin{aligned} r_{k_I} &= a_{k_I} + n_{k_I} \\ r_{k_Q} &= a_{k_Q} + n_{k_Q} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式中, 下标 I 表示实部(即同相部分), 下标 Q 表示虚部(即正交部分)。由于 QAM 信号的星座是对称的, 其信号实部和虚部的平均功率相同。于是可得到

$$\text{SNR} = P_{\text{QAM}} / 2\sigma^2 = P_{\text{QAM}_I/Q} / \sigma^2 = \lambda \quad (3)$$

P_{QAM} 表示 QAM 信号平均接收功率, $P_{\text{QAM}_I/Q}$ 为实部和虚部的平均接收功率, 信号实部和虚部的信噪比与信号的信噪比相同。由于 QAM 星座中各个星座点的发射概率相同, 因此

在落在实轴和虚轴上各幅度值的概率也是已知的, 那么对于各种星座形式的 QAM 信号来说, P_{QAM} 是可以推导出来的。将式(1)重写为

$$r_{k-1/Q} = \pm \alpha_{k-1/Q} A_{\text{max}} + n_{k-1/Q} \quad (4)$$

其中取+、-号的概率分别是 1/2, A_{max} 为实部和虚部的最大幅度值而 $\alpha_{k-1/Q}$ 表示接收幅度值相对于最大幅度值的比例系数, $\alpha_{k-1/Q}$ 的取值在向量 α 中而对应的概率在向量 β 中。由于星座的对称性, 实部和虚部的 α 和 β 相同, 那么对于 16QAM, $\alpha_{16\text{QAM}} = [1/3, 1]$, $\beta_{16\text{QAM}} = [1/2, 1/2]$ 。十字型星座 α 的取值的概率 β 相对于方形星座会有所不同, 例如对于 32QAM 信号, $\alpha = [1/5, 3/5, 1]$, 取值概率 $\beta = [3/8, 3/8, 2/8]$, 对于一般十字星座的 MQAM 信号的 β 值由以下规则来确定, 即 α 的前 $2/3 \times L(\alpha)$ 个取值的概率为 $9/(8L(\alpha))$; α 的后 $1/3 \times L(\alpha)$ 个取值的概率为 $3/(4L(\alpha))$ 。于是 $P_{\text{QAM}, 1/Q}$ 的计算也可以通过 α , β 和 A_{max} 的取值来表示:

$$P_{\text{QAM}, 1/Q} = \text{SQ}(\alpha) \beta^T A_{\text{max}}^2 = \gamma A_{\text{max}}^2 \quad (5)$$

这里运算符 SQ 表示当 $\delta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]$ 时, $\text{SQ}(\delta) = [\eta_1^2, \eta_2^2, \dots, \eta_N^2]$ 。符号 $\gamma = \text{SQ}(\alpha) \beta^T$, N 为 α 的长度, 上标 T 表示转置。于是

$$A_{\text{max}}^2 = P_{\text{QAM}, 1/Q} / \gamma \quad (6)$$

下面将常见的 QAM 信号的向量, α , β 及 γ 值在表 1 中列出。采用与文献[1]相同的分析方法, 考虑 r_k 平方的均值和 r_k 绝对值的均值, 不难得到

$$E(r_{k-1/Q}^2) = P_{\text{QAM}, 1/Q} + \sigma^2 \quad (7)$$

对于 $|r_{k-1/Q}|$ 均值的计算要困难得多, 由于式(4)中取+、-号的概率分别是 1/2, 那么

$$E(|r_{k-1/Q}| | \alpha_{k-1/Q}, n_{k-1/Q}) = \frac{1}{2} E(|-\alpha_{k-1/Q} A_{\text{max}} + n_{k-1/Q}|) + \frac{1}{2} E(|\alpha_{k-1/Q} A_{\text{max}} + n_{k-1/Q}|) \quad (8)$$

将 $\alpha_{k-1/Q}$ 看作一个定值 a , a 可为向量 α 中的任意值, 那么可以得到

$$E(|-\alpha_{k-1/Q} A_{\text{max}} + n_{k-1/Q}| | \alpha_{k-1/Q} = a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |-\alpha_{k-1/Q} A_{\text{max}} + x| \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (9)$$

$$= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{a^2 A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} + a A_{\text{max}} \left[\text{erf} \left(a \sqrt{\frac{A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} \right) \right]$$

