

镜象波导的截止频率和模式图* **

周文表

(中国科学院电子学研究所)

提 要

本文用等效介电常数法计算了镜象波导各模式的归一化截止频率,给出了通用的模式图。由此可一目了然地决定主模、第一高阶模和单模工作区等特性。

一、引 言

自七十年代初介质波导在毫米波领域获得了实际应用以来^[1],已得到了很大的发展。到目前为止已提出了镜象线、隔离镜象线、带状介质波导、陷波镜象波导等等各种结构形式^[2]。这些波导的几何结构虽然很简单,大多是矩形和分层介质,但严格的理论分析却是十分困难。诺克斯(Knox)首先提出并由伊藤(Itoh)发展的等效介电常数法(EDC法)是比较简单的解法,并能获得较准确的实用结果,因而获得了广泛的应用^[3]。

介质波导一般说来具有六个场分量。这些不同的场分布可分为 E_{pq}^y 及 E_{pq}^x 两类模式。 E_{pq}^y 模的主要场分量是 E_y 和 H_x , 而 E_{pq}^x 的主要场分量是 E_x 和 H_y 。 p, q 分别表示 x 和 y 方向的峰值数目。因此为了使介质波导能单模工作,必须精确知道其主模式和最低阶高次模式的截止频率与尺寸比和介电常数的关系。这样可根据各种不同应用的需要,结合传输常数 β 的要求来选择介质材料和结构的尺寸比。对于最常用的镜象介质波导虽已有文献讨论过这一问题^[4,5],但所得结论很不一致。本文从分析镜象波导的等效介电常数法出发,求出了 E_{pq}^y 和 E_{pq}^x 两类模式的各个模式的截止频率,给出了计算公式,提供了近似图解方法和第一高阶模的归一化截止频率近似公式。根据计算结果,给出了镜象波导的通用模式图。该图一目了然地指出了基模,单模工作区间,哪个模式是第一高阶模等等,以及它们与介质材料和形状比 a/b 的关系。由该模式图可知,镜象波导的主模总是 E_{11}^y 模。不论使用何种介质材料,对任何的尺寸比, E_{11}^y 模总是没有截止的。这与文献[5]的结论相同。本文不仅证明了 $a/b < 1$ 时,镜象波导的第一高阶模是 E_{11}^x 模, $a/b > 1$ 时第一高阶模是 E_{21}^y 模,还进一步给出了 $a/b = 1$ 时归一化截止频率值与介电常数 ϵ_r 的关系曲线,以利于实用中选用介质材料。并给出了 E_{11}^x 和 E_{21}^y 模的归一化截止频率的近似计算公式。这样为镜象波导的设计提供了清晰而有用的资料。

* 1986年2月24日收到,1986年3月18日修改定稿。

** 国家自然科学基金资助课题。

二、 E_{pq}^y 模的截止频率

图 1 给出了镜象波导的截面图及用 EDC 法分析镜象波导的步骤。一般说来镜象波导的两类模式均具有六个场分量,可通过位函数 ϕ^c 及 ϕ^h 由下列方程求出:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{\partial^2 \phi^c}{\partial y \partial x} + \omega \mu_0 \beta \phi^h, \\ E_y &= \frac{1}{\varepsilon(y)} \left(\beta^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi^c, \\ E_z &= -j \frac{\beta}{\varepsilon(y)} \frac{\partial \phi^c}{\partial y} - j \omega \mu_0 \frac{\partial \phi^h}{\partial x}, \\ H_x &= -\omega \varepsilon_0 \beta \phi^c + \frac{\partial^2 \phi^h}{\partial y \partial x}, \\ H_y &= \left(\beta^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi^h, \\ H_z &= j \omega \varepsilon_0 \frac{\partial \phi^c}{\partial x} - j \beta \frac{\partial \phi^h}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

