

# FM<sup>m</sup>let 变换在信号分离中的应用<sup>1</sup>

戴琼海 邹红星 李衍达

(清华大学自动化系智能技术与系统国家重点实验室 北京 100084)

**摘 要** 具有非线性时频关系的多分量信号的频谱占有较宽的频带, 并且各信号分量的频谱常常互相交叠, 因之难以用常规的滤波方法将各信号分量分离, 将信号与背景噪声分离亦非易事。由于 FM<sup>m</sup>let 变换的原子能匹配信号的线性和非线性时变成分, 因此本文提出采用 FM<sup>m</sup>let 变换进行信号分离。实际算例结果印证了本文方法的有效性。

**关键词** FM<sup>m</sup>let 变换, 信号分离, 滤波, 时频信号表示

**中图分类号** TN911.7

## 1 引言

滤波和谱分析是信号处理的两大支柱, 前者旨在尽可能地复原被噪声或干扰污染的信息, 因之滤波问题属于一类估计问题。噪声是一种不确定的随机现象, 据其功率谱特性可分成白噪声和有色噪声, 也可据其概率分布分成 Gauss 噪声、Rayleigh 噪声、Weibull 噪声等; 根据噪声与信号的相互作用关系, 还可将噪声分为加性噪声和乘性噪声两种。为消除量测信号中的噪声或干扰, 业已提出众多的滤波方法, 常用的主要有: (1) 基于各种频谱加窗技术的滤波方法, 如最平滑带滤波、Cauer 滤波等, 这类方法在本质上充分利用了信号与噪声或干扰在频谱上的差异, 其不足之处是, 若信号与噪声或干扰的频谱交叠, 则很难将信号分离出来, 并且理想滤波器是物理不可实现的; (2) 最优滤波或最优估计, 如最小二乘法、Wiener 滤波和 Kalman 滤波, 它们均是根据真实信号和量测信号的统计特性, 从量测信号中得出某种统计意义上具有最小误差的信号估计, 由于 Wiener 滤波器的参数是固定的, 显然不适合时变信号, 尽管 Kalman 滤波器的参数是时变的, 适合于非平稳信号的滤波, 但只有获得信号与噪声的统计特性后, 才能实现最优滤波, 然而在实际应用中或者无法先验地获知这些统计特性, 或者统计特性也是时变的, 因之实现不了最优滤波; (3) 自适应滤波, 如自适应噪声抵消、自适应陷波等, 能自适应地调节现时刻的滤波器参数, 以适应信号和噪声或干扰的未知的、或随时间变化的统计特性, 从而实现最优滤波; 由于自适应滤波算法存在渐近收敛特性, 当量测信号较短时, 滤波结果的起始部分误差将非常显著; (4) 时频面滤波, 这类方法有多个变种, 但核心是如何提取时频面上感兴趣的信号成分, 亦即如何根据信号与噪声的统计特性, 设计出二维滤波器; (5) 基于小波原子分解的滤波, 通过将对应于噪声或干扰成分的小波变换系数置零, 将感兴趣的信号成分重构出来, 很明显, 该方法毋须先验地获知有关信号与噪声的具体统计特性。

自适应匹配投影分解<sup>[1,2]</sup>亦属原子分解范畴, 自然地, 我们可借鉴基于小波原子分解的滤波方法, 将自适应匹配投影分解法应用于恢复被噪声或干扰污染的信号。事实上, 这方面的应用已有成例<sup>[1-3]</sup>, 但其中所采用的原子为 Gabor 原子<sup>[1,2]</sup>和 chirplet 原子<sup>[3]</sup>, 因之缺乏对具有非线性时频关系的信号成分的适应性。有鉴于此, 作者提出了 FM<sup>m</sup>let 变换<sup>[4]</sup>。由于 Fourier 变换、短时 Fourier 变换 (STFT) (包括 Gabor 变换)、小波变换和 chirplet 变换均是 FM<sup>m</sup>let 变换的子空间, 因此作者提出采用 FM<sup>m</sup>let 变换分离各信号分量, 或将信号与背景噪声分离开。

## 2 FM<sup>m</sup>let 变换概要

在信号的线性变换中, 基本函数的选取举足轻重。为简洁、高效地表征信号, 通常将基本函数取成与待分析信号的性态相类似的信号。然而无论 Fourier 变换, STFT(或 Gabor 变换),

