

## 最小 Rayleigh 熵恒模信号分离算法

黄磊 吴顺君 张林让

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 提出了一种最小 Rayleigh 熵恒模信号分离算法(MRE-AOCMSS)。该算法通过对代价函数作适当的变换,得到新的协方差矩阵,然后构造出协方差矩阵的 Rayleigh 熵,再通过最小化 Rayleigh 熵得到用以恢复恒模信号的最佳权矢量。该算法能够准确地分离出期望信号并抑制掉干扰,从而有效地克服了常规恒模算法(CMA)对同信道干扰(CCI)功率大于信号功率的情况敏感这一缺点。计算机仿真结果说明了该算法的有效性。

**关键词:** 阵列信号处理, 恒模算法, 特征值分解

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)10-1531-04

## An Algorithm for Constant Modulus Signal Separation Exploiting Minimal Rayleigh Entropy

Huang Lei Wu Shun-jun Zhang Lin-rang

(National Key Lab for Radar Signal processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract** An Algorithm Of Constant Modulus Signal Separation based on Minimal Rayleigh Entropy (MRE-AOCMSS) is presented. Utilizing an error cost function, a novel covariance matrix is constructed. Then an optimal weight vector used to extract the desired constant modulus signal is obtained via minimizing the Rayleigh entropy. Employing the algorithm, interferences can be cancelled effectively. The algorithm is still valid when co-channel interference signal's power is much greater than the desired signal's power. The simulation results indicate that this MRE-AOCMSS algorithm is effective in terms of constant modulus signal separation and interference suppression.

**Key words** Array signal processing, Constant modulus algorithm, Eigendecomposition

### 1 引言

在雷达和通信系统的应用中,把期望信号分离出来并抑制掉干扰是信号处理领域中一个重要的任务。自适应阵列天线是一种空域滤波的方法,其通过在干扰的方向形成零点,而在信号的方向形成最大的波束,以达到提高信干噪比(SINR)的目的,从而有效地抑制干扰和恢复信号。然而在没训练信号的情况下,一般要求准确知道信号的波达方向(DOA)和阵列流形。恒模算法不需要训练信号或信号的波达方向,只需利用数字调制信号的恒模特性即可实现信号的恢复和干扰的抑制,从而使得这种算法在时域自适应均衡中得到广泛的应用<sup>[1-3]</sup>。由于只需要利用信号的恒模(CM)特性,所以恒模算法是一种盲算法<sup>[1]</sup>。

长期以来人们总认为恒模算法是一个非线性问题,只能通过迭代算法实现,而得不到闭式的解析式。迭代方法的主要

缺点有:(1)算法存在局部极小点,如果权矢量的初值选择不当,算法就会收敛到局部极小点;(2)收敛速度取决于初值的选取;(3)弱信号往往被淹没在干扰和噪声中,特别是当干扰功率比信号功率大,而且干扰也具有恒模特性时,恒模算法很有可能会捕获到干扰而非信号<sup>[4]</sup>;(4)信源数无法预先确知,必须依赖先验知识。本文通过分析恒模算法的代价函数,提出一种基于最小Rayleigh熵的恒模信号分离算法。在寻找最优权矢量时把恒模信号的幅值归并到协方差矩阵里去考虑,以得到最小代价函数的闭式解。这种算法不存在算法收敛于局部极小点和收敛速度慢的问题,对于具有恒模特性的干扰功率比信号功率大的情况,该算法仍然有效,而且对信号波达方向的估计和干扰的抑制均优于常规的恒模算法。

### 2 恒模算法

假设阵列有  $M$  个阵元,且阵列结构是任意的,则阵列

在  $k$  时刻接收  $M$  维的信号矢量和相应  $M$  维的复加权矢量分别为

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{w}(k) = [w_1(k), w_2(k), \dots, w_M(k)]^T \quad (2)$$

其中  $\mathbf{s}(k) \in C^{P \times 1}$ ,  $\mathbf{n}(k) \in C^{M \times 1}$ ,  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)] \in C^{M \times P}$  分别为信源复矢量, 噪声复矢量和  $M \times P$  阶方向矩阵,  $\mathbf{T}$  表示转置,  $k = 1, 2, \dots, N$  是采样时刻,  $N$  是快拍数,  $P$  是信源数。所以恒模阵列的输出为

$$y(k) = \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \quad (3)$$

由于假设发射信号具有恒定的包络, 所以阵列的输出信号  $y(k)$  也应该具有恒模特性。恒模算法就是利用这一特性实现对期望信号的捕获及恢复。然而, 由于多径衰落和同信道干扰等原因, 使得阵列接收到信号的包络是变化的, 即不再是恒模的了。恒模算法的目的就是在统计平均的意义上把输出信号恢复成恒模信号。这可以通过最小化的代价函数来实现。代价函数定义为<sup>[5]</sup>

$$J[\mathbf{w}(k)] = E \left\{ \left| |y(k)|^m - |y_0|^m \right|^n \right\} = E \left\{ \left| \left| \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \right|^m - |y_0|^m \right|^n \right\} \quad (4)$$

