第14卷 第1期 电子科学学刊 Vol. 14, No. 1
1992年1月 JOURNAL OF ELECTRONICS Jan., 1992

全域基矩量法的一种快速算法

杨先华 章文勋
(东南大学,南京 210018)

摘要 本文提出了一种能大量节省全域基矩量法计算时间的快速算法．算例结果证实了其有效性．对于较长的或带有弯折节点的天线，文中提出采用分段全域基，并给出了其快速运算公式．

关键词 矩量法，快速算法，积分方程

1. 引言

在应用矩量法求解线天线积分算子方程时，大部分计算时间用于形成广义阻抗矩阵。而采用全域基函数时，形成广义阻抗矩阵所需的计算时间则更长．因此，虽然采用全域基函数时只需较少的项数便可收敛，可是在实际计算中人们仍常选用分域基函数以减少总计算时间[1]．

本文提出了一种应用于全域基矩量法的快速算法，使形成广义阻抗矩阵所需的计算时间降至与采用相同项数的分域基时相当；而采用全域基函数时，仅需较少的项数便可收敛，因此总计算时间得以显著减少．

当天线较长时，所需基函数项数较多，广义阻抗矩阵较大；为了充分利用上述快速算法，且能有效地防止计算误差的过份积累而影响矩阵性态，可采用分段全域基；即将整个天线分成若干个子段(每一子段仍远小于分域基时的小区间)，在每一子段上采用全域基而在子段间的交接点处令电流满足连续性条件．这种分段全域基对分析有弯折节点的天线也特别有效．

2. 快速算法

线天线积分算子方程的基本形式为

$$AU(y)=f(x) \tag{1}$$

式中，$A=\int_a^b k(x,y)dy$ 为线性积分算子；$k(x,y)$ 为积分核；$U(y)$ 为未知电流分布函数；$f(x)$ 为已知激励函数．应用矩量法求解时，首先选用基函数序列 $\{\phi_n(y)|_{n=1,2,\cdots,N}\}$ 将 $U(y)$ 展开，然后对方程两端用权函数序列 $\{w_m(x)|_{m=1,2,\cdots,M}\}$ 加权内积得矩阵方程

$$Zc=V \tag{2}$$

(2)式中，广义阻抗矩阵中各元素的值需通过数值积分计算得到．当选用全域基函数时，由于积分需在整个区间上进行，所需计算时间十分可观．但若采用下述快速算法，则可大

1990.08.31 收到，1991.01.04 日修改定稿．

大减少计算时间.

(1) 快速运算公式　采用插值型数值积分公式计算 Z 中的各元素,有

$$Z_{mn}=\int_a^b A\phi_n(y)w_m^*(x)dx=\sum_{p=1}^{P}B_p w_m^*(x_p)\sum_{q=1}^{Q}B_q k(x_p,y_q)\phi_n(y_q) \tag{3}$$

其中 P, Q 为每重积分的插值节点数; x_p, y_q 为每重积分的插值节点; B_p, B_q 为各插值节点上的加权系数. 记

$$w_m^{p*}=w_m^*(x_p);\ k_{pq}=k(x_p,y_q);\ \phi_n^q=\phi_n(y_q)$$

及

$$\begin{cases}\boldsymbol{w}_m=[w_m^{1*},w_m^{2*},\cdots,w_m^{P*}];\ \boldsymbol{\Psi}_n=[\phi_n^1,\phi_n^2,\cdots,\phi_n^Q]\\ \boldsymbol{B}^1=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_P);\ \boldsymbol{B}^2=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_Q);\ \boldsymbol{K}=[k_{pq}]_{P\times Q}\end{cases}$$

可将 (3) 式改写为

$$Z_{mn}=\boldsymbol{w}_m\cdot\boldsymbol{B}^1\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{\Psi}_n \tag{4}$$

从而可得广义阻抗矩阵

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{B}^1\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{\Phi} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_M]^T$; $\boldsymbol{\Phi}=[\boldsymbol{\Psi}_1,\boldsymbol{\Psi}_2,\cdots,\boldsymbol{\Psi}_N]$.

利用 (5) 式便可快速地生成广义阻抗矩阵而减少重复计算的工作量.