<sup>1</sup> 2000-08-23 收到, 2001-05-09 定稿

国家自然科学基金 (60172026) 和清华大学基础研究基金 (JC2001028) 资助

还是小波变换, 均不适于刻画 chirp 类信号; chirplet 变换亦仅适于处理频率成分随时间作线性变化的信号。上述几种变换的共同缺陷就在于各自的基本函数(或称原子)只对信号的时频能量曲线进行线性分割, 而当信号的频率成分随时间非线性变化时, 譬如电磁啸叫信号和蝙蝠回波定位脉冲的频率成分, 势必造成分解过程出现太多的截断以及信号分量之间的混合畸变。为克服时频关系为线性的基本函数的不足, 作者考虑在 chirplet 原子的线性调频项上增加一指数项, 以适应电磁啸叫信号、地震波中的频散面波、脑电图、鸟声信号、蝙蝠回波定位脉冲等一大类自然信号中的线性和非线性的时频关系。令调频指数为  $m$ , 则有如下形式的加窗指数调频原子:

$$q_{t_c, f_c, \log \sigma, r, m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} g\left(\frac{t-t_c}{\sigma}\right) \exp\left\{j2\pi\left[1+r\left(\frac{t-t_c}{\sigma}\right)\right]^m f_c\left(\frac{t-t_c}{\sigma}\right)\right\} \quad (1)$$

仿命名常例, 作者将  $q_{t_c, f_c, \log \sigma, r, m}(t)$  简称为 FM<sup>m</sup>let。(从词源学角度讲, “FM<sup>m</sup>let” 字形从 “FM<sup>m</sup>”(指数调频) 从 “let”(小), 会意为 “加窗指数调频”。) 如同小波理论中的母小波一样, 窗函数  $g(t)$  可看成产生 FM<sup>m</sup>let 原子集的原函数, 因之作者将这种原函数称为 “母 FM<sup>m</sup>let”。显然, 要描述一 FM<sup>m</sup>let, 除窗函数的形状外, 还需要以下五个参数: 时间中心  $t_c$ , 频率中心  $f_c$ , 对数时宽  $\log \sigma$ , 线性调频率  $r$ , 以及调频指数  $m$ 。

考察 (1) 式可以发现: (1) 当  $m \equiv 1$  时, (1) 式退化为 chirplet 原子; (2) 当  $m \equiv 0$  时, (1) 式退化为小波原子; (3) 当  $m \equiv 0$  且  $\sigma \equiv 1$  时, (1) 式退化为 STFT 原子; (4) 当  $m \equiv 0$ ,  $\sigma \equiv 1$ ,  $t_c \equiv 0$ , 并且  $g(t) \equiv 1$  时, (1) 式则退化为 Fourier 变换的基本函数。概言之, chirplet 变换、小波变换、STFT、Gabor 变换以及 Fourier 变换的基本函数或原子均是 FM<sup>m</sup>let 在其参数取特定值时的特例。

用 FM<sup>m</sup>let 作基本函数, 即可定义任一平方可积信号  $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$  的 FM<sup>m</sup>let 变换

$$\begin{aligned} \text{FM}^m \mathbf{T}(t_c, f_c, \log \sigma, r, m) &= \langle s(t), q_{t_c, f_c, \log \sigma, r, m}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\nu) g^*\left(\frac{t-\nu}{\sigma}\right) \\ &\quad \times \exp\left\{-j2\pi\left[1+r\left(\frac{t-\nu}{\sigma}\right)\right]^m f_c\left(\frac{t-\nu}{\sigma}\right)\right\} d\nu \end{aligned} \quad (2)$$

其中 “ $\langle \cdot \rangle$ ” 表示内积,  $\gamma = (t_c, f_c, \log \sigma, r, m)$  称为参数集。

### 3 FM<sup>m</sup>let 变换在信号分离中的应用

#### 3.1 消除干扰

作者采用文献 [1] 介绍的自适应匹配投影分解算法实现 FM<sup>m</sup>let 变换, 该变换实质上是通过对信号  $s(t)$  在 FM<sup>m</sup>let 原子集  $q_\gamma$  的元素上进行正交投影实现的。令  $R_s^0 = s$ , 则有

$$R_s^0 = \sum_{n=0}^k \langle R_s^n, q_{\gamma_n} \rangle q_{\gamma_n} + R_s^{k+1} \quad (4)$$

