

# 用边界元法计算任意截面 TEM 波传输线的特性\*

周文表

(中国科学院电子学研究所)

## 一、引言

电磁场问题的数值计算方法是近年来电磁理论领域中很活跃的分支之一。由于分析天线、新颖传输线、微波集成电路等的需要,各种新的有效计算方法不断出现。其中在七十年代随着结构力学分析的需要而迅速发展起来的边界元法<sup>[1,2]</sup>,已在位势理论和电磁波电路的分析中得到了日益广泛的应用<sup>[3,4]</sup>。

本文用边界元法分析了任意截面 TEM 波传输线的特性。这类传输线的应用价值是不言而喻的,它虽可用差分法<sup>[5]</sup>、有限元法<sup>[6]</sup>以及矩量法<sup>[7]</sup>等来分析,但从后面介绍的计算结果可以看出,用边界元法来分析,有所需节点数目少、内存小,而计算速度快、精度高的优点,因此边界元法是一种值得推广的方法。此外边界元法还可与有限元法等其它方法联合应用,且适于处理无穷边界问题,因此可以预期边界元法将在电磁波电路分析中获得更加广泛的应用。

文中首先介绍位势理论中的普遍的边界元法,并由弱解形式的加权残数法导出边界元法的基本边界方程,然后采用线性边界元素把基本方程离散化,得到矩阵方程;再由高斯消去法求解矩阵方程,得出边界节点上未知的位势及其外法向的导数值,从而求出任意截面 TEM 波传输线单位长的电容和特性阻抗。此外,还可求出导体表面最强电场强度及其位置。

## 二、位势理论中的边界元法

### 1. 基本关系式

设  $u$  为位函数,由位势理论, $u$  在所考虑的域  $\Omega$  内应满足微分方程

$$\nabla^2 u = 0, \quad (1)$$

并须满足边界条件(图 1)

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}, & \text{在边界 } \Gamma_1 \text{ 上;} \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, & \text{在边界 } \Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1 \text{ 上;} \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\nabla^2$  是拉普拉斯算子, $n$  是边界  $\Gamma$  上外向单位法线。

\* 1985年9月13日收到,1986年2月15日修改定稿。

设函数  $v$  为权函数, 则由附加条件下弱解形式的加权残差法得<sup>[1]</sup>

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) v d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) v d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma. \quad (3)$$

分部积分两次可得

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 v) u d\Omega = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} v q d\Gamma, \quad (4)$$

式中  $q \equiv \frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $q^* \equiv \frac{\partial v}{\partial n}$ . (4) 式便是边界元法的出发点方程. 实际上该式亦可由格林公式导出, 因而边界元法实质上是边界积分方程法与有限元法的离散技术相组合的结果.

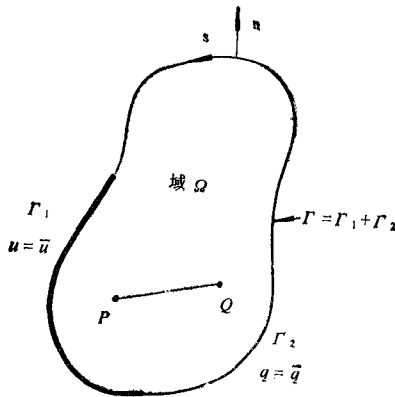


图 1 域  $\Omega$  和边界  $\Gamma$

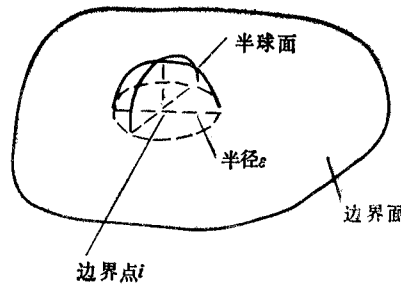


图 2 推导边界点电位的参考图

若以  $Q$  点的点电荷在  $P$  点产生的电位  $u^*(P, Q)$  作为 (4) 式中的权函数  $v$ , 可得

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Omega} -\delta(P, Q) u d\Omega = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = -u(P) \quad (5a)$$

或

$$u(P) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma. \quad (5b)$$

$u^*(P, Q)$  称为由拉普拉斯算子表示的微分方程的基本解. 这说明  $\Omega$  域内任一点  $P$  的位函数  $u$  可由边界值和基本解沿边界的积分表示. 对于三维问题,

$$u^*(P, Q) = \frac{1}{4\pi r}; \quad (6)$$

对于二维问题,

$$u^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}; \quad (7)$$

式中  $r$  是点  $P$  与点  $Q$  之间的距离.