相似的推导可以得到

$$E(|\alpha_{k-1/Q} A_{\text{max}} + n_{k-1/Q}| | \alpha_{k-1/Q} = a) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{a^2 A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} - a A_{\text{max}} \left[\text{erf} \left(a \sqrt{\frac{A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \quad (10)$$

注意到 $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$, 那么式(9)与式(10)完全相同, 于是

$$E(|r_{k-1/Q}| | \alpha_{k-1/Q} = a) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a^2 A_{\text{max}}^2 / (2\sigma^2)} + a A_{\text{max}} \left[\text{erf} \left(a \sqrt{\frac{A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \quad (11)$$

在 α 上对 $E(|r_{k-1/Q}|)$ 求期望, 可得

$$E(|r_{k-1/Q}|) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\text{SQ}(\alpha) A_{\text{max}}^2 / (2\sigma^2)} \beta^T + \left[a A_{\text{max}} \otimes \text{erf} \left(a \sqrt{\frac{A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \beta^T \quad (12)$$

这里 \otimes 表示数组乘, 即当 $\delta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]$, $\varepsilon = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]$ 时, $\delta \otimes \varepsilon = [\eta_1 \xi_1, \eta_2 \xi_2, \dots, \eta_N \xi_N]$; 根据式(7)和式(12)得到,

$$\frac{E(r_{k-1/Q}^2)}{[E(|r_{k-1/Q}|)]^2} = \frac{1 + P_{\text{QAM}} / \sigma^2}{\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\text{SQ}(\alpha) A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} \beta^T + \left[a \sqrt{\frac{A_{\text{max}}^2}{\sigma^2}} \otimes \text{erf} \left(a \sqrt{\frac{A_{\text{max}}^2}{2\sigma^2}} \right) \right] \beta^T \right\}^2} \quad (13)$$

将式(3), 式(6)带入式(13)并令 $z = E(r_{k-1/Q}^2) / [E(|r_{k-1/Q}|)]^2$

计算得到

$$z = \frac{1 + \lambda}{\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\text{SQ}(\alpha) \lambda}{2\gamma}} \beta^T + \left[a \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \otimes \text{erf} \left(a \sqrt{\frac{\lambda}{2\gamma}} \right) \right] \beta^T \right\}^2} = f(\lambda) \quad (14)$$

因此, 通过两个简单的统计计算(即 r_k 平方的均值和 r_k 绝对值的均值)可得到函数 $f(\lambda)$ 的值(即 z 值), 这就给了我们一个估计 λ 的方法, 即 $\lambda = g(z)$, 其中 $g(\cdot) = f^{-1}(\cdot)$, 若 λ 单位取分贝, 那么 $\lambda = 10 \lg(g(z))$, 可以写成 $\lambda = g_1(z)$; 但是由于计算的复杂性, 很难从式(14)和统计值得到一个闭式解, 但是可以通过数据拟合的方法, 在 λ 的一段取值范围内进行多项式近似。

表 1 常见 QAM 信号的向量 α 和 β 的值及计算得到的 γ

星座名称	α 值	β 值	γ
16QAM	[1/3, 1]	[1/2, 1/2]	5/9
32QAM	[1/5, 3/5, 1]	[3/8, 3/8, 2/8]	2/5
64QAM	[1/7, 3/7, 5/7, 1]	[1/4, 1/4, 1/4, 1/4]	3/7
128QAM	[1/11, 3/11, 5/11, 7/11, 9/11, 1]	[3/16, 3/16, 3/16, 3/16, 2/16, 2/16]	41/121
256QAM	[1/15, 3/15, 5/15, 7/15, 9/15, 11/15, 13/15, 1]	[1/8, ..., 1/8]	17/45

2.2 多项式近似

信噪比λ的估计中利用的近似多项式，对于估计的效果是非常重要的，其与真实的z与λ的关系越接近，估计的效果越好，但此多项式导出的过程比较复杂，下面以128QAM信号为例，对近似多项式导出过程中进行分析。图1中由式(14)得到的z与信噪比λ的真实的关系可看出，我们几乎不可能用多项式来近似整个信噪比范围内z与信噪比的关系。但实际中并不需要在整个信噪比范围内进行估计，而只需要估计我们感兴趣的信噪比范围，这样就只需多项式近似这一段信噪比内λ与z的关系就足够了。例如对于128QAM信号，我们感兴趣的信噪比范围在5dB之上，因为在信噪比小于5dB的情况下解调128QAM信号不可能达到基本的误码率要求^[5]；另外，信噪比为30dB时可达到的误码性能已经相当的优越，所以高于30dB的情况也没有必要再进行区别。