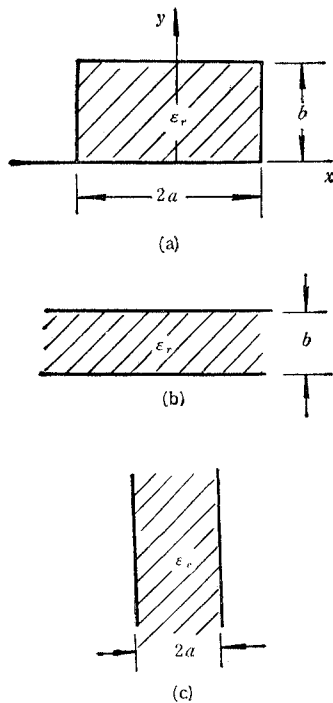


图 1 镜象波导

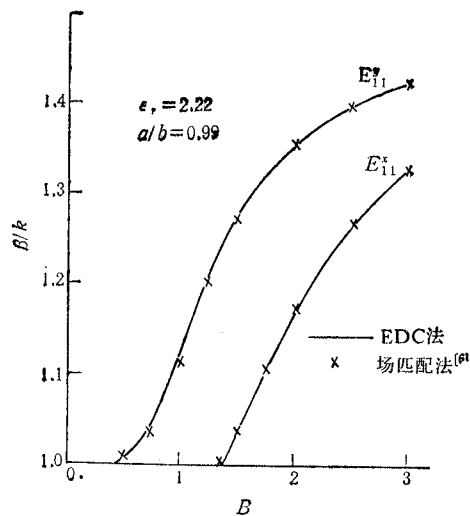


图 2 镜象波导的色散特性

通过数字计算可以证实, E_{pq}^y 模的主要场分量是 E_y 和 H_x ^[6]. 因此可以在分析中忽略 ϕ^h 的作用. 下面简述用 EDC 法^[1,3] 分析镜象波导的步骤和结果.

首先把介质看作在 x 方向是无限扩展的,因而得到了图 1 (b) 所示的结构. 对于该结

构有 $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, 并考虑到金属平面处切向电场为零的条件, 位函数 ϕ^e 可取下列形式

$$\phi^e = \begin{cases} \cos k_y y, & 0 < y < b; \\ B \exp[-\eta(y-b)], & y > b. \end{cases} \quad (2)$$

(2) 式代入 (1) 式即可得各场分量, 并利用 $y = b$ 处切向电场和磁场必须连续的条件, 可得关于 k_y 的本征方程为

$$k_y \sin k_y b - \varepsilon_r \eta \cos k_y b = 0, \quad (3)$$

并有关系式

$$\varepsilon_r k_0^2 - k_y^2 = k_0^2 + \eta^2, \quad (4)$$

式中 k_y 和 η 分别是介质区域和自由空间 y 方向的波数. $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 是自由空间的波数. λ_0 是自由空间的波长.

其次我们定义等效介电常数 ε_e 为

$$\varepsilon_e = \varepsilon_r - (k_y/k_0)^2. \quad (5)$$

这时原来的镜象波导可由图 1(c) 的结构代替. 对这一结构, 场分布有奇对称性或偶对称性. 位函数为

$$\phi^e = \begin{cases} C \exp[\xi(x+a)], & x < -a; \\ \cos k_x x \text{ 或 } \sin k_x x, & -a < x < a; \\ D \exp[-\xi(x-a)], & x > a. \end{cases} \quad (6)$$

由 (6) 式和 (1) 式求出场分量, 再利用 $x = \pm a$ 处切向场分量连续的条件, 就可求出 k_x 所满足的本征方程为

$$(\xi \cos k_x a - k_x \sin k_x a)(\xi \sin k_x a + k_x \cos k_x a) = 0, \quad (7)$$

并有

$$\beta^2 = \varepsilon_e k_0^2 - k_x^2 = k_0^2 + \xi^2, \quad (8)$$

式中 k_x 和 ξ 分别是介质区和自由空间 x 方向的波数. 由此通过求解 (3) 式和 (7) 式, 便可由 (8) 式求出镜象波导的传输常数 β . 对于 $\varepsilon_r = 2.22$, $a/b = 0.99$ 的典型情况, 按本方法计算的色散特性如图 2 所示. 图中同时给出了用场匹配法数字计算的结果. 由图可见两者是颇符合的. 因此我们可以用上述讨论的 EDC 法来分析镜象波导 E_{pq}^e 模的截止频率.

首先把本征方程 (3) 和 (7) 变换为

$$k_y b = \left(q - \frac{1}{2}\right) \pi - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{k_y}{\varepsilon_r \eta}\right), \quad q = 1, 2, \dots; \quad (9)$$

$$k_x a = \frac{p\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{k_x}{\xi}\right), \quad p = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

截止时, $\beta = k_0$ 或 $\xi = 0$, 因而由 (10) 式可得截止时的 $k_x a$ 为

$$k_x a = (p-1) \frac{\pi}{2} \quad (11a)$$

或

$$\sqrt{\varepsilon_c - 1} k_0 a = (p - 1) \frac{\pi}{2}. \quad (11b)$$

我们定义

$$B = \frac{4b\sqrt{\varepsilon_r - 1}}{\lambda_0} \quad (12)$$

为归一化频率。则由(5)、(11)和(9)式可得 E_{pq}^y 模的归一化截止频率 B_{pq}^y 为

$$B_{pq}^y = \sqrt{(p-1)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{2t_q}{\pi}\right)^2}, \quad (13)$$

