第 21 卷 第 1 期
1999 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.21 No.1
Jan. 1999

时延不对称 Hopfield 神经网络的稳定条件及其应用 [1]

杨煜普　　陈亚军 *　　许晓鸣

(上海交通大学自动化系　上海　200030)

*(四川师范学院物理系　四川南充　637002)

摘　要　本文对具有时延的不对称 Hopfield 型神经网络平衡点的稳定性进行了分析，得到了网络平衡点全局渐近稳定的一些充分条件，最后我们说明了分析结果在网络设计和参数选择中的应用.

关键词　神经网络，时延，全局渐近稳定性

中图号　TN-052

1 引　言

最近几年来，神经动力学的理论研究和人工神经网络的硬件实现均取得了高速的发展，特别是随着超大规模集成电路 (VLSI) 技术的发展，神经网络的硬件实现将是实现神经计算机的重要手段之一．但是，神经网络硬件实现中的一些问题，如开关延迟和通讯延迟、各神经元之间的相互制约等，极大地降低了硬件神经网络的动力学性能并可能导致网络不稳定，其中网络的时间延迟是引起硬件神经网络不稳定的关键因素之一．因此研究有时延的神经网络的动力学行为就显得尤为重要.

Hopfield 型神经网络由于具有极为丰富的动力学行为和整体计算能力 (如优化、联想、振荡和混沌) 而倍受关注．目前，文献 [1 — 5] 已研究了时延对对称 Hopfield 型神经网络稳定性的影响．这些文献已经表明，当网络的时延足够小时，具有时延的对称 Hopfield 型神经网络和无时延情况一样也是全局稳定的．最近文献 [6] 得出，如果 $\tau\beta\|T\|<1$ ，则时延对称神经网络是全局稳定的．然而在神经网络的实现过程中，由于参数的不确定性和测量误差，人工神经网络的互连矩阵要实现完全对称是不可能的，因此分析不对称时延 Hopfield 型神经网络的定性行为是很有实际意义的.

有时延的 Hopfield 型神经网络可以用下列动力学方程描述 [1,2]:

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{T}_{ij}g_j(u_j(t-\tau_{ij}))+\tilde{I}_i,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

式中各符号的含义见文献 [1,2] ， $g_j(u_j)$ 满足扇形域条件 (Sector condition) ，即

$$0\le\beta_j^m\le\frac{g_j(u_j)}{u_j}\le\beta_j^M,\qquad\forall u_j\in R. \tag{2}$$

在本文中，为了书写简洁，假设所有的 τ_{ij} 均相同，即 $\tau_{ij}=\tau,\ \ i,j=1,2,\cdots,n$ ，当然将我们的结论推广到 τ_{ij} 不同的情况是不难的．因此将 (1) 式用下面的矢量形式描述:

[1] 1997-06-10 收到， 1998-03-09 定稿

$$\dot{u} = -Bu + Tg(u(t-\tau)) + I, \tag{3}$$

其中 $u = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$ ， $u \in R^n$ ； $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ ， $b_i = (R_i c_i)^{-1} > 0$ ； $T = [T_{ij}] \in R^{n\times n}$ ， $T_{ij} = \tilde{T}_{ij} c_i^{-1}$ ； $I = [I_1, I_2, \cdots, I_n]^T \in R^n$ ， $I_i = \tilde{I}_i c_i^{-1}$ ； $g(u) = [g_1(u_1), g_2(u_2), \cdots, g_n(u_n)]^T$ 。

2　任意有界时延神经网络的稳定条件

最近文献 [7-9] 对不对称时延 Hopfield 的全局稳定性进行了分析，得到了网络在任意有界时延条件下全局渐近稳定的一些充分条件。

定理 1 [7]　神经网络系统 (3) 式的平衡点 u^e 对任意有界延迟 τ 都是全局渐近稳定的，如果网络参数满足条件 $\max_{1\le j\le n}(\frac{\beta_j^M}{b_j}\sum_{i=1}^n |T_{ij}|) < 1$ 。

定理 2　神经网络系统 (3) 式的平衡点 u^e 对任意有界延迟 τ 都是全局指数稳定的，如果存在正常数 $\alpha_j > 0, j = 1, 2, \cdots, n$ ，满足 $\alpha_j T_{ij} + \sum_{i=1, i\ne j}^n \alpha_i |T_{ij}| < 0, j = 1, 2, \cdots, n$ 。