## 2. 边界上的积分方程

若点  $i$  位于边界  $\Gamma$  上, 可考虑图 2 所示的三维域边界上的半球面. 边界点  $i$  位于球的中心. 这时可应用 (5) 式. 但当球面半径  $\epsilon$  趋于零时, 即可得边界点  $i$  的电位表达式:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma, \quad (8)$$

对光滑边界  $c_i = 1/2$ , 对一般的二维情况  $c_i = 1 - \theta/2\pi$ . (8)式把边界上任一点的电位与边界上其它各点的电位及其法向导数联系起来。

### 3. 边界元法

为简单起见, 考察图 3 的二维情况. 把边界由  $n$  段直线(称为元素)近似表示. 假设在每个直线段内, 函数  $u$  和  $q$  线性变化(线性元素), 两个元素的交点称为节点, 则对于近似的边界应用(8)式可得

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma. \quad (9)$$

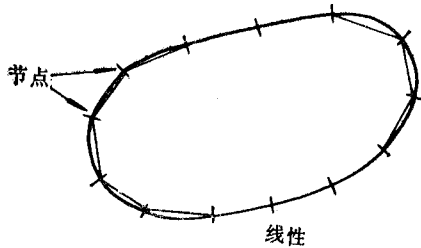


图 3 二维域的线性边界元素

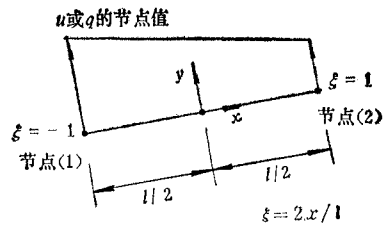


图 4 线性边界元素

考虑图 4 所示的任意一个元素. 元素上任一点的  $u$  和  $q$  值可由其节点值和线性内插函数  $\phi_1$  和  $\phi_2$  决定

$$u(\xi) = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$q(\xi) = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi), \quad (12)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi). \quad (13)$$

无量纲坐标  $\xi = 2x/l$ ,  $l$  是元素的长度.

把上列各式代入(9)式可得

$$[H] [u] = [G] [Q] \quad (14)$$

式中矩阵元为

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j; \\ \hat{H}_{ij} + c_i, & i = j; \end{cases} \quad (15)$$

$$\hat{H}_{ij} = h_{i1,j} + h_{i2,i-1}; \quad (16)$$

$$G_{ij} = g_{i1,i} + g_{i2,i-1}; \quad (17)$$

$$h_{11,i} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma, \quad (18)$$

$$h_{12,i} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma, \quad (19)$$

$$g_{11,i} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma, \quad (20)$$

$$g_{12,i} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma. \quad (21)$$

可见在边界上应用与有限元法相类似的方法可把(8)式离散化,并得出矩阵方程(14)式。应用高斯消去法即可求出边界上各节点的函数值 $u$ 和 $q$ 。进而由(5)式求出域内任意点的函数值。

### 三、对任意截面 TEM 波传输线特性的计算

任意截面 TEM 波均匀传输线的分析可归结为求解横截面内的拉普拉斯方程<sup>[9]</sup>。当导体表面的法向电场强度为已知时,可由高斯定理求出导体上的总电荷 $Q$ ,从而可求出单位长度的线电容 $C$ ,并可由下列关系求出特性阻抗 $Z_0$ 。

$$Z_0 = \frac{1}{v_\phi C}, \quad (22)$$

式中 $v_\phi$ 是电磁波在均匀介质中的传播速度。

因为边界元法在求解过程中已得出了导体边界上的法向电场强度 $q$ ,因而用它计算这类传输线问题是特别有效的。用边界元法的符号可得

$$Q = \int_{\Gamma} \epsilon_r q d\Gamma, \quad (23)$$

$$C = \frac{Q}{V_0}. \quad (24)$$

$V_0$ 是导体之间的电位差。

### 四、数值计算结果

为了了解边界元法的计算精度与节点数目之间的关系,首先对几种有已知理论结果的传输线进行计算,并作对比。

#### 1. 同轴线

表1给出了取不同节点数时,用边界元法计算普通同轴线特性阻抗的结果,同时还给出了用矩量法计算的结果<sup>[7]</sup>和理论值,以作对比。由表1数据可知,边界元法只需取较少的节点就可得到较高的精度。

#### 2. 椭圆截面同轴线

表2是用边界元法计算椭圆截面同轴线的特性阻抗的结果与用矩量法计算的结果和理论值的比较。也得出上述同样的结论。

虽已有准确公式可计算同轴线和椭圆截面同轴线的特性阻抗,但当分析内外导体偏心引起的影响以及需要知道最强电场强度的位置和大小等问题时,数值计算方法还是很需要的。而在实用上有重要意义的一些特殊截面传输线,如矩形同轴线、内矩外圆或内圆

