第10卷 第4期 电子科学学刊 Vol. 10, No. 4
1988 年 7 月 JOURNAL OF ELECTRONICS July, 1988

关于 TUSTIN 变换的一个定理*

许锦标　　王建平**
（上海工业大学电机工程系，上海）

摘要　Tustin 变换（又称双线性变换）是数字滤波器的设计、实时数字仿真、数控及辨识等领域流行的方法，有关 s 域和 z 域系数值的相互计算问题前人已进行过研究，但均未建立直接的数学关系式. 本文运用矩阵相乘代替多项式的相乘，再利用二项式定理以及二次型的有关结论，导出了 s 域和 z 域上系数值之间的数学关系式，并在这一成果的基础上，建立了一个算法.

关键词　数字滤波器；Tustin 变换（双线性变换）；递推算法

1. 问题的提出

Tustin 变换建立了 s 域与 z 域之间的一种映射：

$$\text{正变换}\ (s\to z)\quad s=\frac{2}{T}\ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{1}$$

$$\text{反变换}\ (z\to s)\ z^{-1}=\left(1-\frac{T}{2}s\right)\Big/\left(1+\frac{T}{2}s\right) \tag{2}$$

根据这个映射关系，对 s 域上的某个传递函数 $G(s)$. 在 z 域上就有一脉冲传递函数 $D(z)$ 与之对应：

$$G(s)=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n},\quad m\leqslant n \tag{3}$$

$$D(z)=\frac{d_0+d_1z^{-1}+\cdots+d_nz^{-n}}{c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_nz^{-n}} \tag{4}$$

反之亦然.

我们所要讨论的问题就是它们的系数值 $\{b_i, a_i\}$，$\{d_i, c_i\}$ 之间存在何种数学关系式. 有关由 $\{b_i, a_i\}$ 去计算 $\{d_i, c_i\}$ 或反问题，在文献[1，2]中进行过研究，但他们均未得到直接的数学关系式. 这个问题以下面给出的一个定理来解决.

2. 定理及证明

定理　若(3)，(4)式之间存在映射关系(1)，(2)式，则有：

$$\begin{cases} d_k=\sum\limits_{i=0}^{m} b_i\left(\dfrac{2}{T}\right)^i f_k^{(i)} & \text{(5-a)}\\[2ex] c_k=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\left(\dfrac{2}{T}\right)^i f_k^{(i)} & \text{(5-b)}\end{cases}$$

---

* 1986 年 11 月 11 日收到，1987 年 3 月 2 日修改定稿.

** 深圳大学

$$\begin{cases} a_k = \left(\dfrac{T}{2}\right)^k \displaystyle\sum_{j=0}^{n} c_j f_k^{(j)} & \text{(6-a)} \\ b_k = \left(\dfrac{T}{2}\right)^k \displaystyle\sum_{i=0}^{n} d_i f_k^{(i)} & \text{(6-b)} \end{cases}$$

$$f_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_i^j C_{n-i}^{k-j} \tag{7}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots n$$

证明

令 $w = z^{-1}$，将(1)式代入(3)后有：

$$D(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(\frac{2}{T}\right)^j \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^j \Big/ \sum_{i=0} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^i \tag{8}$$

将分子、分母同乘因子 $(1+w)^n$ 后：

$$D(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(\frac{2}{T}\right)^j (1-w)^j (1+w)^{n-j} \Big/$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i (1-w)^i (1+w)^{n-i} = B(w) \Big/ A(w) \tag{9}$$

其中 $n-j \geqslant 0$，$n-i \geqslant 0$，

$$\begin{cases} B(w) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j \left(\frac{2}{T}\right)^j (1-w)^j (1+w)^{n-j} & \text{(10-a)} \\ A(w) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i (1-w)^i (1+w)^{n-i} & \text{(10-b)} \end{cases}$$

根据二项式定理：

$$(1-w)^i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (-1)^k \cdot w^k \tag{11-a}$$

$$(1+w)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k w^k \tag{11-b}$$

同时，我们引进下列向量：

$$[CI] = [C_i^0,\ -C_i^1,\ C_i^2, \cdots,\ (-1)^i C_i^i,\ 0,\ 0, \cdots,\ 0], \in 1 \times (n+1)$$

$$[CNI] = [C_{n-i}^0,\ C_{n-i}^1,\ C_{n-i}^2, \cdots,\ C_{n-i}^{n-i},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0], \in 1 \times (n+1)$$

$$[W] = [1,\ w,\ w^2, \cdots, \qquad \cdots,\ w^n],\ \in 1 \times (n+1)$$

即：

$$\begin{cases} [CI]_k = \begin{cases} (-1)^k C_i^k, & k = 0,\ 1,\ 2, \cdots, i \\ 0, & k > i \end{cases} \\ [CNI]_k = \begin{cases} C_{n-i}^k, & k = 0, 1, \cdots,\ n-i \\ 0, & k > n-i \end{cases} \\ k = 0,\ 1, \cdots,\ n \end{cases}$$

这样我们可以将(11)式表示成：

$$(1-w)^i = [CI][W]^T = [W][CI]^T$$

$$(1+w)^{n-i} = [CNI][W]^T = [W]^T[CNI]$$

于是(10-b)式成为：

$$A(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i [W][CI]^T[CNI][W]^T \tag{12}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i [W][TU][W]^T$$

