

基于 ADI-FDTD 的混合方法及其快速算法

张伟军 袁乃昌 李毅 郑秋容
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要: 该文介绍了 FDTD 与 ADI-FDTD 相结合的方法,提出了减小因两种不同计算方法在边界引起反射的加权平均的方法,并给出了 ADI-FDTD 计算线性、无耗、各向同性媒质的快速算法。计算结果表明了该方法的有效性。

关键词: FDTD, 交替方向隐式时域有限差分(ADI-FDTD), 混合方法

中图分类号: 0441 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)09-1507-03

A Hybrid Method Based on ADI-FDTD and Its Celerity Algorithm

Zhang Wei-jun Yuan Nai-chang Li Yi Zheng Qiu-rong
(NUDT, Changsha 410073, China)

Abstract The paper presents a hybrid method based on FDTD and ADI-FDTD, introduces a method of weighted average to reduce the reflection caused by two different methods on the boundary, and presents a celerity method for the linear, lossless and isotropic medium. The simulation shows that the method is feasible.

Key words FDTD, ADI-FDTD, Hybrid method

1 引言

时域有限差分法是一种有效的电磁场计算方法,已经得到了广泛的运用。然而该方法为了保证数值的稳定性,必须满足 Courant 条件。在对细微结构进行处理时,要求剖分的网格尺寸很小,导致时间步长极短,计算效率很低。即使采用 FDTD 的局部细化技术^[1],需要在粗网格时间步长中嵌套细网格的 $N(N$ 为粗细网格之比)次时间步进,计算效率也不高。

交替方向隐式(Alternating-Direction Implicit, ADI)时域有限差分(ADI-FDTD)^[2]是一种较新的电磁场数值解法,该方法是将偏微分方程数值解法中适用于解决多维问题的交替方向隐式算法应用到显式时域有限差分迭代方程中而形成的新方法,它不受 Courant 条件约束,因而在一定程度上摆脱时间步长稳定性条件的限制,明显地节约计算时间。在对细微结构进行场的计算时,具有明显的优越性。

将 FDTD 和 ADI-FDTD 相结合至少有两个突出的优点:其一,能充分发挥 ADI-FDTD 的无条件稳定的优势,高效地计算具有细微结构的场(与传统的 FDTD 的局部细网格相比);其二,能避免 ADI-FDTD 中吸收边界条件编程的复杂性。

本文较为详细地介绍 FDTD 和 ADI-FDTD 的混合方法,首次提出了一种有效消除边界处反射的方法,并在采用 ADI-FDTD 时,采用一种高效的计算方法。通过数值计算,验证了该方法的高效率性、可行性、实用性。

2 FDTD 和 ADI-FDTD 的混合方法

FDTD 和 ADI-FDTD 的混合方法^[3]有两种类型。

第 1 种类型 在全局网格中(包括局部细网格)按 FDTD 的时间步进行迭代,同时记录粗细网格交界处随时间变化的场,然后在局部细网格中使用 ADI-FDTD 进行迭代,需要边界处的场时,对边界处的场作适当的插值而获得。由于 ADI-FDTD 与 FDTD 所用的时间步长可以达到一致,因此只须对场作空间上的插值即可。该方法的不足之处是没考虑细网格区域中散射体产生的场对粗网格处场的影响,其计算精度受到一定程度的影响。

第 2 种类型 在全局网格中(不包含局部细网格)按 FDTD 的时间步进行迭代,同时记录粗细网格交界处随时间变化的场,经过空间插值,在局部细网格中使用 ADI-FDTD 进行迭代,并且将局部细网格中的场通过边界反馈到粗网格所在的区域中去。该方法与前一种方法相比,精度较高。

在使用混合方法的过程之中,由于是采用不同的算法,

这将引起边界处场的反射。因此要获得较好的计算精度，其关键是粗细网格间的信息交换。

为了减少边界处的反射，我们采用加权平均的方法对场进行处理。对于图1所示的情况，分界面位于切向磁场上。当粗网格的磁场与细网格的磁场位于一条直线上，对距交界处一个细网格的磁场进行修正，修正公式为

$$h_2 = w_1 \cdot h_2 + (1 - w_1) \cdot (H_1 + h_3) / 2, \quad w_1 \in [0.8, 1] \quad (1)$$

w_1 的值可根据具体情况进行调整。当细网格中的场计算完并反馈到粗网格时，对距离交界处一个粗网格中的电场也作相应的修正。

$$E_y = w_2 \cdot E_y + (1 - w_2) e_1, \quad w_2 \in [0.8, 1] \quad (2)$$

其中 e_1 为与之在同一条直线上的距交界处半个细网格的电场。数值结果表明，通过该方法，有利于边界处的反射的减少，提高数值精度。

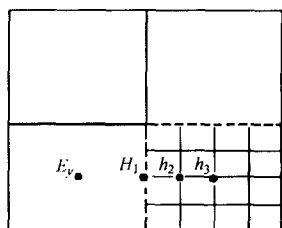


图1 全局网格与局部网格示意图

3 ADI-FDTD 三对角方程的快速解法

根据 ADI 技术^[4]，可以得到 TE 波的第一个子过程中 E_y 的迭代公式为

$$\begin{aligned} & E_y^{n+1/2}(i-1, j+1/2) - \left\{ \left(\frac{2\sqrt{\epsilon\mu}\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + 2 \right\} \cdot E_y^{n+1/2}(i, j+1/2) \\ & + E_y^{n+1/2}(i+1, j+1/2) \\ & = - \left(\frac{2\sqrt{\epsilon\mu}\Delta x}{\Delta t} \right)^2 E_y^n(i, j+1/2) \\ & + \left(\frac{2\mu\Delta x}{\Delta t} \right) \cdot \{ H_z^n(i+1/2, j+1/2) - H_z^n(i-1/2, j+1/2) \} \\ & + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \{ E_x^n(i+1/2, j+1) - E_x^n(i+1/2, j) \\ & + E_x^n(i-1/2, j) - E_x^n(i-1/2, j+1) \} \end{aligned} \quad (3)$$