表 1 用不同方法获得的同轴线特性阻抗的比较

 $(b = 8\text{mm}, a = 3.5\text{mm})$ 

方 法	节 点 数	$Z_0(\Omega)$	百分误差(%)
理论值 <sup>[6]</sup>		49.566	
矩量法 <sup>[7]</sup>	30	51.297	3.4923
	50	50.088	1.0531
边界元法	16	49.5388	-0.0549
	30	49.5856	0.0395
	40	49.5655	-0.0010

表 2 用不同方法获得的椭圆截面同轴线特性阻抗的比较

 $a_1 = 1.25 \quad a_2 = 2.0 \quad b_1 = 0.75 \quad b_2 = 1.73205$ 

方 法	节 点 数	$Z_0(\Omega)$	百分误差(%)
理论值 <sup>[8]</sup>		37.428	
矩量法 <sup>[7]</sup>	30	39.126	4.537
	50	37.745	0.847
边界元法	16	37.3889	-0.104
	30	37.4548	0.072
	40	37.4460	0.050

外矩同轴线, 内矩外椭或内椭外矩同轴线以及接地平面上方的导线等均可用边界元法分析。下面是一些典型传输线的计算结果。

### 3. 内矩外圆同轴线

内导体为矩形柱外导体为圆柱面的同轴线如图 5 所示。对这种结构的同轴线文献 [9] 用保角变换法得出了理论结果。但所得理论公式不但涉及雅可比椭圆积分, 而且也必须借助计算机才能作准确的数字计算, 此外, 还没有给出偏心、椭圆度等的公差计算。边界元法的数值计算则可给出这些信息, 因而具有较大实用价值的。表 3 是对一些不同尺寸同轴线的计算结果, 并与文献 [9] 的结果作了对比。

表 3 内矩外圆同轴线的特性阻抗 ( $a = b$ )

$a/R$	边界元法	保角变换法 <sup>[9]</sup>	
		下限 min	上限 max
0.05	170.8473	169.665	169.665
0.1	128.0946	128.105	128.106
0.2	86.4828	86.5195	86.5799
0.3	62.2376	62.0827	62.3958
0.4	44.9542	44.4797	45.4736
0.5	31.3712	30.2867	32.7373
0.6	19.7839	17.5569	22.8512
0.7	7.2291	2.6188	15.0764

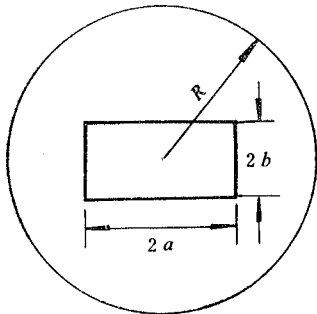


图 5 内矩外圆同轴线

当考虑公差计算时, 可计算图 6 所示的外导体为椭圆、内导体为矩形的同轴线。对于某一特定尺寸, 表 4 给出了公差影响的计算结果。由表可见对这一尺寸, 内导体从正方形

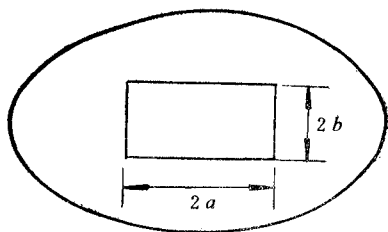


图6 内矩外椭圆同轴线

表4 内矩外圆同轴线的公差影响

$a$	$b$	$a_2$	$b_2$	$Z_0(\Omega)$
0.7	0.7	1.0	1.0	52.7145
0.64	0.76	1.0	1.0	52.7445
0.7	0.7	0.9	1.1	51.5072
0.64	0.76	0.9	1.1	51.8628
0.64	0.76	1.1	0.9	51.2060
0.6	0.8	1.0	1.0	52.7901

变为矩形时,对特性阻抗的影响不大. 但外导体变为椭圆时,对特性阻抗有较大的影响.

#### 4. 内圆外矩同轴线

内导体为圆柱外导体为矩形柱的同轴线如图7所示. 其特性阻抗已由文献[10]计算过. 图8给出了边界元法的计算结果,并与文献[10]的结果作了比较,可见符合的较好.

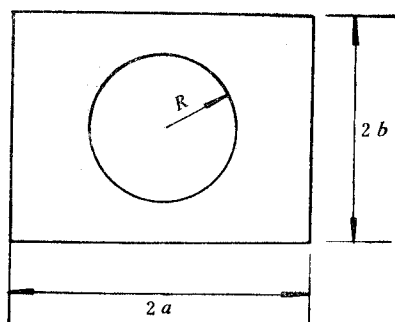
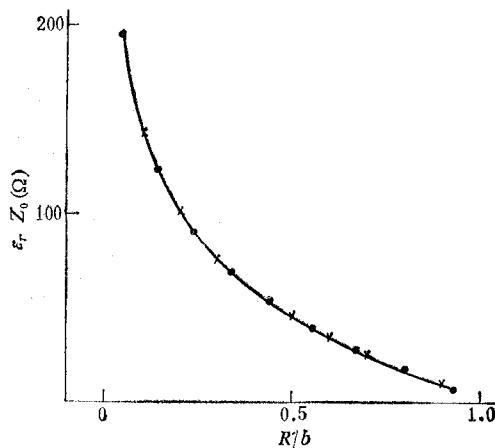