此定理的证明可见文献 [8]，实际上文献 [8] 中对互连矩阵对角元素的限制是可以取消的，利用此定理选择 $\alpha_j = 1,\ \ j = 1, 2, \cdots, n$ ，可直接得到下面的推论 1 。

推论 1　神经网络系统 (3) 式的平衡点 u^e 对任意有界延迟 τ 都是全局指数稳定的，如果互连矩阵的范数小于零，即 $\mu_1(T) = \max_{1\le j\le n}(T_{ij} + \sum_{i=1, i\ne j}^n |T_{ij}|) < 0$ 。

定理 3　神经网络系统 (3) 式的平衡点 u^e 对任意有界延迟 τ 都是全局指数稳定的，如果存在一个正定的对称矩阵 P 和一个正对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ ， $d_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ ，使矩阵 $\sum = BP + PB - D - PTM^M D^{-1} M^M T^T P$ 是正定的，其中 $M^M = \mathrm{diag}(\beta_1^M, \beta_2^M, \cdots, \beta_n^M)$ 。

定理 3 的证明可见文献 [9]，在定理 3 的条件下，我们可以推导出该神经网络系统的指数收敛速度为

$$\alpha(\tau) = \frac{\lambda_{\min}(\Sigma)}{2((1+\tau)q + \tau\lambda_{\min}(\Sigma))}, \tag{4}$$

其中 $q = \max(\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(D)) > 0$ 。

根据定理 3 ，不难得到下面的推论 2 和推论 3 。

推论 2　神经网络系统 (3) 式的平衡点 u^e 对任意有界延迟 τ 都是全局指数稳定的，如果 $\|P_0 T\| \overline{\beta}^M < 1$ ，其中 $P_0 = \mathrm{diag}(b_1^{-1}, b_2^{-1}, \cdots, b_n^{-1}) = \mathrm{diag}(R_1 c_1, R_2 c_2, \cdots, R_n c_n)$ ， R_i, c_i 分别为第 i 个神经元的等效输入电阻和输入电容， $\overline{\beta}^M = \max_{1\le i\le n}(\beta_i^M)$ 。

推论 3　时延反馈型神经网络系统 (1) 式的平衡点 u^e 对任意有界延迟 τ 都是全局指数稳定的，如果神经网络互连矩阵的范数小于神经元的最大等效输入电阻与最大增益乘积的倒数，即 $\|\tilde{T}\| < 1/h$ ，其中 $h = \overline{\beta}^M \max_{1\le i\le n}(R_i)$ 。

根据定理 3 和推论 2 、 3 ，可以得出以下结论：

(1) 神经网络 (1) 式的指数稳定条件与神经元的等效输入电容无关，而只与该网络的最大增益与最大等效输入电阻的乘积有关。

(2) 由 (4) 式可以看出，当神经网络的时延边界增大时，系统的指数收敛速度迅速下降；当时延边界为零 (即没有时延) 时，系统的指数收敛速度与文献 [10] 的结果一致。

(3) 当 $\max_{1\le i\le n}(R_ic_i)>1$ 时，即神经网络的松弛时间大于 1，则 $q=\max_{1\le i\le n}(R_ic_i)$，因此由 (4) 式可得，等效输入电容减小将使网络的指数收敛速度上升；反之，如果等效输入电容增大将导致网络的指数收敛速度下降。

(4) 如果 $\max_{1\le i\le n}(R_ic_i)<1$，则 $q=1$，由于此时 $\lambda_{\min}(\Sigma)$ 与神经元的等效输入电容几乎无关，因此，此时等效输入电容的变化不会引起指数收敛速度的改变。

(5) 如果神经元的等效输入电阻减小，除了引起网络的平衡点位置发生变化外，还将导致网络的指数收敛速度上升，即使当时延边界为零 (即没有时间延迟) 时也是如此 (这即是文献 [10] 的结论)；反之如果增大神经元的等效输入电阻，不但使神经网络的指数收敛速度下降，而且很容易使网络变为不稳定。因此在神经网络的实现中，尽量减小神经元的等效输入电阻对提高网络性能极为有利。

从上述定理不难看出，定理 1 和定理 2 的条件相对而言要苛刻一些，而定理 3 的条件则宽松一些，但它们是互不包含的。

在神经网络的实现中，由于各种原因引入的时间延迟一般都较小，且其时延的上界均可进行有效的估计，所以上述的结论未免过于保守。最近文献 [11] 对有固定时延边界的神经网络的稳定性进行了分析，下面在此文的基础上作进一步的分析，得到了更为精细的结果。