其中

$$[TU] = [CI]^T[CNI], \quad \in R^{(n+1)\times(n+1)}$$

参照$[CI]$，$[CNI]$的定义，显然有：

$$[TU]_{QP} = (-1)^Q C_i^Q C_{n-i}^P$$

$$Q, P = 0, 1, \cdots, n$$

将$[W][TU][W]^T$看成是关于$[W]_i = w^i$的二次型，同时注意到$(1-w)^i(1+w)^{n-i}$是最高幂次为n的多项式，我们便有下面的结果：

$$[W][TU][W]^T = \sum_{k=0}^{n} f_k^{(i)} w^k \tag{13}$$

其中$f_k^{(i)}$为(参附录)

$$f_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_i^j C_{n-i}^{k-j} \tag{14}$$

将(14)，(13)式代入(12)式中，得出：

$$A(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i \sum_{k=0}^{n} f_k^{(i)} w^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w^k \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i \cdot f_k^{(i)} \right) \tag{15}$$

同理可得：

$$B(w) = \sum_{k=0}^{n} w^k \left[\sum_{j=0}^{m} b_j \left(\frac{2}{T}\right)^j f_k^{(j)} \right] \tag{16}$$

因此：

$$D(z) = B(w)/A(w) = \sum_{k=0}^{n} z^{-k} \left[\sum_{i=0}^{m} b_i \left(\frac{2}{T}\right)^i f_k^{(i)} \right] \Bigg/ \sum_{k=0}^{n} z^{-k} \left[\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i f_k^{(i)} \right]$$

与(4)式比较后，最终得到定理中的(5)式

我们若令$w = \frac{T}{2}s$，则(2)式变成

$$z^{-1} = (1-w)/(1+w)$$

其形式和正变换推导时的一样，因此，只要将上面的结论稍加推广，便得定理中的(6)式．定理证毕．

3. 算法

对于 $f_k^{(i)}$，存在如下递推关系：

$$f_k^{(i)} = f_k^{(i-1)} - f_{k-1}^{(i)} - f_{k-1}^{(i-1)} \tag{17}$$

其证明很简单。由(7)式

$$f_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_i^j C_{n-i}^{k-j}$$

$$f_{k-1}^{(i-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{i-1}^j C_{n+1-i}^{k-1-j} \tag{18}$$

$$f_{k-1}^{(i)} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_i^j C_{n-i}^{k-1-j} \tag{19}$$

对(18)式作代换，设 $l = j + 1$

$$f_{k-1}^{(i-1)} = \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l-1} C_{i-1}^{l-1} C_{n+1-l}^{k-l}$$

注意到 $C_{i-1}^{-1} = 0$，故上式即成：

$$f_{k-1}^{(i-1)} = -\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{i-1}^{j-1} C_{n+1-i}^{k-j}$$

再由恒等式

$$C_{n+1-i}^{k-j} = C_{n-i}^{k-j-1} + C_{n-i}^{k-j}$$
$$C_i^j = C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^j,$$

于是：

$$\begin{aligned}
f_k^{(i-1)} - f_{k-1}^{(i)} - f_{k-1}^{(i-1)} &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{i-1}^j [C_{n-i}^{k-j-1} + C_{n-i}^{k-j}] - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_i^j C_{n-i}^{k-j-1} \\
&+ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{i-1}^{j-1} [C_{n-i}^{k-j-1} + C_{n-i}^{k-j}] = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [C_{i-1}^j \\
&+ C_{i-1}^{j-1}] C_{n-i}^{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [C_{i-1}^j + C_{i-1}^{j-1}] C_{n-i}^{k-j-1} \\
&- \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_i C_{n-i}^{k-j-1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_i^j C_{n-i}^{k-j} = f_k^{(i)}
\end{aligned}$$

而 C_n^k 亦可用递推式 $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ 来计算。

最终，我们列出该算法如下：

$$\begin{cases} C_0^0 = 1, C_0^j = 0; \; j > 1 \\ C_i^0 = 1 \\ C_i^j = C_{i-1}^j + C_{i-1}^{j-1} \\ i, \; j = 1, \; 2, \; \cdots n. \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} f_0^{(i)} = 1 \\ f_k^{(0)} = C_n^k \\ f_k^{(i)} = f_k^{(i-1)} - f_{k-1}^{(i)} - f_{k-1}^{(i-1)} \\ i, \; k = 0, \; 1, \; \cdots n \end{cases} \tag{21}$$

或

$$\begin{cases} d_k = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(\frac{2}{T}\right)^j f_k^{(j)}; & c_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{2}{T}\right)^i f_k^{(i)} \\ a_k = \left(\frac{T}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{n} c_j f_k^{(j)}; & b_k = \left(\frac{T}{2}\right)^k \sum_{i=0}^{n} d_i f_k^{(i)} \end{cases}$$

这是一递推算法，程序很容易实现。

附录　关于 $[X][A][X]^T$ 的证明

对于二次型 $[X][A][X]^T$ 有如下结论：

$$[X][A][X]^T = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

特别是：

$$x_i = x^i$$

则

$$[X][A][X]^T = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}x^{i+j}$$

令 $i+j=k$，便有：

$$[X][A][A]^T = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k-j}x^k = \sum_{k=0}^{2n} f_k x^k$$

其中

$$f_k = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k-j}$$

参　考　文　献

[1] 傅明义，信息与控制，1985年，第4期，第46—49页。
[2] 沈琪英，缪熙怡，宋安澜，信息与控制，1985年，第4期，第25—30页。

A THEOREM OF TUSTIN TRANSFORMATION

Xu Jinbiao　Wang Jianping

(Department of Electrical Engineering, Shanghai University of Technology, Shanghai)

ABSTRACT In this paper, by means of the relationship between matrix multiplication and polynomial multiplication, and the binomial theorem, a theorem for calculating coefficients of Tustin transformation is presented. In addition, an algorithm is given.

KEY WORDS Digital filter; Tustin transformation; Recurrence algorithm