第17卷 第4期
1995 年 7 月

电 子 科 学 学 刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 17 No. 4
July 1995

连续非对称神经网络的动力学特性

刘 小 河

(西安理工大学自动化工程系 西安 710048)

摘要 本文讨论了连续非对称神经网络的动力学特性，给出了神经网络有唯一平衡点的条件，并讨论了当连接距阵 T 变化时不产生静态分叉和 Hopf 分叉的条件，给出了平衡点的全局渐近稳定性和全局指数稳定性的充分条件.

关键词 连续神经网络，非线性动力学，平衡点，稳定性

1 引 言

目前，人工神经网络在模式识别，图象及语音信号处理，人工智能及智能控制等领域的成功应用，使神经网络系统的研究引起了许多领域学者的关注. 在连续时间神经网络模型中，应用最广的是 Hopfield 模型. 许多学者对 Hopfield 神经网络的稳定性作了研究[1-3]. 但是，这些结果大都是在假定连接矩阵为对称和神经元的非线性特性是严格单调递增或连续可微的条件下得到的. 近来也有作者对非对称神经元网络的稳定性作了研究[4]，不过结果局限于局部渐近稳定性. 已有的研究较少涉及平衡点的唯一性、全局稳定性，特别是全局指数稳定性问题，而这些问题在理论和工程应用上都是很重要的.

2 连续非对称神经网络平衡点的唯一性及分叉问题

图 1 为连续非对称神经网络的神经元模型. 与 Hopfield 模型不同. 我们假定模拟神经元之间互联的突触特性的跨导 T_{ij} 不必对称，且神经元可以有自反馈 T_{ii}. 设神经元的非线性特性 $g_i(\cdot)\in C^0$ (不要求连续可微和严格递增)，有 n 个神经元互联，则网络的微分方程为

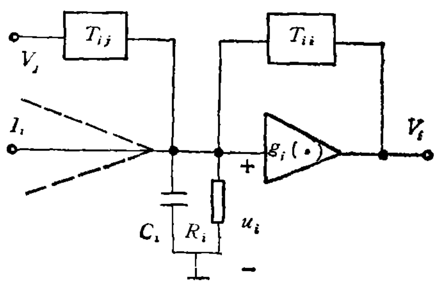

图 1 连续非对称神经网络的神经元模型

$$\left.\begin{aligned} C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{n} T_{ij}V_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i, \\ V_i &= g_i(u_i),\quad i=1,2,\cdots,n. \end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

令 $X=[x_1,\cdots,x_n]^T=[u_1,\cdots,u_n]^T$, $f_{ij}(x_j)=\frac{T_{ij}}{C_i}g_j(x_j)$, $\bar{I}_i=\frac{1}{C_i}I_i$, $a_i=-\frac{1}{R_iC_i}$, $F(X)=$

1993-12-06 收到，1994-05-24 定稿

刘小河 男，1955 年生，副教授，现从事电路理论教学及研究工作. 主要研究方向：非线性电路与系统，神经网络的动力学，自适应及最优控制，工业供电系统的非线性问题等.

$\left[\sum_{j=1}^{n} f_{1j}(x_j), \cdots, \sum_{j=1}^{n} f_{nj}(x_j)\right]^T$, $A = \mathrm{diag}[a_1, \cdots, a_n]$, $\bar{I} = [\bar{I}_1, \cdots, \bar{I}_n]^T$，则(1)式可写为

$$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = F(X) + AX + \bar{I}. \tag{2}$$

现讨论(2)式的平衡点问题. 众所周知，Hopfield 所定义的计算能量函数可以保证 Hopfield 神经网络的解沿非平衡轨道收敛到平衡状态. 而网络存在多个平衡状态时,从任一初始条件演化到的平衡状态只是局部极小点，并不一定是全局最小点. 但在神经优化计算中，人们往往更关心全局最优的问题. 于是我们提出这样一个问题：在什么条件下,神经网络(2)式可以具有唯一的平衡点?

定理 1　若对任意 $X \in R^n$，每个神经元的非线性特性满足

$$|g_j(x_{j1}) - g_j(x_{j2})| < \frac{1}{n|T_{ij}|R_i}|x_{j2} - x_{j1}|, \quad i,j = 1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

则(2)式具有唯一平衡点.