其中  $y_0$  是期望信号的幅值, 指数  $m, n$  可以取 1 或 2。让  $m, n$  取不同的值可以设计出不同的最陡下降恒模算法, 相应地, 各种算法将具有不同的收敛特性和复杂程度。

在式(4)中, 令  $m = 2$ ,  $n = 1$ , 并去掉绝对值, 则代价函数可以定义为

$$J[\mathbf{w}(k)] = E \left[ \left| \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \right|^2 - |y_0|^2 \right] \quad (5)$$

若  $y_0 = 1$ , 则由式(5)所定义的代价函数得到的最陡下降恒模算法称为 1-2 型最陡下降恒模算法, 该算法如下所示。

步骤 1  $k = 0$ , 选择初始权矢量  $\mathbf{w}(0)$  和合适的步长  $\mu$ ;

步骤 2  $y(k) = \mathbf{w}(k)^H \mathbf{x}(k)$ ;

步骤 3  $e(k) = 2[y(k) - y(k)/|y(k)|]$ ;

步骤 4  $\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu \mathbf{x}(k)e^*(k)$ 。

令  $k = k+1$ , 重复步骤 2~步骤 4, 直至代价函数小于  $\varepsilon$ , 其中 \* 表示复共轭运算,  $\varepsilon$  是满足误差要求的某一小数。

### 3 最小 Rayleigh 熵恒模信号分离算法

为了实现把受到污染和衰落的信号恢复成恒模信号, 可以通过寻找最佳权矢量  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ , 使得代价函数最小, 即

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{w}} J[\mathbf{w}(k)] \quad (6)$$

考察式(5)的代价函数  $J[\mathbf{w}(k)]$ , 注意到  $\mathbf{w}(k)$  不是随机变量, 则

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &= E \left[ \left| \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \right|^2 - |y_0|^2 \right] \\ &= E \left[ \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \mathbf{w} - |y_0|^2 \right] \\ &= \left( \mathbf{w}^H \|\mathbf{A}(\theta)\|_F \right) E \left[ \frac{\mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{A}(\theta)\|_F} \frac{\mathbf{x}^H(k)}{\|\mathbf{A}(\theta)\|_F} \right] \left( \mathbf{w} \|\mathbf{A}(\theta)\|_F \right) - |y_0|^2 \\ &= \bar{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{w}} - |y_0|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w} \|\mathbf{A}(\theta)\|_F$ ,  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}} = E \left[ \bar{\mathbf{x}}(k) \bar{\mathbf{x}}^H(k) \right]$ ,  $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) / \|\mathbf{A}(\theta)\|_F$ 。假设在最小化代价函数时满足约束条件  $\bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{w}} = 1$ , 即

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{w}}} J(\bar{\mathbf{w}}) \\ \text{s.t. } \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{w}} = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

所以式(7)可以表示为

$$J(\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}^H \left( \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}} - |y_0|^2 \mathbf{I} \right) \bar{\mathbf{w}} \quad (9)$$

式(7)中使用了阵列方向矩阵的 Frobenius 范数对阵列数据进行归一化, 以便去掉阵列增益。遗憾的是, 对于盲算法, 阵列的阵列流形我们是无法预先确知的, 即  $\mathbf{A}(\theta)$  是未知的。但是, 对于任意结构的阵列, 其方向矩阵的 Frobenius 范数  $\|\mathbf{A}(\theta)\|_F$  可以由下式确定

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\theta)\|_F &= \left[ \text{Tr}(\mathbf{A}^H(\theta)\mathbf{A}(\theta)) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=1}^P (\mathbf{A}^H(\theta)\mathbf{A}(\theta))_{i,i} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (PM)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

令  $\tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}} - |y_0|^2 \mathbf{I}$ , 式(9)可以表示为

$$J(\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{w}} \quad (11)$$

对  $\tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}}$  作特征值分解:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}} - |y_0|^2 \mathbf{I} = \sum_{i=1}^M \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{v}}_i \bar{\mathbf{v}}_i^H \quad (12)$$

假定式(12)的特征值按从大到小的顺序排列, 即  $\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \dots \geq \bar{\lambda}_M$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_M$  是与  $M$  个特征值对应的特征向量。

**定理** 对于期望信号是幅值为  $y_0$  的恒模信号, 代价函数如式(5)所示, 则使得代价函数最小的最佳权矢量  $\bar{\mathbf{w}}_{\text{opt}}$  为式(12)所示的协方差矩阵作特征值分解时最小特征值所对应的特征向量。