其中  $\gamma_n = (t_c^{(n)}, f_c^{(n)}, \sigma^{(n)}, r^{(n)}, m^{(n)})$  表示第  $n$  次分解结束后得到的 FM<sup>m</sup>let 原子的参数集,  $R_s^{k+1}$  称为残差信号。由于分解过程是收敛的 [4], 即  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|R_s^{k+1}\| = 0$ , 因而有 FM<sup>m</sup>let 逆变换

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle R_s^n, q_{\gamma_n} \rangle q_{\gamma_n} \quad (5)$$

若某次或若干次迭代搜索出来的加权 FM<sup>m</sup>let 原子  $\sum_{i \in N \cup \{0\}} \langle R_s^i, q_{\gamma_i} \rangle q_{\gamma_i}$  代表干扰, 就可将其投影系数  $\langle R_s^i, q_{\gamma_i} \rangle$  置为 0, 将搜索出来的其它 FM<sup>m</sup>let 原子进行线性组合  $\sum_{n \in N / \{i\}} \langle R_s^n, q_{\gamma_n} \rangle q_{\gamma_n}$ , 即可获得消除了干扰的信号。毋庸置疑, 与滤除随机噪声不同的是, 要消除信号中的干扰, 必须首先知道干扰的性态。

图 1 给出了一组可资对比的算例分析结果。图 1(a) 所示为一蝙蝠发射的 2.5 ms 回波定位脉冲的时域波形; 图 1(b) 是相应的 Wigner-Ville 分布, 从该图中可以看出, 交叉项成分严重地干扰着对分析结果的解释; 图 1(c) 是基于四参数 chirplet 变换的 Wigner-Ville 分布<sup>[3]</sup>, 该分布不含交叉项干扰, 但对信号时变特性的刻画存在明显失真; 图 1(d) 为基于 FM<sup>m</sup>let 变换的分析结果。不难看出, FM<sup>m</sup>let 变换能同时刻画蝙蝠回波定位脉冲中的非线性 and 线性时变成分, 因之能较真实地显现信号分量的频率随时间的演化特性。

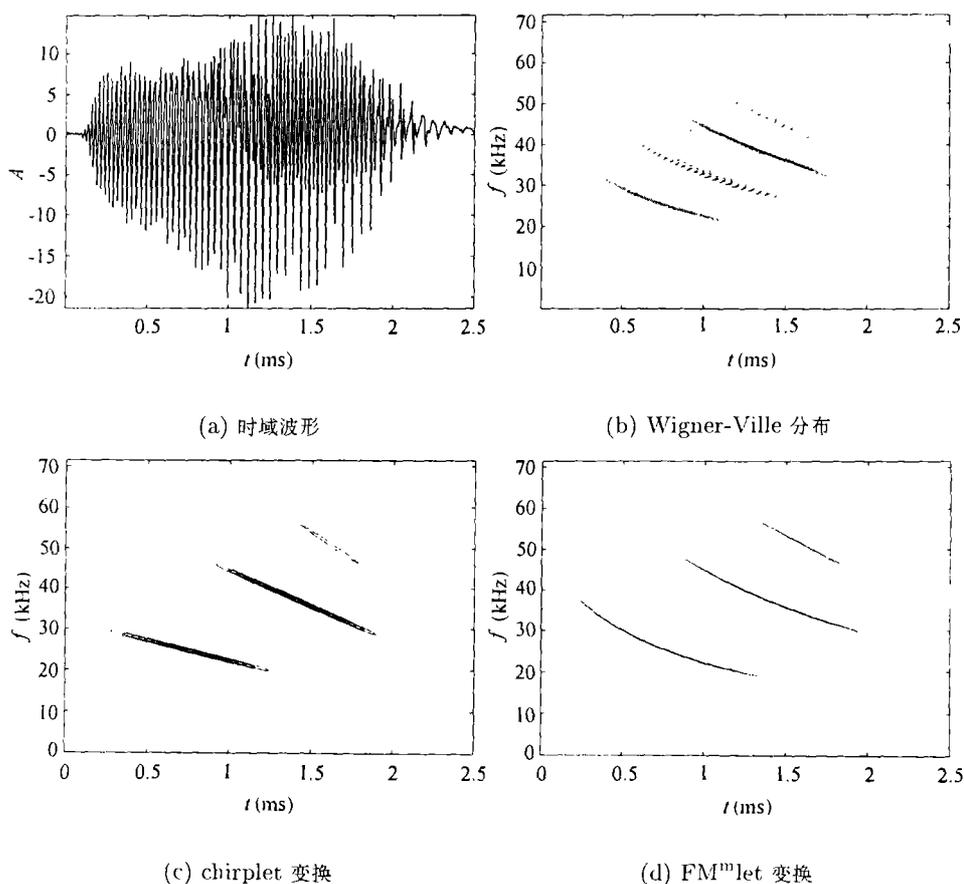
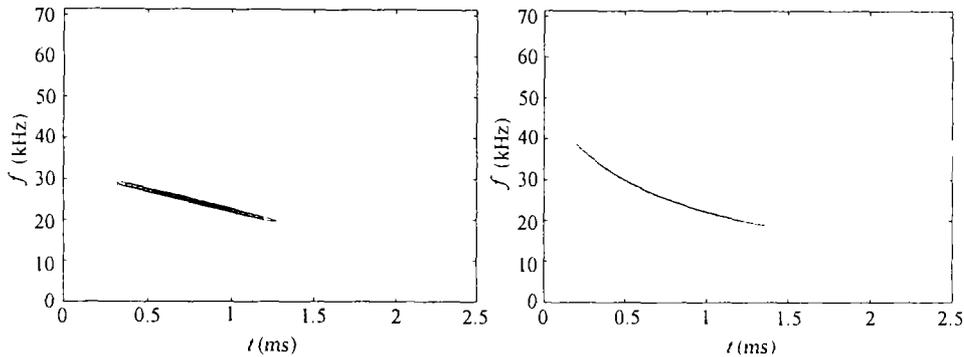