证明　(2)式的平衡点即 $F(X) + AX + \bar{I} = 0$ 的解. 上式可以写为

$$X = -A^{-1}(F(X) + \bar{I}) \triangleq G(X). \tag{4}$$

于是问题转为证明 (4) 式具有唯一的不动点. 对向量 $X, G(X)$，规定其范数为 $\|X\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$，$\|G(X)\| = \sum_{i=1}^{n}|G_i(X)|$，则

$$\begin{aligned}
\|G(X_2) - G(X_1)\| &= \sum_{i=1}^{n}|G_i(X_2) - G_i(X_1)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|R_iC_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}[g_j(x_{j2}) - g_j(x_{j1})]\right\}\right| \\
&< \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{n|T_{ij}|}|x_{j2} - x_{j1}|\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_{j2} - x_{j1}|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_{j2} - x_{j1}| = \|X_2 - X_1\|.
\end{aligned}$$

由压缩映照定理,可知 $X = G(X)$ 有唯一的不动点,亦即(2)式有唯一的平衡点.　证毕

我们知道,神经网络可以通过学习来改变突触连接矩阵 T 的权值 T_{ij}，这实际上就改变了(2)式平衡点的位置，如果 T_{ij} 的改变使得平衡点的数目发生变化，这就产生了静态分叉. 而应用中我们经常不希望出现分叉,下面讨论(2)式不出现静态分叉的条件.

定理 2　设神经网络的连接矩阵 $T = T_0$ 时，$X = X_0$ 是(2)式的一个平衡点，若对任意 T_0 有

$$\left.\begin{aligned}
&T_{ii0}\left.\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}x_i}\right|_{x_i=x_{i0}} - \frac{1}{R_i} \neq 0, \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|T_{ij0}\left.\frac{\mathrm{d}g_j}{\mathrm{d}x_j}\right|_{x_j=x_{j0}}\right| - \left|T_{ii0}\left.\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}x_i}\right|_{x_i=x_{i0}}\right| - \frac{1}{R_i} < 0,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则(2)式的平衡点不会出现静态分叉.

证明 记(2)式的右端为

$$F(X)+AX+\bar{I}\triangleq H(X,T). \tag{6}$$

上式出现静态分叉的必要条件是 $H(X_0,T_0)=0$, $D_XH(X_0,T_0)$ 至少有一个零特征值.其中, $D_XH(X_0,T_0)$ 为 $H(X,T)$ 在 X_0,T_0 处关于X的导算子[5]. 当 $T=T_0$ 时,若 X_0 为平衡点,则必有 $H(X_0,T_0)=0$, 而

$$D_XH(X_0,T_0)=\begin{bmatrix}\frac{T_{110}}{C_1}&\cdots&\frac{T_{1n0}}{C_1}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{T_{n10}}{C_n}&\cdots&\frac{T_{nn0}}{C_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left.\frac{dg_1}{dx_1}\right|_{x_{10}}&&\mathbf{0}\\ &\ddots&\\ \mathbf{0}&&\left.\frac{dg_n}{dx_n}\right|_{x_{n0}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C_1}&&\mathbf{0}\\ &\ddots&\\ \mathbf{0}&&-\frac{1}{R_nC_n}\end{bmatrix}$$

$$\triangleq\bar{T}_0J(X_0)+A.$$

令 $M=\bar{T}_0J(X_0)+A$, 由 Gersgorin 定理[6], 当所有圆盘 $|\lambda-M_{ii}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|M_{ij}|$ 与原点不相交时,M不会出现零特征值的情形,即要求 $M_{ii}\neq0$, $|M_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|M_{ij}|$. 或

$$\frac{T_{ii0}}{C_i}\left.\frac{dg_i}{dx_i}\right|_{x_i=x_{i0}}-\frac{1}{R_iC_i}\neq0, \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{T_{ij0}}{C_i}\left.\frac{dg_j}{dx_j}\right|_{x_{j0}}\right|-\left|\frac{T_{ii0}}{C_i}\left.\frac{dg_i}{dx_i}\right|_{x_{i0}}-\frac{1}{R_iC_i}\right|<0. \tag{8}$$

(7),(8)式两端同除以 C_i 即得(5)式.

推论 1 当 $T=T_0$, 网络的平衡点仅由源和汇[5]组成时,不会出现静态分叉.