**证明** 不失一般性, 设  $\bar{\mathbf{w}}$  是归一化的权矢量, 即  $\|\bar{\mathbf{w}}\|_2^2 = \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{w}} = 1$ , 则

$$J(\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{w}} = \frac{\bar{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{w}}}{\bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{w}}} \quad (13)$$

对任意不为零的矢量  $\bar{\mathbf{w}}$ , Hermitian 矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}}$  的 Rayleigh 熵为

$$\mathcal{R}(\bar{\mathbf{w}}) = J(\bar{\mathbf{w}}) = \frac{\bar{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} \bar{\mathbf{w}}}{\bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{w}}}, \quad \bar{\mathbf{w}} \neq 0 \quad (14)$$

由 Rayleigh 熵的性质得

$$\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}) \leq \mathcal{R}(\bar{\mathbf{w}}) \leq \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}) \quad (15)$$

所以当  $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{w}})$  取最小值, 即  $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{w}}) = \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}) = \bar{\lambda}_M$  时, 代价函数最小, 与最小特征值对应的特征向量即为最佳权矢量, 即  $\bar{\mathbf{w}}_{\text{opt}} = \bar{\mathbf{v}}_M$ 。证毕

**说明** 式(13)的目标函数和 1-2 型最陡下降恒模算法的代价函数(即式(5))是等价的, 区别仅仅在于前者属于块处理(SMI)算法而后者是一种迭代算法。新目标函数通过把功率为  $|y_0|^2$  的恒模信号与接收信号的功率相消, 使得恒模信号的功率在协方差矩阵对角线上的分布最小。由于该算法的最佳权矢量是在 Rayleigh 熵最小的条件下得到的, 所以本文所提出的算法称为最小 Rayleigh 熵恒模信号分离算法(MRE-AOCMSS)。

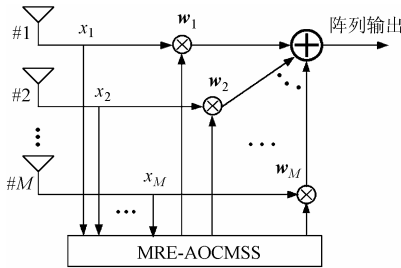


图 1 MRE-AOCMSS 算法的阵列结构框图

使用 MRE-AOCMSS 算法的阵列结构框图如图 1 所示。

MRE-AOCMSS 算法的计算步骤总结如下:

步骤 1 由阵列数据估计协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = (1/N)$

$$\cdot \sum_{k=1}^N \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k);$$

步骤 2 利用 MDL 或 AIK 准则确定信源数  $P$ , 计算阵列方向矩阵的 Frobenius 范数  $\|\mathbf{A}(\theta)\|_F = (PM)^{1/2}$ , 并计算矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} / (\|\mathbf{A}(\theta)\|_F^2 - |y_0|^2) \mathbf{I}$ , 其中假设  $|y_0|^2 = 1$ ;

步骤 3 对矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}$  作特征值分解  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = \sum_{i=1}^M \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{v}}_i \bar{\mathbf{v}}_i^H$ , 且特征值按从大到小的顺序排列;

步骤 4 选取与矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}$  的最小特征值相对应的特征向量为最佳权矢量  $\bar{\mathbf{w}}_{\text{opt}} = \bar{\mathbf{v}}_M$ ;

步骤 5 分离出期望的恒模信号  $y(t) = \bar{\mathbf{w}}_{\text{opt}}^H \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{w}_{\text{opt}}^H \mathbf{x}(t)$ 。

#### 4 计算机仿真

为了验证本文的 MRE-AOCMSS 算法的有效性, 把它与 CMA 算法的进行了比较, 我们作了两个实验。所使用的阵列是结构简单的等距线阵, 阵元数为 4, 阵元间隔为  $\lambda/2$ ,

$\lambda$  为载波波长。期望信号是符号速率为  $T$  的 QPSK 信号。两个实验使用的 QPSK 信号和 BPSK 信号的归一化频率均为 0.05, 采样速率为  $1/T$ 。

**实验 1** 表 1 给出计算机仿真所使用的信号参数。信干比(SIR)为 6dB, 即干扰功率比信号功率小的情况, 信噪比(SNR)为 -20dB, 采样次数为 256。图 2 是两种算法的收敛特性。图 3 是两种算法在复高斯背景噪声下的方向图。图 3 表明恒模算法对信号的波达方向估计比较准确, 但对干扰的抑制能力较差; 而使用 MRE-AOCMSS 算法不但能够准确地估计出信号和干扰的波达方向, 而且对干扰的抑制比恒模算法约大 8dB, 此外, MRE-AOCMSS 算法方向图的旁瓣也比 CMA 算法的低。