式中 t_q 是方程

$$t \cdot \operatorname{tg}(t) = (p-1) \frac{\varepsilon_r \pi}{2} \frac{b}{a} \quad (14)$$

的第 q 个根。

在讨论 B_{pq}^y 的具体数值之前,先看一下归一化截止频率的一般性质:

(1) 对 E_{11}^y 模, $p=q=1$, 由(13)(14)式可知 $B_{11}^y \equiv 0$ 。即对于任意的介质材料,不论 a/b 为何值, E_{11}^y 模总是没有截止的。

(2) 对给定的介质材料,当 a/b 增大时,(14)式的根减小,因而 B_{pq}^y 也减低。 B_{pq}^y 是 a/b 的单调下降函数。

(3) a/b 给定后,当 ε_r 增大时,(14)式的根也增大,因而 B_{pq}^y 增高。但由于 B_{pq}^y 的增高比 $\sqrt{\varepsilon_r - 1}$ 的增加缓慢,因而实际频宽还是变窄了。这在选择介质材料时要加以注意。

(4) 若 ε_r 和 a/b 一定时,随 p 的增加(14)式的根增大,因而 B_{pq}^y 增高。另外(14)式的高次根总是大于第一个根,因而在 E_{pq}^y 这一类模中, E_{11}^y 是最低的高阶模。其截止频率 B_{11}^y 是 ε_r 和 a/b 的函数。由(13)、(14)式可得

$$B_{11}^y = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2}, \quad (15)$$

式中 t 为公式

$$t \cdot \operatorname{tg}(t) = \frac{\varepsilon_r \pi}{2} \frac{b}{a} \quad (16)$$

的根,(16)式左方函数的曲线如图3所示。其第一个根在 0 至 $\pi/2$ 之间。由(15)、(16)式和图3可求出不同 ε_r 和 a/b 值时的 E_{11}^y 模的归一化截止频率。 B_{11}^y 也可由下列近似式计算

$$B_{11}^y = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_r \pi}{\varepsilon_r \pi + 2a/b}\right)^2}. \quad (17)$$

当 ε_r 较大或 a/b 较小时,上式是很准确的。但若 $\varepsilon_r = 2.25$, $a/b = 3.0$ 时,其误差可达 -5.1% 。若需更高的精度,可由下式计算 E_{11}^y 模的归一化截止频率

$$B_{11}^y = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2x}{\pi}\right)^2}, \quad (18)$$

式中

$$x = 2\sqrt[3]{r} \cos(\theta + 240), \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{r}\right) (\circ),$$

$$r = p^{3/2}, \quad p = \frac{\pi^2}{36} + \frac{\epsilon_r \pi b}{2a} + 1,$$

$$q = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon_r \pi^2 b}{8a}.$$

上述两近似式的计算结果与(15)式的计算结果比较如表 1 所示。

由数字计算求出各个模式的色散曲线, 当 $\beta = k_0$ 时的 B 值就是各模式的归一化截

表 1 E_{21}^* 模的归一化截止频率

ϵ_r	2.25			3.8			9.0		
	(17)式	(18)式	(15)式	(17)式	(18)式	(15)式	(17)式	(18)式	(15)式
0.25	4.10758	4.10763	4.10763	4.11354	4.11355	4.11355	4.11893	4.11893	4.11893
0.50	2.18346	2.18400	2.18400	2.20259	2.20273	2.20273	2.22100	2.22102	2.22102
1.00	1.26789	1.27192	1.27195	1.31666	1.31798	1.31799	1.36830	1.36845	1.36845
1.50	0.96815	.97845	.97858	1.04073	1.04464	1.04467	1.12330	1.12382	1.12382
2.00	0.81107	.82895	.82926	.90058	.90821	.90828	1.00870	1.00987	1.00988
2.50	0.70926	.73497	.73555	.81040	.82244	.82259	.93917	.94126	.94127
3.00	0.63535	.66859	.66949	.74433	.76115	.776141	.88974	.89300	.89301
5.00	0.45989	.51723	.51971	.57976	.61566	.61661	.76532	.77512	.77522