图 1 蝙蝠回波定位脉冲及其时频分布

为将图 1 中的低频信号分量提取出来, 可将图 1 中的另两个高频分量的参数置 0, 用 (4) 式所示的 FM<sup>m</sup>let 逆变换即可重构出该低频信号分量。相应于重构信号的时频分布如图 2 所示。图 2 (a) 是文献 [3] 给出的结果, 图 2 (b) 是用 FM<sup>m</sup>let 变换得到的结果。作者采用 FM<sup>m</sup>let 变换分离蝙蝠回波定位脉冲中的信号分量, 原因有四: 一是回波定位脉冲中的三个信号分量在频谱上相互交叠, 很难用频谱加窗技术将它们分离; 二是小波变换亦不适于刻画信号分量的频率随时间变化的信号; 三是四参数 chirplet 变换仅适于刻画 chirp 类信号; 四是基于 Wigner-Ville 分布的时频面滤波方法不能保证重构的正确性 (因为并非所有二维函数能与 Wigner-Ville 分布

构成一一对应关系)。因此, FM<sup>m</sup>let 变换在分离具有线性和非线性时频关系的信号分量的应用中, 具有较大的潜力。



(a) 基于 chirplet 变换的信号分离

(b) 基于 FM<sup>m</sup>let 变换的信号分离

图 2 信号分离

### 3.2 滤除噪声

令含噪信号模型为

$$x(t) = s(t) + w(t) \quad (6)$$

其中  $w(t)$  表示随机噪声。一般而言, 信号的各成分之间具有很强的相干性, 并且与 FM<sup>m</sup>let 原子集  $\{q_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  中的某些元素强相关; 信号的相干性愈强, 则原子与残差信号  $R_s^n$  的相关比愈大。定义相关比为

$$\lambda(R_s^n) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \frac{|\langle R_s^n, q_\gamma \rangle|}{\|R_s^n\|} \quad (7)$$

自适应匹配投影塔形分解算法在每次迭代过程中选择一个与残差信号  $R_s^n$  最相关的原子  $q_{\gamma_n}$ 。

令

$$\tilde{\lambda}(R_s^n) = \frac{|\langle R_s^n, q_{\gamma_n} \rangle|}{\|R_s^n\|} \quad (8)$$

则

$$E[\tilde{\lambda}(R_s^n)] = E[\tilde{\lambda}(R_w^n)], \quad \forall n \geq 0 \quad (9)$$