3 有固定边界时延神经网络的稳定条件

我们假设在初始条件 $u(t)=\phi(t)$ 下，其中 $-\tau\le t\le 0$，$\phi(t)$ 为连续矢量值函数，系统 (3) 式有唯一平衡点 u^e，令 $x=u-u^e$，代入系统 (3) 式经变换后可得平移系统：

$$\dot{x}=-Bx+Tg(x(t-\tau)), \tag{5}$$

因此原点 $x=0$ 是 (5) 式的唯一平衡点。

定理 4 时延系统 (5) 式的平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的，如果存在一个对称正定矩阵 P，使

$$\tau\|PT\|\|M^M\|(\bar{b}+\|T\|\|M^M\|)\left[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{1/2}<-\mu_2(P(-B+TM^M)), \tag{6}$$

其中 $\bar{b}=\max_{1\le i\le n}\{b_i\}$，$M^M=\mathrm{diag}(\beta_1^M,\beta_2^M,\cdots,\beta_n^M)$，$\mu_2(A)=\max_{1\le i\le n}\left[\lambda_i(\frac{A^T+A}{2})\right]$ 表示由欧几里德范数引入的矩阵 A 的测度。

证明 利用 (2) 式重写系统 (5) 式为

$$\dot{x}(t)=-Bx(t)+TM(x(t-\tau))x(t-\tau), \tag{7}$$

其中 $M(x)=\mathrm{diag}(\beta_1(x_1),\beta_2(x_2),\cdots,\beta_n(x_n))$，$\beta_i=\frac{g_i(x_i)}{x_i}\in(\beta_i^m,\beta_i^M)$。

我们引入 Lyapunov 函数：$V(x)=x^TPx$，其中 P 为满足 (6) 式的对称正定矩阵。显然 $V(x)$ 是正定的且正定的半径无界。现将 $V(x)$ 沿 (7) 式轨迹的方向对时间求导数：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)[(-B+TM)^TP + P(-B+TM)]x(t) \\ &\quad - [x(t)-x(t-\tau)]^T MT^TPx(t) - x^T(t)PTM[x(t)-x(t-\tau)],\end{aligned}$$

上式中 M 为 $M(x(t-\tau))$ 的简写形式，以下同。由于

$x^T(t)[(-B+TM)^TP+P(-B+TM)]x(t) \le 2\|x(t)\|^2\mu_2(P(-B+TM^M))$ ， $\|PTM\| \le \|PT\|\|M\| \le \|PT\|\|M^M\|$ ，所以有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\le 2\|x(t)\|^2\mu_2(P(-B+TM^M)) + 2\|x(t)\|\|x(t)-x(t-\tau)\|\|PTM\| \\ &\le 2\|x(t)\|^2\mu_2(P(-B+TM^M)) + 2\|x(t)\|\|x(t)-x(t-\tau)\|\|PT\|\|M^M\|.\end{aligned}$$

定理其余的证明过程类似文献 [11] 中定理 4.1 的证明，为了简洁，此处从略。证明中要利用关系 $\|TM\| \le \|T\|\|M\| \le \|T\|\|M^M\|$ 。

由于 $M^M = \mathrm{diag}(\beta_1^M, \beta_2^M, \cdots, \beta_n^M)$ ，而 $\beta_i^M = (\beta_i^M + \beta_i^m)/2 + (\beta_i^M - \beta_i^m)/2$ ，显然有 $\mu_2(P(-B+TM^M)) \le \mu_2(P(-B+TM_0)) + \overline{\beta}^M\mu_2(PT)$ 和 $\|M^M\| \le \|M_0\| + \overline{\beta}^M$ 成立，其中 $M_0 = \mathrm{diag}[(\beta_1^M+\beta_1^m)/2, (\beta_2^M+\beta_2^m)/2, \cdots, (\beta_n^M+\beta_n^m)/2]$ 称为神经元的平均增益矩阵，$\overline{\beta}^M = \max_{1\le i\le n}[\beta_i^M - \beta_i^m)/2]$ 表示神经元增益的最大扇形域，所以与定理 4 的证明类似，不难得到下述结论。

定理 5　时延系统 (5) 式的平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的，如果存在一个对称正定矩阵 P ，使

$$\mu_2(PT)\overline{\beta}^M + \tau\|PT\|\|M^M\|(\bar{b} + \|T\|\|M^M\|)\left[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{1/2} < -\mu_2(P(-B+TM_0)). \tag{8}$$