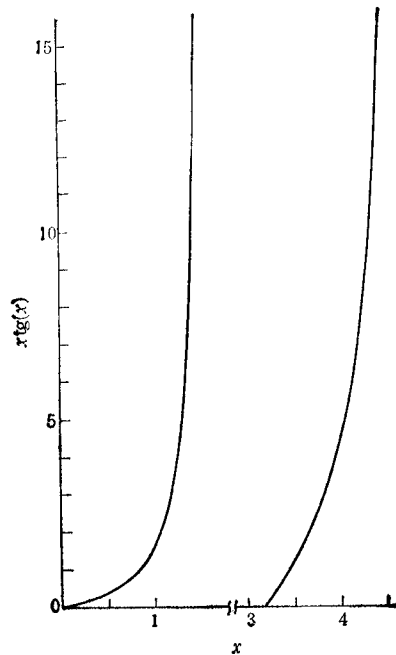


图 3 函数 $xtg(x)$ 的曲线

止频率值。表 2 给出了如此算出的一些低阶 E_{pq}^y 模的归一化截止频率,并与有关文献给出的结果作了比较,可见符合的十分良好。

表 2 低阶 E_{pq}^y 模的归一化截止频率

ε_r	2.22				12		2.25				9.0	
	0.99		5.0		1.0		1.0		2.0		1.0	
a/b	本文	文献 [6]	本文	文献 [6]	本文	文献 [6]	本文	文献 [7]	本文	文献 [7]	本文	文献 [7]
B_{21}^y	1.270	1.30	0.515	0.6	1.379	1.4	1.272	1.28	0.829	0.835	1.368	1.38
B_{12}^y							2.000	2.05	2.000	2.05	2.0	2.1
B_{22}^y							2.668	2.7	2.346	2.35	2.980	3.0

三、 E_{pq}^x 模的截止频率

对 E_{pq}^x 模,其主要场分量是 E_x 及 H_y . 因此在分析中可忽略(1)式中位函数 ϕ^e 的作用,仅考虑位函数 ϕ^h . 用 EDC 法分析其色散特性时,情况与前节的相似. 不过这里首先在 x 方向应用等效介电常数法,即把介质在 y 方向看作是有限的,求出 x 方向的波数 k_x 的本征方程. 然后定义等效介电常数,再求出 y 方向的波数 k_y 所满足的本征方程. 由边界条件的考虑选定位函数 ϕ^h 后,由(1)式求出场分量,再利用介质分界面处电磁场的边界条件,可得下列本征方程

$$(\varepsilon_r \xi \cos k_x a - k_x \sin k_x a)(\varepsilon_r \xi \sin k_x a + k_x \cos k_x a) = 0, \quad (19)$$

并有

$$k_y \cos k_y b + \eta \sin k_y b = 0, \quad (20)$$

$$\varepsilon_r k_0^2 - k_x^2 = k_0^2 + \xi^2, \quad (21)$$

$$\beta^2 = \varepsilon_c k_0^2 - k_y^2 = k_0^2 + \eta^2, \quad (22)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_r - (k_x/k_0)^2. \quad (23)$$

由此对 $\varepsilon_r = 2.22$, $a/b = 0.99$ 算得的 E_{11}^x 模的色散特性如图 2 所示. 图中同时给出了用场匹配法进行数字计算的结果. 可见两者也符合得很好. 因此可用上述本征方程来讨论 E_{pq}^x 模的截止频率问题.

为便于推导,把(19)(20)式先变换为

$$k_x a = \frac{p\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{k_x}{\varepsilon_r \xi} \right), \quad p = 1, 2, \dots; \quad (24)$$

$$k_y b = q\pi - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{k_y}{\eta} \right), \quad q = 1, 2, \dots. \quad (25)$$

截止时, $\beta = k_0$, 即 $\eta = 0$, 故由(25)式可得

$$k_y b = \left(q - \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (26)$$

用与上节相似的推导, 可得

$$B_{pq}^z = \sqrt{(2q-1)^2 + \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2}, \quad (27)$$

式中 t 是下列方程的根

$$\operatorname{tg}\left(\frac{p\pi}{2} - \frac{a}{b}t\right) = \frac{t}{\varepsilon_r \pi \left(q - \frac{1}{2}\right)}. \quad (28)$$

可见 E_{pq}^z 模是 E_{pq}^z 这类模式中的最低阶模, 其归一化截止频率 $B_{pq}^z > 0$, 因此 E_{pq}^z 这一类中的任何模式不可能成为镜象波导的基模。这是与文献 [4] 的结论不同的。并已为大量数字计算所证实^[5,7]。