图7 内圆外矩同轴线

图8 内圆外矩同轴线的特性阻抗 ( $b = a$ )

×——文献[10] ●——边界元法

#### 5. 矩形同轴线

矩形同轴线的结构如图9所示. 格林 (Green) 曾用有限差分法作了分析<sup>[11]</sup>. 用边界元法计算的结果与用有限差分法(以及变分法)计算的结果的比较如表5所示. 可见二者相当一致. 但用边界元法,所需节点数要少得多,可大大节省计算时间.

作为特例的正方形同轴线的计算结果如图10所示,并与保角变换法、变分法、有限差分法的结果作了比较.

表 5 用不同方法计算矩形同轴线所得结果的比较 ( $t/b = 0.2$ ,  $b/a = 0.25$ )

$w/b$	有限差分法 <sup>[11]</sup>	边界元法	变分法 <sup>[12]</sup>
0.4	79.03	79.2310	
0.6	65.27	65.1559	
0.8	55.62	55.6445	
1.0	48.47	48.4286	49.632
1.2	42.95	42.8820	47.266

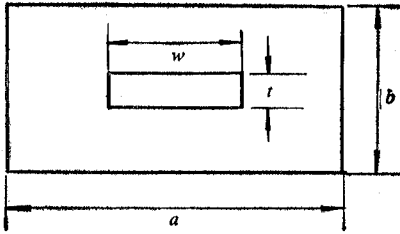


图 9 矩形同轴线

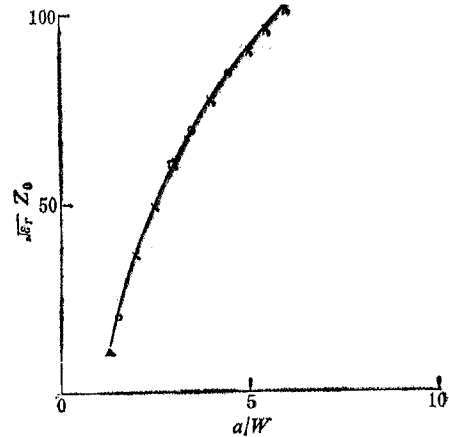


图 10 用不同方法计算正方形同轴线特性阻抗的结果

●——边界元法    ×——有限差分法<sup>[11]</sup>  
 □——变分法<sup>[12]</sup>    △——保角变换法<sup>[14]</sup>

## 五、结论

用边界元法计算位势理论中的某些问题特别有效, 例如分析任意截面 TEM 波传输线的特性。通过数种传输线特性的分析表明, 边界元法不仅与其它数值计算方法一样可计算公差等的影响, 且有计算时所需节点少、内存小、计算时间省、精度高等优点, 因而是一种值得推广的有效计算方法。

## 参 考 文 献

- [1] C. A. Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1978, ch. 2.
- [2] C. A. Brebbia, Boundary Element Techniques: Theory and Application in Engineering, Springer, Berlin, 1984.
- [3] S. Kagami and I. Fukai, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-32**(1984), 455.
- [4] 李忠元, 电子科学学刊, **7**(1985), 161.
- [5] H. E. Green, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-13** (1965), 676.
- [6] J. R. Nortier and D. A. McNamara, *Microwave J.* 27(1984) 11, 109.
- [7] 杨乃恒, 现代雷达, 1963, 第6期, 第77页.
- [8] R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Field, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [9] Weigan Lin (林为干), *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-30**(1982), 1981.
- [10] 林为干, 电磁场工程, 人民邮电出版社, 1982, p. 151.
- [11] H. E. Green, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-11** (1963), 554.
- [12] R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1964, ch. 4.
- [13] J. J. Skiles and T. J. Higgins, Determination of the Characteristic Impedance of U. H. F. Coaxial

Rectangular Transmission Line, Proc. Natl. Electronics Conference, 10, 1954, p. 97.

[14] T. S. Chen, *IRE Trans. on MTT*, MTT-8(1960), 510.

## DETERMINATION OF THE CHARACTERISTICS OF TEM TRANSMISSION LINE WITH ARBITRARY CROSS- SECTION BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

Zhou Wenbiao

*(Institute of Electronics, Academia Sinica)*

The boundary element method of potential theory is described in this paper. It is used to analyze the characteristic impedance of TEM transmission line with arbitrary cross-sections. It is shown that the boundary element method has some advantages, such as the number of nodes required for this method is less than that for the finite element method, and the accuracy of this method is higher than that of the moment method.