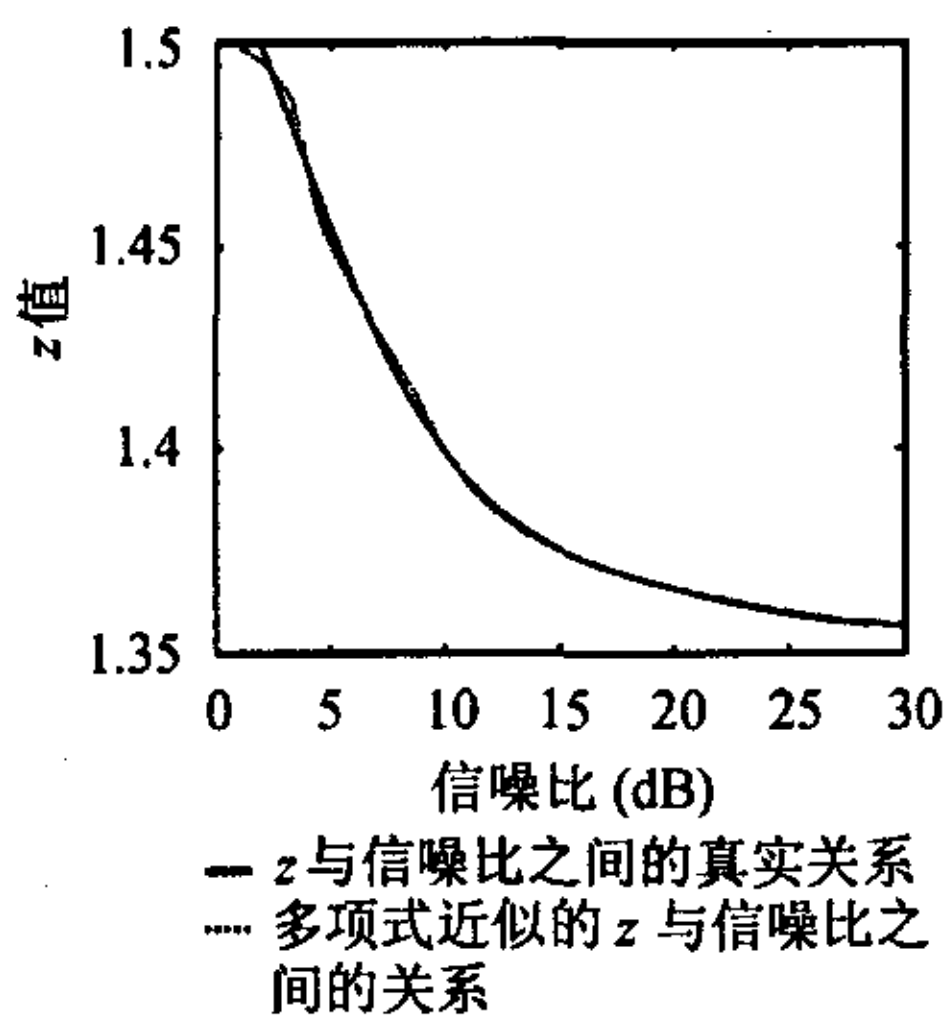


图1 五阶多项式近似和z与信噪比真实关系的比较

于是一方面估计的范围越窄就越精确，另一方面估计的范围必须包括我们感兴趣的信噪比范围，通过多方面的权衡考虑，将可估计的信噪比范围设为[6,29]dB。我们选用一个五阶多项式来近似 $g_1(\cdot)$ 式，得到

$$\lambda \approx \lambda_1 = (-0.08326073285445z^5 + 0.59784437788812z^4 - 1.71678805688159z^3 + 2.46454477994827z^2 - 1.76868031907834z + 0.50762844844907) \times 10^8 \quad (15)$$