对于 E_{11}^z 模, 其归一化截止频率为

$$B_{11}^z = \sqrt{1 + \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2}, \quad (29)$$

式中 t 为公式

$$t \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{\varepsilon_r \pi}{2} \quad (30)$$

的根, B_{11}^z 是 a/b 和 ε_r 的函数, 但由计算表明, 当 $a/b > 2.5$ 时, B_{11}^z 与 ε_r 几乎无关, 如图 4 所示。(30) 式也可利用图 3 的曲线求解, 并可由下列公式计算

$$B_{11}^z = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} + \frac{2x}{\pi}\right)^2}, \quad (31)$$

式中

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

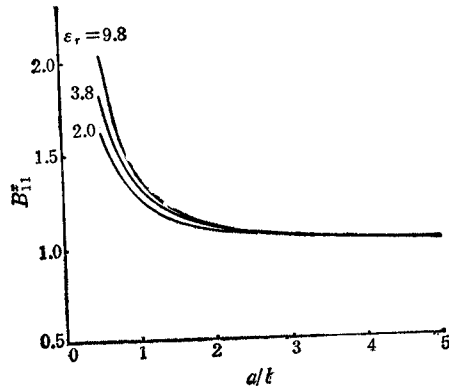
$$p = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{2}{\varepsilon_r \pi} \left(\frac{b}{a}\right)^3, \quad q = \frac{1.5}{\varepsilon_r} \left(\frac{b}{a}\right)^4.$$

(31) 式的计算结果与 (29) 式的计算结果比较, 如图 3 所示。

表 3 E_{11}^z 模的归一化截止频率

ε_r	2.25		3.8		12	
	(31)式	(29)式	(31)式	(29)式	(31)式	(29)式
0.5	1.65502	1.65853	1.81575	1.81655	2.06738	2.06739
1.0	1.27178	1.27195	1.31796	1.31799	1.37912	1.37912
1.5	1.14741	1.14743	1.16628	1.16628	1.18938	1.18938
2.0	1.09200	1.09200	1.10137	1.10137	1.11232	1.11232
3.0	1.04541	1.04541	1.04866	1.04866	1.05228	1.05228
4.0	1.02691	1.02691	1.02839	1.02839	1.02999	1.02999
5.0	1.01776	1.01776	1.01855	1.01855	1.01939	1.01939

表 4 给出了 E_{pq}^z 的一些低阶模式归一化截止频率的理论值与数字计算所得色散曲

图4 E_{11}^x 模的归一化截止频率曲线

线的截止频率值的比较。可见也符合的较好。

表4 低阶 E_{pq}^x 模的归一化截止频率

ϵ_r	2.22		12		2.25				9.8			
	0.99		1.0		0.5		1.0		0.5		1.0	
a/b	本文	文献 [6]	本文	文献 [6]	本文	文献 [7]	本文	文献 [7]	本文	文献 [7]	本文	文献 [7]
B_{11}^x	1.271	1.3212	1.379	1.40	1.659	1.66	1.272	1.28	2.035	2.035	1.372	1.40
B_{21}^x					3.021	3.03	1.891	1.90	3.695	3.70	2.129	2.15
B_{12}^x					3.442	3.45	3.136	3.15	3.560	3.60	3.156	3.20
B_{22}^x					4.538	4.55	3.515	3.52	4.869	4.90	3.582	3.60

四、镜象波导的模式图和单模频宽

由上两节的理论分析,我们可以 ϵ_r 为参数求出镜象波导的 E_{pq}^y 及 E_{pq}^x 模的各个模式的归一化截止频率与 a/b 的关系。对于主模 E_{11}^x 和若干个低阶高次模的计算结果如图5所示,我们称之为镜象波导的模式图。在该图中,位于 E_{11}^x 模“截止频率”曲线(横坐标轴)和第一高阶模(E_{12}^x 或 E_{21}^x)截止频率曲线之间的区域就是镜象波导可单模工作的区间。而具体工作点的选择还须考虑其它的各种性能指标要求。该模式图可清楚地指出工作点是否在单模区内,以及第一高阶模是 E_{12}^x 和 E_{21}^x 中的哪一个。

随着 a/b 增加,第一高阶模由 E_{12}^x 变为 E_{21}^x 的尺寸比称为临界尺寸比 $(a/b)_c$ 。由(16)式和(30)式可知,当 $a/b = 1$ 时,两式完全相同。且当 $a/b = 1$ 时(15)式与(29)式也完全一致。因此可以得出结论,不论 ϵ_r 为何值 临界尺寸比恒等于1。严格计算也证实了这一点(见图5)。这时的归一化截止频率是 ϵ_r 的函数,如图6所示。