作为矩量法特例的点配置法,由于不需进行繁复的内积运算而可能选取较多的点,以获得较高的精度. 类似地,可得点配置法的运算公式

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{\Phi} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{T}=[k_{mq}]_{M\times Q}$; M 为所选的匹配点数.

(2) 计算时间的比较　在表 1 中, 就常规算法和快速算法中为形成广义阻抗矩阵所需的运算量进行了比较. (表中 t_w, t_ϕ, t_k 和 t_M 分别表示计算一次 $w_m^*(x_p)$, $\phi_n(y_q)$, $k(x_p,y_q)$ 和做一次乘法所需的 CPU 时间).

表 1　常规算法和快速算法计算量的比较

	求 $w_m^*(x_p)$ 次数	求 $\phi_n(y_q)$ 次数	求 $k(x_p,y_q)$ 次数	做乘法次数	总计算时间
常规算法 (t_c)	$P\times M\times N$	$Q\times M\times N$	$P\times Q\times M\times N$	$(2\times Q+1)\times P\times M\times N$	$M\times N\times[t_w\times P+t_k\times P\times Q+t_\phi\times Q+t_M\times(2\times P\times Q+P)]$
快速算法 (t_F)	$P\times M$	$Q\times N$	$P\times Q$	$(2\times P+M\times P+M\times N)\times Q$	$t_w\times M\times P+t_\phi\times Q\times N+t_k\times P\times Q+t_M\times(2\times P+M\times P+M\times N)\times Q$
t_F/t_c	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{M}$	$\frac{1}{M\times N}$	$\approx\frac{1}{2P}+\frac{1}{2N}+\frac{1}{MN}$	$<\frac{1}{\Gamma}$, $\Gamma=\min(M,N)$

由表可见,采用快速算法后,每一部分以及总的计算量均得以大大减少. 总计算时间减至常规算法的 $1/\Gamma$, $\Gamma=\min(M,N)$, 这与相同项数的分域基时相当.

(3) 分段全域基　将区间 $[a,b]$ 分为 S 个子段 $[a_i,b_i]_{i=1,2,\cdots,S}$ 并选择基、权函数为

$$\Psi_n(y)=\begin{cases}\Psi_n^{(i)}(y), & y\in[a_i,b_i]\\ 0, & y\notin[a_i,b_i]\end{cases}$$

$$w_m(x)=\begin{cases}w_m^{(i)}(x), & x\in[a_i,\ b_i]\\ 0, & x\notin[a_i,\ b_i]\end{cases}$$

其中 $\{\phi_n^{(i)}(y)|_{n=1,2,\cdots,N}\}$ 和 $\{w_m^{(i)}(x)|_{m=1,2,\cdots,M}\}$ 分别为第 i 子段上的全域基函数和权函数。

在每子段上运用矩量法并令子段交接点处满足电流连续性条件可得

$$\left.\begin{aligned}&Z\tilde{c}=V\\&\sum_{n=1}^{N}c_n^{(i+1)}\phi_n^{(i+1)}(y)=\sum_{n=1}^{N}c_n^{(i)}\phi_n^{(i)}(y),\ i=1,2,\cdots,S-1\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中 $\tilde{Z}=\mathrm{diag}(Z^{(1)},\ Z^{(2)},\cdots,Z^{(S)})$; $\tilde{c}=\mathrm{diag}(c^{(1)},\ c^{(2)},\cdots,c^{(S)})$; $V=\mathrm{diag}(V^{(1)},\ V^{(2)},\cdots,V^{(S)})$. 而 $Z^{(i)}$ 可用下述快速运算公式计算

$$Z^{(i)}=W^{(i)}\cdot B^{(1)}\cdot K^{(i)}\cdot B^{(2)}\cdot \Phi^{(i)}\tag{8}$$

3. 算例

为验证上述快速算法的有效性，就图1所示的对称振子天线分别用分域基矩量法、全域基矩量法的常规算法和快速算法进行了计算比较。计算时所用的积分方程为 Pocklinglon 积分方程[1]:

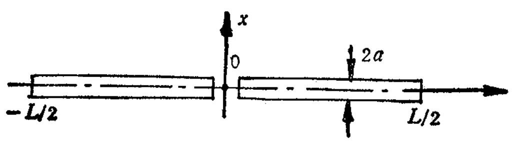

图1　对称振子天线

$$\int_{-L/2}^{L/2}I(z')\left[k_0^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]G(z,\ z')dz'=-j\omega\varepsilon_0E_z^i(z)\tag{9}$$