信号  $s(t)$  有  $k$  个相干成分,  $\forall 0 < k$ , 当且仅当

$$\tilde{\lambda}(R_s^n) > E[\tilde{\lambda}(R_w^n)], \quad \tilde{\lambda}(R_s^k) \leq E[\tilde{\lambda}(R_w^n)] \quad (10)$$

成立。据此用  $k$  个 FM<sup>m</sup>let 原子的加权组合  $\sum_{n=0}^{k-1} \langle R_s^n, q_{\gamma_n} \rangle q_{\gamma_n}$ , 即可充分逼近真实信号  $s(t)$ 。这一滤除噪声的机理, 正是缘于信号的组成成分具有很强的相干性, 而随机噪声则没有。

为了检验 FM<sup>m</sup>let 变换恢复真实信号的能力, 作者在不同信噪比 (SNR) 环境 ( $> -5$  dB) 下对含 Rayleigh 噪声的信号作 100 次独立的 Monte Carlo 试验, 均取得了很好的滤波效果。图 3(a) 示出了其中的一次计算结果。图 3(a) 的左半部分的底部显示了含  $-1$ dB Rayleigh 噪声的四个 Gauss 信号的时域波形, 右边显示了相应的功率谱密度, 中部显示了含噪信号的平滑伪 Wigner-Ville 分布 (SPWVD)<sup>[5]</sup>; 右半部分的上部画出了真实信号的时域波形, 底部给出了用本文的方法迭代四次所得的重构信号, 其 SNR 较之原含噪信号提高了 16.5948dB; 作为对比,

中部还示出了用作者曾提出的多谱线增强方法<sup>[6]</sup>所得的结果。由图3(a)可见,本文的方法具有较强的去噪能力。

图3(b)是一实际算例结果。图3(b)的左半部的底部显示了上海佘山地震台记录到的某次天然地震的一段中周期(采样频率为20Hz)时域波形,中部显示了相应的WVD;从波形形态和时频分布上可以发现,该信号含有较显著的海洋脉动(主要由海上风浪和月球引起的潮汐所致,属低频扰动)和“文化噪声”(源于人为活动,如交通、建筑施工、工业活动等,其优势频率在1Hz以上,属高频噪声);右半部的上部示出了16阶Chebyshev I型滤波器的滤波结果(其中归一化通带为[0.1, 0.75],通带纹波为0.01dB),中部示出了自适应滤波的结果,底部则是用本文的方法经9次迭代,而将后8次迭代得出的信号分量叠加之后得到的重构信号。不难发现,原始信号中的低频扰动及高频噪声已被清除。

图3(b)的结果给了我们一个重要启示,即由于 $FM^{ml}et$ 变换所具有的时频局域化性能及刻画信号的线性和非线性时变特性的能力, $FM^{ml}et$ 变换还可应用于地震图的震相分析、地震图的仿真(即将地震波形在时间轴上展开成基本的振荡,在空间轴上展开成基本的射线)、人工地震波的设计(用于检验结构的抗震性能),以及地震波的特征提取(用于地下核爆炸和天然地震的自动识别)、水声信号处理等研究领域。