各模式的截止频率公式、模式图和临界尺寸比 $(a/b)_c$ 为选择镜象波导的工作参数给出了充分的理论依据。

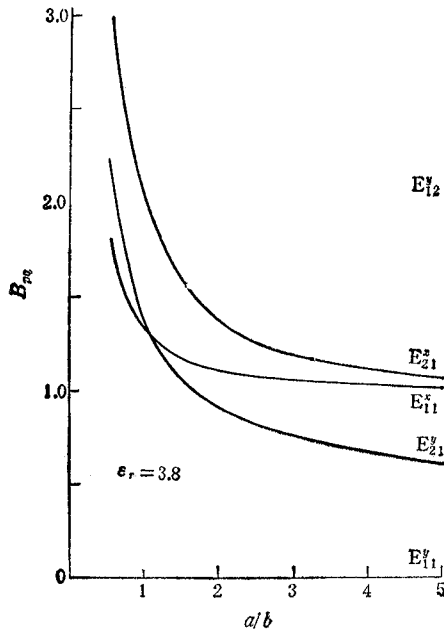
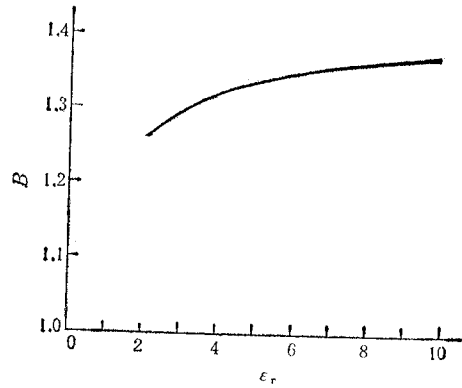


图5 镜象波导的模式图.

图6 $a/b = 1$ 时第一高阶模的归一化截止频率

五、结 论

本文用等效介电常数法求出了镜象波导的 E_{pq}^y 及 E_{pq}^z 模的归一化截止频率，由此作出了镜象波导的通用模式图，可应用于任意的尺寸、介质材料和频段，为选择镜象波导的工作点给出了充分的理论依据。由分析可知：

(1) 不论 ϵ_r 和 a/b 为何值， E_{11}^y 总是主模式，且没有截止。

(2) 对任意的介质材料，镜象波导的临界尺寸比 $(a/b)_c$ 恒等于 1。这时第一高阶模的归一化截止频率可由图 6 求出。

(3) $a/b < (a/b)_c$ 时，镜象波导的第一高阶模是 E_{11}^x 模，其归一化截止频率可由(31)式计算。 $a/b > (a/b)_c$ 时，第一高阶模为 E_{21}^z 模，其归一化截止频率可由(18)式计算。

(4) 当 a/b 值很小时，镜象波导的第一高阶模可能是 E_{12}^y 模。其归一化截止频率恒等于 2。

参 考 文 献

- [1] R. M. Knox and P. P. Toullos, Proc. Symp. on Submillimeter Waves, 1970, pp. 497—516.
- [2] T. Itoh, Infrared and Millimeter Waves, 4(1981), ch. 5.
- [3] M. V. Mclevige, T. Itoh and R. Mittra, *IEEE Trans. on-MTT*, **MTT-23** (1975), 788.
T. Itoh, *ibid.*, **MTT-24**(1976), 821.
W. B. Zhou (周文表) and T. Itoh, *ibid.*, **MTT-30**(1982), 2163.
- [4] 王宗欣, 赵惠芬, 复旦大学学报, **21**(1982), No.1, 43.
- [5] M. Shi (史美琪) and D. Jiang (蒋定华), *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, **5**(1984), 1605.
- [6] K. Solbach and I. Wolff, *IEEE Trans. on-MTT*, **MTT-26**(1978), 266.
- [7] 周文表, 镜象波导的通用色散曲线, 中国科学院电子学研究所内部报告, 1985.

THE CUT-OFF FREQUENCY AND MODE CHART OF IMAGE WAVEGUIDE

Zhou Wenbiao

(*Institute of Electronics, Academia Sinica*)

The normalized cut-off frequencies of E_{pq}^y and E_{pq}^x modes for image waveguide are investigated by EDC method. A generalized mode chart for image waveguide is given. It is useful for determining the first-order higher mode and single mode region and choosing the operation parameters.