其中 $G(z,z')=\exp(-jk_0R)/R$, $R=\sqrt{(z-z')^2+a^2}$, $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$; $E_z^{(i)}(z)$为外加电场切向分量。所选取的全域基函数和分域基函数分别为

$$\phi_n(z')=\cos[(2n-1)\pi z'/L];\ -\frac{L}{2}\leqslant z'\leqslant\frac{L}{2};\ n=1,2,\cdots,N$$

$$\phi_n(z')=\begin{cases}\sin[k_0(z'-z_{n-1})]/\sin[k_0(z_n-z_{n-1})], & z'\in[z_{n-1},\ z_n]\\ \sin[k_0(z_{n+1}-z')]/\sin[k_0(z_{n+1}-z_n)], & z'\in[z_n,\ z_{n+1}]\\ 0, & z'\notin[z_{n-1},\ z_{n+1}]\end{cases}$$

计算是在 IBM/XT 机上进行的，计算过程中已考虑到广义阻抗矩阵的对称性。

在表2中列出了基函数项数不同时，三种算法计算广义阻抗矩阵和求逆所用的计算时间。

表2　三种算法计算时间比较(单位: s)
($L=0.45\lambda_0$, $a=0.007\lambda_0$)

N	求 Z			求 Z^{-1}
	全域基常规算法	全域基快速算法	分域基	
4	7	2	2	
8	48	6	6	1
16	350	22	22	2
24	1140	48	46	5

由表可看出，(1) 采用全域基时若用常规算法，则其计算时间远长于分域基，而若采用快速算法，则计算时间与分域基时相当；(2) 三种算法中，形成广义阻抗矩阵所用的

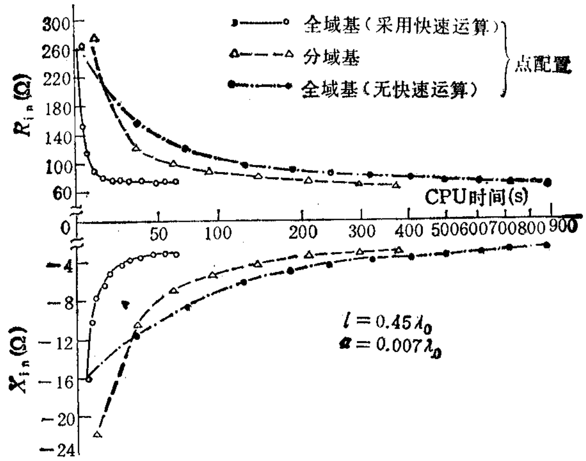

图 2　输入阻抗（$Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$）随 CPU 时间增加的收敛曲线

计算时间远长于求逆时间，这再一次说明减少总计算时间的关键是减少形成广义阻抗矩阵所用的计算时间.

图 2 中给出了输入阻抗随计算时间的收敛曲线. 由图可见，采用快速算法后，全域基矩量法收敛时，所需计算时间远少于其它两种方法. 由此可见这种快速运算方法可使全域基矩量法有较快收敛速度的优点得到充分发挥.

参　考　文　献

[1] R. Mittra 编著，金元松译，计算机技术在电磁学中的应用，人民邮电出版社，北京，1983 年，第 2 章.

A FAST COMPUTING SCHEME FOR THE MOMENT METHOD

Yang Xianhua　　Zhang Wenxun

(Southeast University, Nanjing 210018)

Abstract　A fast computing scheme for the mement method with entire domain bases used for solving integral equations arisen in antenna radiation and scattering is proposed. By using this scheme, the computing time required to evaluate the generalized impedance matrix can be reduced to a very small portion of that of the conventional scheme. Because fewer bases are needed when using the entire domain bases, this scheme will certainly decrease the total computing time significantly. Its effectiveness is confirmed by the numerical examples. For long antenna or bent antenna, a kind of subsectional entire domain bases is proposed in order that the fast computing scheme can be used and the accumulation of the numerical errors can be reduced.

Key words　Moment method; Fast computing scheme; Integral equation