这个多项式用于近似z与λ之间的关系已相当精确，如图1所示。

对于z这个比例值的估计可以通过相对应的使用一段数据的平均来代替均值，即使用 $\hat{z} = \overline{r_{k-1/Q}^2} / \overline{|r_{k-1/Q}|^2}$ 代入式(15)来估计λ值，这里 \hat{z} 为z的估计值。在处理符合前面所述条件的QAM星座信号时，仅使用实部或虚部就可得到估计结果，但很明显，有用的接收信息没有被利用完全，只有将实部和虚部联合起来估计才是最有效的，于是有

$$\hat{z} \approx \frac{\overline{r_{k-1}^2}}{\overline{|r_{k-1}|^2}} \approx \frac{\overline{r_{k-Q}^2}}{\overline{|r_{k-Q}|^2}} \approx \frac{\overline{r_{k-1}^2} + \overline{r_{k-Q}^2}}{\overline{|r_{k-1}|^2} + \overline{|r_{k-Q}|^2}} \quad (16)$$

综上所述，对128QAM信号的信噪比估计的算法可概括为：第1步，利用式(16)得到 \hat{z} 值；第2步，将 \hat{z} 值代入到式(15)计算近似的λ值，即得到估计的信噪比值。

其它QAM信号的信噪比估计可完全按照对128QAM信号的处理方法来进行。下面，通过计算和优选分别列出了用于各种常用的QAM星座信号信噪比估计的近似多项式，及其可估计的信噪比范围见表2（并不唯一）。

2.3 算法分析及改进

通过前面的推导知道，即使得到真实的z值，通过近似多项式得到的估计值 λ_1 也并不是真实值λ。通过实际数据得到的 \hat{z} 是在真实的z值上下浮动其均值为z，那么通过本文算法得到的信噪比估计值的均值为 λ_1 （不等于λ），所以该算法不是无偏估计。但由于λ与 λ_1 非常接近（如图1），所以可近似认为是无偏估计。对观察数据长度的选择是必须关注的问题，因为本算法是以假设接收信号在各星座点的先验概率相等为条件的，这个条件的满足要求观察数据必须足够长，才能得到准确的估计值；另一方面如果观察数据太长，即每次估计的时间间隔太长又有可能不能满足某些应用的需要，所以选一个比较适中的观察数据长度是必要的。

表2 多种常用的QAM信号信噪比估计的范围及近似多项式

QAM 类型	估计区间	信噪比估计的近似多项式系数
16QAM	[-5, 25]dB	$10^6 \times [-0.15754733577429 \quad 1.11443917205626 \quad -3.15058685360317 \quad 4.44971364753870 \quad -3.13973289909828 \quad 0.88550169381623]$
32QAM	[-2, 26]dB	$10^7 \times [-0.06726463775869 \quad 0.48516705657862 \quad -1.39923668805574 \quad 2.01698064642792 \quad -1.45321781504046 \quad 0.41867687527156]$
64QAM	[-2, 26]dB	$10^7 \times [-0.06269092767054 \quad 0.45209402074710 \quad -1.30360836457037 \quad 1.87876500236800 \quad -1.35334801189529 \quad 0.38981236068496]$
128QAM	[6, 29]dB	式(15)的系数
256QAM	[7, 29]dB	$10^8 \times [-0.14959826701965 \quad 1.05096403007305 \quad -2.95264626591081 \quad 4.14674902624033 \quad -2.91123632604927 \quad 0.81735616092913]$

虽然不对信噪比在区间[6,29]dB 以外的信噪比进行估计,但是这种情况是有可能存在的,于是可以把信噪比高于 29dB 的情况全都估计为 29dB,把信噪比低于 6dB 的情况全都估计为 6dB。注意到 $\lambda \in [6,29]$ dB 对应 z 的范围是[1.3567, 1.4389],这样可将算法进行改进。首先对 \hat{z} 值进行判决,当 $\hat{z} < 1.3567$ 时,令 $\hat{z} = 1.3567$;当 $\hat{z} > 1.4389$ 时,令 $\hat{z} = 1.4389$;然后再执行前面所述算法的第 1 和第 2 步。

3 仿真试验及性能分析

下面使用 Monte Carlo 方法对 128QAM 的信噪比估计算法进行仿真。首先用估计信噪比的均值与真实值进行比较,如图 2,整个估计的信噪比范围内,均值与真实值都非常接近,证明该算法可近似为无偏估计。其次通过仿真得到不同观察数据长度时信噪比估计的标准差来表征估计性能。从图 3,图 4 可以看出该算法只要观察数据长度足够,就可对 128QAM 信号的信噪比进行有效估计,随着观察数据长度变长,估计性能也逐步变好,那么可以根据实际中对估计精度和实时性的要求来决定 L 的取值。从图 3 和图 4 的对比明显可以看出利用实部和虚部的数据进行估计比仅仅利用实部数据进行估计得到的结果有较大的性能提升。