证明 当(8)式满足,而 $\frac{T_{ii0}}{C_i}\left.\frac{dg_i}{dx_i}\right|_{x_{i0}}-\frac{1}{R_iC_i}<0$ 时,M的特征根均位于 λ 平面的左半开平面,平衡点是局部渐近稳定的,平衡点附近的流只有稳定子流形,故平衡点为汇.同理,当 $\frac{T_{ii0}}{C_i}\left.\frac{dg_i}{dx_i}\right|_{x_{i0}}-\frac{1}{R_iC_i}>0$ 而 (8) 式满足时,平衡点附近只有不稳定子流形, 故平衡点为源. 证毕

推论 2 当(7),(8)式满足时,网络不会出现 Hopf 分叉.

3 连续非对称神经网络的全局稳定性

设 $X=X_0$ 为(2)式的唯一平衡点,现考虑平衡点的全局稳定性.

首先讨论在平衡点 $x_i = x_{i0}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 附近，第 i 个神经元的非线性特性 $g_i(x_i)$ 的数学表示。令 $y_i = x_i - x_{i0}$，$h_i(y_i) = g_i(x_i) - g_i(x_{i0})$，则 $h_i(0) = 0$。设 $h_i(y_i) \in C^0$，且当 $|y_i| \leqslant \varepsilon_i(\varepsilon_i > 0)$ 时，$h_i(y_i) \in C^1$，定义

$$Z_i(y_i) \triangleq \frac{h_i(y_i)}{y_i}. \tag{9}$$

显然，$y_i \neq 0$ 时，$Z_i(y_i) \in C^0$，当 $|y_i| \leqslant \varepsilon_i$ 时，由微分中值定理

$$h_i(y_i) - h_i(0) = h_i'(\theta y_i) y_i, \quad 0 < \theta < 1. \tag{10}$$

故当 $|y_i| \leqslant \varepsilon_i$ 时，$Z_i(y_i) = h_i'(\theta y_i)$，于是

$$\lim_{y_i \to 0} Z_i(y_i) = \lim_{y_i \to 0} h_i'(\theta y_i) = h_i'(0) = Z_i(0). \tag{11}$$

可见 $Z_i(y_i)$ 在 $y_i = 0$ 处连续，故 $Z_i(y_i) \in C^0$，且 $Z_i(0) = h_i'(0)$。若 $h_i'(0) \neq 0$，且 $h_i(y_i) y_i < 0$，则 $Z_i(y_i) y_i^2 = h_i(y_i) y_i < 0$，因此，对任意 y_i，$Z_i(y_i) < 0$。同理，当 $h_i'(0) \neq 0$，且 $h_i(y_i) y_i > 0$，则对所有 y_i，$Z_i(y_i) > 0$。

现对神经网络中连接矩阵 T 的主对角元素 T_{ii} 按如下规则取值：当 $Z_i(y_i) < 0$ 时，取 $T_{ii} > 0$，当 $Z_i(y_i) > 0$ 时，取 $T_{ii} < 0$，前者是取正反馈，后者取负反馈。这样，总有 $T_{ii} Z_i(y_i) < 0$，令 $Y = X - X_0$，则(2)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = F(Y + X_0) - F(X_0) + AY \triangleq H(Y) + AY, \tag{12}$$

其中 $H(Y) = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{T_{1j}}{C_1} h_j(y_j), \cdots, \sum_{j=1}^{n} \frac{T_{nj}}{C_n} h_j(y_j)\right]^T$，$A = \mathrm{diag}\left[-\frac{1}{R_1 C_1}, \cdots, -\frac{1}{R_n C_n}\right]$。于是对 $X = X_0$ 的平衡点的稳定性问题就转化为对(12)式的零解 $Y = 0$ 的稳定性问题的研究。

定理 3　设 $Y = 0$ 是(12)式的唯一平衡点，若对任意 $Y \in R^n$，下列条件满足：

(1) $Z_i(y_i) \in C^0$，且对任意 y_i 总有 $Z_i(y_i) < 0(>0)$，$i = 1, 2, \cdots, n$；　(13)

(2) $$\left|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} T_{ij} h_i(y_j)\right| \leqslant |y_i|^{1/2} \sum_{j=1}^{n} |T_{ij}| |y_j|^{1/2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n; \tag{14}$$