由上式组成的三对角型方程组，一般可利用高斯消元法，或追赶法求得 E_y ，但这些方法对于线性、无耗、各向同性的媒质的计算效率不太高。本方采用一种高效的计算方法，其具体步骤如下。

将式(3)简化成 $a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = d_k$ ，其中 u_k 代表 $E_y^{n+1/2}(i, j+1/2)$ ， a_k, b_k, c_k, d_k 分别代表方程式中的已知量，当 j 从 0 到 $N+1$ 变化，并令 $u_0 = 0, u_{N+1} = 0$ ，将方程按 k 的

升序进行排列，组成 N 个方程：

$$\begin{cases} b_1 u_1 + c_1 u_2 = d_1 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = d_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} u_{N-2} + b_{N-1} u_{N-1} + c_{N-1} u_N = d_{N-1} \\ a_N u_{N-1} + b_N u_N = d_N \end{cases}$$

将上面的方程组写成矩阵形式： $Au = d$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix}$$

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T$$

$$d = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n]^T$$

我们不需要求出整个 A^{-1} ，只需要求出它的第一行，就能计算出 u_1 ，其余的点用迭代式求出，即

$$u_2 = \frac{1}{c_1} (d_1 - b_1 u_1), \quad u_{k+1} = \frac{1}{c_k} (d_k - b_k u_k - a_k u_{k-1}),$$

$$k = 2, 3, \dots, N-1$$

在 E_y 求得以后，就可以求出其它场分量。对于线性、无耗、各向同性的媒质进行计算时， A^{-1} 只须计算一次，在以后的时间步迭代时，都可以利用它。这种方法只将方程右边变化的信息进行迭代处理。显然计算效率能提高。

4 数值结果

结合上述的这些方法，编制了 ADI-FDTD 场的计算程序，计算了一个带槽的无限长的方柱某一处的场的空间分布。入射场为线源，即二维情况下的点源，频率 3GHz。首先，仅使用 FDTD 来计算，每波长的剖分次数为 80 时，小槽占据的网格数为 1。然后，使用混合法来计算，图 2 所示的虚线外部采用粗网格，每波长剖分为 20 次，采用 FDTD。而虚线内部包含物体的部分采用细网格，每波长剖分次数为 80，利用 ADI-FDTD 来计算。最后，使用本文中提到的减少边界反射的方法及 ADI-FDTD 快速算法，其计算空间与第 2 种方法相同。

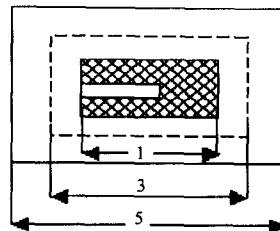


图2 计算空间的示意图(单位:波长)

3 种方法的计算时间使用相对时间来表示：第 1 种方法

为 1; 第 2 种方法的计算时间为 0.55, 第 3 种计算方法的计算时间为 0.45。相对时间的大小与粗细网格的区域大小有密切的关系。

对计算精度进行考察, 第 1、第 3 种方法的计算精度更加接近, 计算结果如图 3 所示。

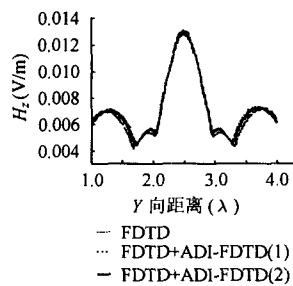


图 3 沿纵向的磁场强度分布

5 结束语

本文介绍了 FDTD 与 ADI-FDTD 相结合的方法, 提出了减小因两种不同计算方法在边界引起反射的加权平均的方法, 并给出了 ADI-FDTD 计算线性、无耗、各向同性媒质的

快速算法。计算结果表明了该方法的有效性。

参考文献

- [1] Takefumi Namiki. A new algorithm based on alternating-direction implicit method. *IEEE Trans. on MTT*, 1999, 47(10): 2003 – 2007.
- [2] 王长清, 祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分法. 北京: 北京大学出版社, 1994, 第六章.
- [3] Wang Bing-Zhong, Wang Yingjun, Yu Wenhua. A hybrid 2-d adi-fdtd subgridding scheme for modeling on-chip Interconnects. *IEEE Trans. on advanced packing*, 2001, 24(4): 1521 – 1524.
- [4] Zheng F, Chen Z, Zhang J A. Finite-different time-domain method without the courant stability conditions. *IEEE Microwave Guided Lett.*, 1999, 43(9): 441 – 443.

张伟军: 男, 1972 年生, 博士生, 工程师, 研究方向为目标特性、电磁场数值计算、测控技术。

袁乃昌: 男, 1965 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为目标特性、微波电路、超宽带雷达系统。