对于[6,29]dB 的估计区间,它们的估计性能也并不是相同,明显可以看出,在低信噪比条件下的估计性能要好一些。这主要是由于图 1 中信噪比在大于 10dB 以后,随着它的增大, z 值下降的速度逐渐变小,这样,微小的 \hat{z} 的误差就将形成信噪比大的估计偏差,所以对大信噪比值的估计性能下降。改进的算法得到估计性能如图 5,与原算法图 4 的性能对比,发现通过改进算法使可估计信噪比范围内的性能特别是大信噪比值的估计性能有了一定的提升。

其它 QAM 信号的信噪比估计,总体来说,信号星座形式越简单,同等估计效果需要的观察数据长度越短;待估计的信噪比范围越小,估计范围内的信噪比与 z 值的关系越陡

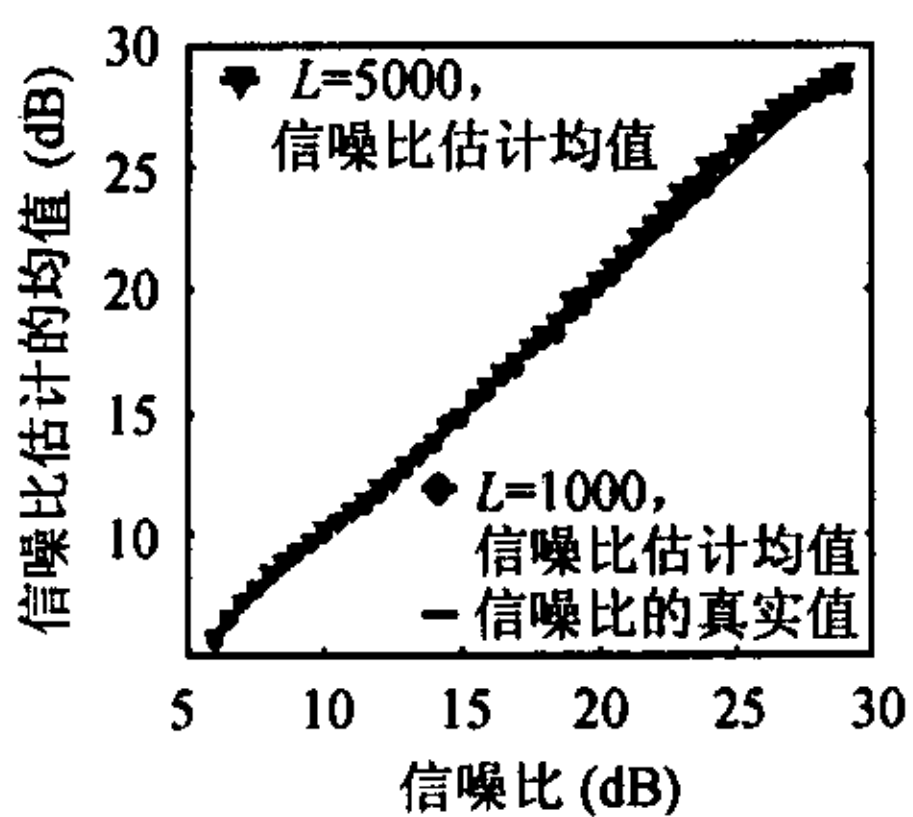


图 2 128QAM 信噪比估计均值与真实值的关系

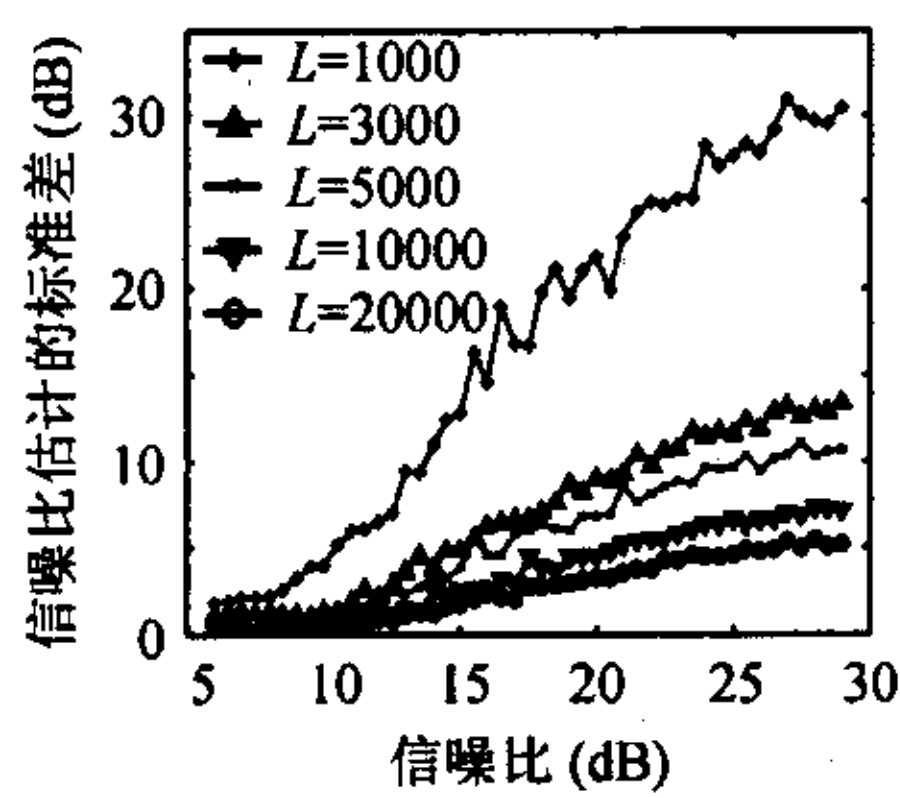


图 3 对 128QAM 估计时不同观察数据长度的估计性能比较(仅利用实部数据)

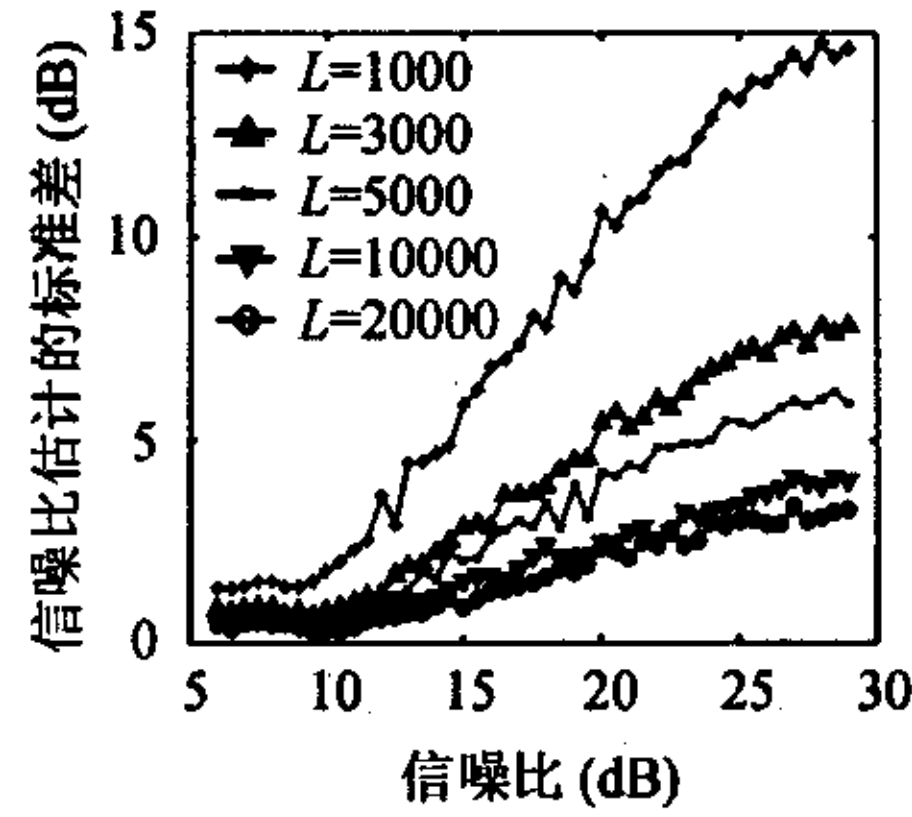


图 4 对 128QAM 估计时不同观察数据长度的估计性能比较(利用实部和虚部)