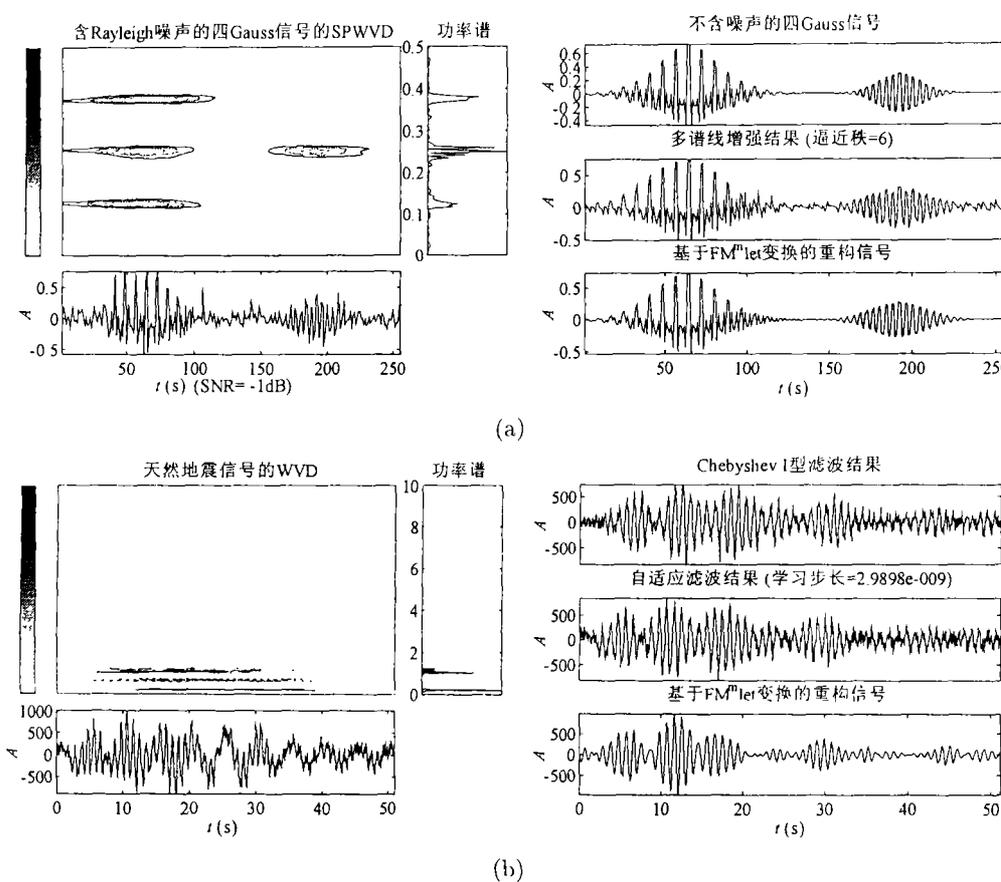


图3 不同特性噪声背景下的滤波

## 4 结束语

由于 FM<sup>m</sup>let 变换涵盖了 Fourier 变换、短时 Fourier 变换 (包括 Gabor 变换)、小波变换和 chirplet 变换, 更兼有刻画信号中非线性时变结构的能力, 因此 FM<sup>m</sup>let 变换适于处理具有线性和非线性时变成分的信号。文中的算例结果即是上述结论的佐证。

## 参 考 文 献

- [1] S. Mallat, Z. Zhang, Matching pursuits with time-frequency dictionaries, IEEE Trans. on SP, 1993, 41(12), 3397-3415.
- [2] S. Qian, D. Chen, Signal representation using adaptive normalized Gaussian functions, Signal Processing, 1994, 36(1), 1-11.
- [3] A. Bultan, A four-parameter atomic decomposition of chirplets, IEEE Trans. on SP, 1999, 47(3), 731-745.
- [4] H. Zou, Q. Dai, R. Wang, Y. Li, Parametric TFR via windowed exponential frequency modulated atoms, IEEE Signal Processing Letters, 2001, 8(5), 140-142.
- [5] P. Flandrin, Some features of time-frequency representations of multi-component signals, IEEE Int. Conf. on ASSP, San Diego(CA), 1984, 41.B.4.1-41.B.4.
- [6] 邹红星, 周小波, 李衍达, 一种多谱线增强器, 电子科学学刊, 2000, 22(2), 226-232.

## APPLICATION OF FM<sup>m</sup>let TRANSFORM TO SIGNAL SEPARATION

Dai Qionghai    Zou Hongxing    Li Yanda

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** Since the multicomponent signal with nonlinear time-frequency structures occupies a wide frequency band, and the spectral contents of the signal components may alias, it is therefore difficult to separate the signal components and to separate the signal from background noise. In this paper, a new signal separation method using FM<sup>m</sup>let transform is proposed taking the advantage that the atoms of FM<sup>m</sup>let transform can match both the linear and nonlinear time-varying structures. Theoretical predictions and numerical experiments show the feasibility of the methodology advocated.

**Key words** FM<sup>m</sup>let transform, Signal separation, Filtering, Time-frequency signal representation

戴琼海: 男, 1964 年生, 博士, 副教授, 主要从事信号处理、自动控制、神经网络研究。

邹红星: 男, 1966 年生, 博士, 副教授, 主要从事信号处理、模式识别、惯性制导研究。

李衍达: 男, 1936 年生, 中科院院士, 教授, 清华大学信息科学与技术学院院长, 清华大学生物信息学研究所所长, 校学术委员会主任, 主要从事信号处理理论、地震勘探数据处理与生物信息学研究。