(3) 任给 $\alpha_i > 0$，存在 $\beta_i > 0$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得由下规定的检验矩阵 $S = \{S_{ij}\}_{n \times n}$

$$S_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha_i}{C_i}\left(\beta_i + \frac{1}{R_i} - |T_{ii}|\right), & i = j, \\ (\alpha_i |T_{ij}| + \alpha_j |T_{ji}|)/(2C_i), & i \neq j \end{cases} \tag{15}$$

是负定的，则平衡点 $Y = 0$ 是全局渐近稳定的，若 S 为半负定，则平衡点 $Y = 0$ 是稳定的，且(12)式所有的解有界。

证明　由(13)式知，对任意 y_i 有 $T_{ii} Z_i(y_i) < 0$，因此总存在 $\beta_i > 0$ 使彳 $T_{ii} Z_i(y_i) \leqslant -\beta_i$。现定义标量函数 $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |y_i|$，则由定理条件知，$V(Y)$ 为正定函数且 $V(Y) > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |y_i| \triangleq \phi_1(\|Y\|)$，其中 $\phi_1(\|Y\|)$ 为 KR 类函数。现求 $V(Y)$

沿(12)式的解 $Y(t)$ 对 t 的全导数,考虑定理条件有

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{y_i}{|y_i|}\frac{dy_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{y_i}{|y_i|}\left[\frac{T_{ii}}{C_i}h_i(y_i)-\frac{1}{R_iC_i}y_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}h_j(y_j)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i\left(\frac{T_{ii}}{C_i}Z_i(y_i)-\frac{1}{R_iC_i}\right)|y_i|+\alpha_i\frac{y_i}{|y_i|}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}h_j(y_j)\right]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\alpha_i}{C_i}\left(\beta_i+\frac{1}{R_i}\right)|y_i|+\alpha_i|y_i|^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}\frac{|T_{ij}|}{C_i}|y_j|^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\alpha_i}{C_i}\left(\beta_i+\frac{1}{R_i}-|T_{ii}|\right)|y_i|+\frac{\alpha_i}{C_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|T_{ij}||y_i|^{\frac{1}{2}}|y_j|^{\frac{1}{2}}\right].$$

令 $W=[|y_1|^{\frac{1}{2}},|y_2|^{\frac{1}{2}},\cdots|y_n|^{\frac{1}{2}}]^T$,则 $\frac{dV}{dt}\leqslant W^TSW$,其中,$S$ 中的元素由(15)式规定.它是一个实对称矩阵.当 S 负定时,S 的所有特征值 $\lambda_i<0$,设 λ_m 为其中最大的特征值,则 $-|\lambda_m|<0$. 由线性代数的理论知,$W^TSW\leqslant-|\lambda_m|W^TW$,故 $\frac{dV}{dt}\leqslant W^TSW\leqslant$ $-|\lambda_m|W^TW=-|\lambda_m|\sum_{i=1}^{n}|y_i|\triangleq-|\lambda_m|\phi_2(\|Y\|)$,其中 $\phi_2(\|Y\|)$ 是 KR 类函数. 故对任意 $Y\in R^n$ 有 $\frac{dV}{dt}<0$,平衡点 $Y=0$ 是全局渐近稳定的. 当 S 半负定时,对任意 $Y\in R^n$ 有 $\frac{dV}{dt}\leqslant 0$,平衡点 $Y=0$ 是稳定的且(12)式所有的解有界. 证毕

定理 4 设 $Y=0$ 是(12)式的唯一平衡点,若对任意 $Y\in R^n$,下列条件满足:

(1) $Z_i(y_i)\in C^0$,且对任意 y_i 总有 $Z_i(y_i)<0(>0)$,$(i=1,2,\cdots,n)$; (16)

(2) $|h_i(y_i)|\leqslant\frac{1}{R_i|T_{ii}|}|y_i|$,$(i=1,2,\cdots,n)$; (17)

(3) 对给定 $\alpha_i>0$,存在 $\beta_i>0$,$(i=1,2,\cdots,n)$,使得由下式规定的检验矩阵 $S=\{S_{ij}\}_{n\times n}$

$$S_{ij}=\begin{cases}-\frac{2\alpha_i}{C_i}\left(\beta_i+\frac{1}{R_i}\right), & i=j,\\ (\alpha_i|T_{ij}|+\alpha_j|T_{ji}|)/(|T_{ij}|C_iR_j), & i\neq j\end{cases}\tag{18}$$

是负定的,则平衡点 $Y=0$ 是全局指数稳定的.