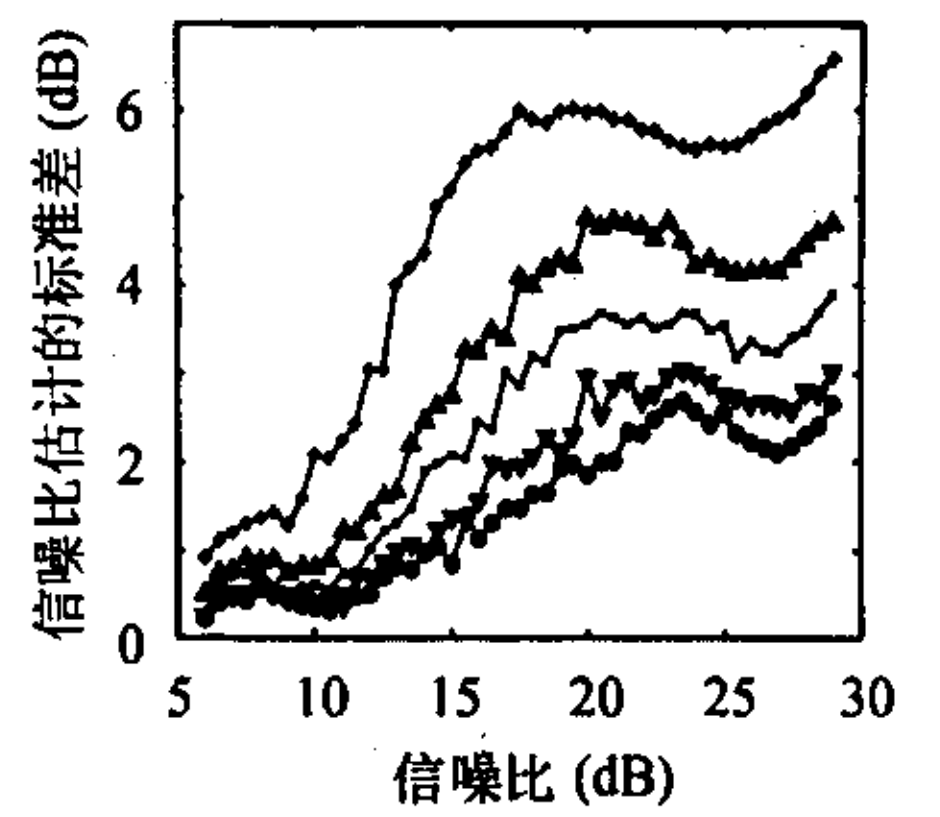


图 5 采用改进算法的估计性能(利用实部和虚部)

峭,其估计效果越好;相反估计的难度越大,效果越差。这一点本文不再详细讨论。

4 结束语

相对于其它简单星座信号,对 QAM 信号的特别是高阶 QAM 信号的信噪比估计难度较大,本文提出了对于 QAM 信号的信噪比估计算法,该算法简单可靠,适用于各种 QAM 星座信号,在我们感兴趣的信噪比范围内都可进行有效的估计,且只要观察数据足够长,就可以达到相当的精度,满足对 QAM 信号自适应解调的要求。

参 考 文 献

- [1] Summer T A, Wilson S G. SNR mismatch and online estimation in turbo decoding. *IEEE Trans. on Communications*, 1998, COM-46(4): 421 - 423.
- [2] Ramesh A, Chockalingam A, Milstein L B. SNR estimation in generalized fading channels and its application to turbo decoding. *Proc. IEEE ICC*, 2001, Helsinki, Finland, 2001: 1094 - 1098.
- [3] Shin Dong-Joon, Sung Wonjin, Kim In-Kyung. Simple SNR estimation methods for QPSK modulated short bursts. *Proc. IEEE Globalcom*, 2001, San Antonio, Texas, USA, 2001: 3644 - 3647.
- [4] Jablon N K. Joint blind equalization, carrier recovery, and timing recovery for high-order QAM signal constellations. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1992, 40(6): 1383 - 1398.
- [5] John G. Proakis *Digital Communication*. 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1995: 278 - 282.

许 华: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向: 盲信号处理技术、短时突发解调技术。
 樊龙飞: 男, 1964 年生, 高工, 博士后, 研究方向: 自适应信号处理、调制与编码、数据传输。
 郑 辉: 男, 1957 年生, 高工, 博士生导师, 研究方向: 多媒体通信、盲信号处理、移动通信技术。