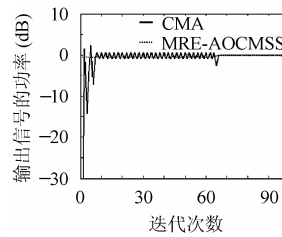


图 2 两种算法的收敛特性

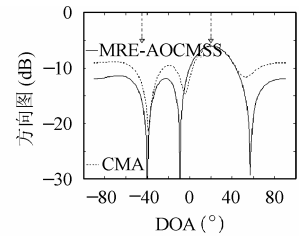


图 3 两种算法在复高斯背景噪声下的方向图 (干扰功率比信号功率小的情况)

表 1 实验 1 的参数

信号	功率	DOA	时延	信号类型
期望信号	0dB	20°	0	QPSK
干扰信号	-6dB	-40°	$T/2$	QPSK
复高斯噪声	-20dB	—	—	—

**实验 2** 使用的信号参数如表 2 所示, 对于两个干扰, 信干比分别为 -40dB 和 -30dB, 即干扰功率比信号功率大的情况, 信噪比为 20dB, 采样次数为 16384。由图 4 可以清楚看出, MRE-AOCMSS 算法对大功率干扰的抑制能力是很强的, 与恒模算法相比, 对波达方向为 -70° 的 BPSK 干扰约有 23dB 的抑制作用, 波达方向为 -40° 的 QPSK 干扰约有 21dB 的抑制能力, 而且对期望信号的波达方向的估计仍然很准确; 相反, 恒模算法此时捕获到的是功率最大、波达方向为 -40° 的干扰, 并且把信号当作干扰来抑制。

#### 5 结束语

本文研究了一种最小 Rayleigh 熵恒模信号分离算法。该算法通过使代价函数取协方差矩阵的最小 Rayleigh 熵, 得到最佳权矢量。与恒模算法相比, 本文的 MRE-AOCMSS 算法要对协方差矩阵作特征值分解, 所以运算量相对较大。但是由于该算法属于块处理算法, 所以不存在算法收敛于局部极小点和收敛速度慢的问题。仿真实验的结果表明, 本文的算

法无论是对信号波达方向的估计还是对干扰的抑制作用,均优于常规的恒模算法;对于干扰功率比信号功率大的情况,该算法仍然具有很强抑制干扰的能力,而且对信号的波达方向的估计也比较准确,从而有效地克服了常规恒模算法的缺点。

表 2 实验 2 的参数

信号	功率	DOA	时延	信号类型
期望信号	0dB	$20^\circ$	0	QPSK
干扰信号 1	40dB	$-40^\circ$	$T/2$	QPSK
干扰信号 2	30dB	$-70^\circ$	0	BPSK
复高斯噪声	-20dB	—	—	—

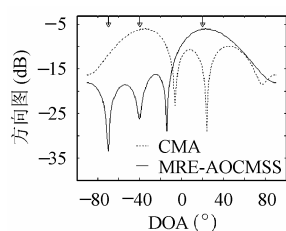


图 4 两种算法在复高斯背景噪声下的方向图 (干扰功率比信号功率大的情况)

### 参 考 文 献

[1] Choi Y S, Wang H, Song D I. Adaptive blind equalization coupled with carrier recovery for HDTV modem. *IEEE Trans. on*

*Consumer Electronics*, 1993, 39(3): 386 – 391.

- [2] Furuakwa, Kamio Y, Sasaoka H, Co-channel interference canceller using CMA adaptive array antenna. *Electronics Letters*, 1997, 33(13): 1106 – 1107.
- [3] Gooch T P, Lundell J D. The CMA array: An adaptive beamformer for constant modulus signals. Proc. IEEE ICASSP-86, Tokyo, Japan, 1986: 2523 – 2526.
- [4] Treichler J R, Agee B G, A new approach to multipath correction of constant modulus signals. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1983, 31: 459 – 471.
- [5] 张贤达, 保铮. 通信信号处理. 北京: 国防工业出版社, 2000: 383 – 384.

黄 磊: 男, 1975 年生, 博士生, 研究兴趣为阵列信号处理、降维自适应信号处理和盲信号处理及其在雷达、通信中的应用.

吴顺君: 男, 1942 年生, 教授, 博士生导师, 雷达信号处理重点实验室主任, 电子工程研究所所长. 长期从事雷达系统和雷达信号处理方面的教学和科研工作. 共发表论文 60 余篇, 出版专著 4 部. 主要研究领域为雷达系统分析、建模与仿真、雷达信号处理.

张林让: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师. 曾获电子部科技进步一等奖和陕西省教委科技进步二等奖. 发表论文 30 多篇. 主要研究兴趣为自适应信号处理、阵列波达方向估计、方向图综合.