证明 定义标量函数 $V(Y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i^2$,则 $c_1\|Y\|^2\leqslant V(Y)\leqslant c_2\|Y\|^2$,其中 $c_1=\min\{\alpha_i\}$,$c_2=\max\{\alpha_i\}$,由定理条件知,$c_2\geqslant c_1>0$. 由定理条件(1)可知 $T_{ii}Z_i(y_i)<0$(对任意 $y_i\in R$),故存在 $\beta_i>0$ 使得 $T_{ii}Z_i(y_i)\leqslant-\beta_i$. 现求 $V(Y)$ 沿(12)式的解 $Y(t)$ 对 t 的全导数.

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}2\alpha_iy_i\frac{dy_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}2\alpha_iy_i\left[\frac{T_{ii}}{C_i}h_i(y_i)-\frac{1}{R_iC_i}y_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}h_j(y_j)\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[-2\alpha_i\left(\frac{\beta_i}{C_i}+\frac{1}{R_iC_i}\right)y_i^2+2\alpha_i\frac{y_i}{|y_i|}|y_i|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{|T_{ij}|}{C_iR_j|T_{jj}|}|y_j|\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2\alpha_i}{C_i}\left(\beta_i+\frac{1}{R_i}\right)|y_i|^2+2\alpha_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{\prime}\frac{|T_{ij}|}{C_iR_j|T_{jj}|}|y_i||y_j|\right].$$

令 $W=[|y_1|,|y_2|,\cdots,|y_n|]^T$，则有 $\frac{dV}{dt}\leqslant W^TSW$，其中 S 中元素由(18)式规定。由于 S 负定，故有 $\frac{dV}{dt}\leqslant -|\lambda_m|W^TW=-|\lambda_m|\|Y\|^2$，其中 $\lambda_m<0$ 为 S 的最大特征值。由稳定性的数学理论知，平衡点 $Y=0$ 是全局指数稳定的。　　证毕

备注　(1) 若定理 3、4 中的所有条件仅对相空间中原点的某个邻域 $G=\{\|Y\|<H\}$ 成立，则上述的全局稳定性定理就退化为局部稳定性定理。利用定理条件成立的区域可以估计吸引域。

(2) 利用 Gersgorin 圆盘定理，这可以得到更强的，但更为实用的判据。若 $S_{ii}<0$，$|S_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|S_{ij}|$，则 S 一定是负定的。

4 结 束 语

本文讨论了连续非对称神经网络动力学特性的一些问题，讨论了网络存在唯一平衡点及不产生静态分叉和 Hopf 分叉的一些充分条件，并讨论了平衡点的全局稳定性问题，这些问题是已有文献较少论及的。本文所给出的条件可由神经元的非线性特性和连接矩阵 T 的特点而确定，使用较方便，文中对神经元的非线性特性仅要求连续，在平衡点附近连续可微，而不要求在整个区间可微及严格递增，这比已有文献的条件放宽。

参 考 文 献

[1] Li J H, Michel A N, Porod W. IEEE Trans. on CAS, 1988, CAS-35(8): 976—986.
[2] Matuoka K. Neural Networks, 1992, 5(3): 495—500.
[3] 张本想，肖国镇. 西安电子科技大学学报，1992，19(1): 28—34.
[4] 蒋耀林，徐建学. 非对称连续时间神经网络系统的稳定性分析，中国神经网络 1993 年学术大会论文集，西安：228—232.
[5] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉. 北京：北京航空航天大学出版社，1989，231—238，277—278.
[6] 焦李成. 神经网络系统理论. 西安：西安电子科技大学出版社，1990，59—67.

DYNAMIC PROPERTIES OF CONTINUOUS UNSYMMETIC NEURAL NETWORKS

Liu Xiaohe

(Department of Automation Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

Abstract The dynamic properties of continuous unsymmetic neural networks are discussed, and the condition of existence of unique equilibrium point is obtained. The conditions not producing static state bifurcation and Hopf bifurcation are put forward and the sufficient conditions of overall asymptotic stability and exponential stability are obtained.

Key words Continuous neural networks, Nonlinear dynamics, Equilibrium point, Stability