定理 6　时延系统 (5) 式的平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的，如果存在一个对称正定矩阵 P ，使

$$\begin{aligned}&\mu_2(PT)\overline{\beta}^M + \tau\|PT\|(\overline{\beta}^M + \|M_0\|)(\bar{b} + \|T\|(\overline{\beta}^M + \|M_0\|))\left[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{1/2} \\ &\qquad < -\mu_2(P(-B+TM_0)).\end{aligned} \tag{9}$$

根据上述定理可以看出，本文的结果比文献 [11] 的结果更精确。

推论 4　在无时延的情况下，即 $\tau=0$ 时，系统 (5) 式的平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的，如果满足条件 $\mu_2(\tilde{T}) < 1/h$；其中 $\tilde{T} = (\tilde{T}_{ij}) \in R^{n\times n}$ ，$\tilde{T}_{ij} = T_{ij}c_i^{-1}$ ；$h = \max_{1\le i\le n}(\beta_i^M R_i)$ 。

推论 4 的证明是很容易的，在定理 4 中，由于 $\tau=0$ ，且选择正定对称矩阵 P 为正对角矩阵 $P_0 = \mathrm{diag}(b_1^{-1}, b_2^{-1}, \cdots, b_n^{-1}) = \mathrm{diag}(R_1c_1, R_2c_2, \cdots, R_nc_n)$ 即可。

推论 4 即为文献 [10] 得出的非对称反馈神经网络是全局渐近稳定的最新结论。由定理 4 和推论 4 可以看出，由于神经网络时延的存在，使其全局稳定的条件大大加强，且时延越长对网络参数 (主要为互连矩阵和神经元的增益) 要求越严格。又由定理 6 看出，由于时延引起的系统不稳定主要是由于两方面的因素：大的扇形域 $\overline{\beta}^M$ 和大的增益 $\|M_0\|$ 。如果没有

时延时系统是稳定的，而系统的扇形域 $\overline{\beta}^M$ 和增益 $\|M_0\|$ 都充分小，则条件 (9) 式常常也能满足，因此系统也是全局渐近稳定的。实际上，在有固定边界时延条件下，定理 4 的结论最精确，定理 5 、定理 6 有利于分析在有时间延迟的情况下，电路参数、时延如何影响网络的稳定性，因此这对于网络设计和网络参数的选择有一定的指导意义。

4 计算机仿真实验

假设有四个神经元的网络，令

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1.1193 & 0.9750 & 1.0985 & 1.1635 \\ 0.4485 & -4.68 & 1.2805 & -1.755 \\ 1.2675 & 0.8515 & 1.1154 & 0.9605 \\ 0.6942 & 0.8905 & 0.3105 & 2.5092 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \tanh(0.5022x_1) \\ \tanh(0.6570x_2) \\ \tanh(0.3671x_3) \\ \tanh(0.6442x_4) \end{bmatrix}.$$

$B_0 = \mathrm{diag}(4.2, 3.36, 4.32, 5.232)$ ，以下为了计算和仿真方便，我们选择 $I = 0$ ， $P = P_0 = \mathrm{diag}(b_1^{-1}, b_2^{-1}, \cdots, b_n^{-1})$ 。

(1) 如果取 $T = 0.7T_0$ ， $B = B_0$ ，此时无法用定理 1 和定理 2 来判断网络的稳定性，而根据定理 3 可得该神经网络是指数稳定的，其收敛速度的估计值为 $\alpha(\tau) = 1.0075/(2+4.015\tau)$ 。

(2) 当 $T = T_0$ 时， $B = B_0$ 时，已不满足任意有界时延神经网络的稳定条件，然而由定理 4 可得，只要 $\tau \leq 0.04$ ，系统仍是全局渐近稳定的，而文献 [11] 的结论也无法判断网络的稳定性，可见本文的结论更精细。

我们采用文献 [7] 的方法，进行了计算机仿真，结果证实了上述结论的正确性。

参 考 文 献

[1] Marcus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural networks with delay. Physical Review A, 1989, 39(2): 347–359.

[2] Denker J S. Neural networks for computing. in Proceeding of Conference of Nerual Networks for Computer, Berlin: 1986, 346–349.

[3] Baldi P, Atiya A F. How delay affect neural dynamics and learning. IEEE Trans. on Nerual Networks, 1994, 5(4): 612–621.

[4] Civalleri P P, Gilli M. On stability of cellular neural networks with delay. IEEE Trans. on Circuits and Systems I. 1993, 40(2): 157–165.

[5] 阮 明. 具有时延的神经网络的稳定动力学行为分析. 复旦学报， 1995, 34(2): 121–126.

[6] Ye H, Michel A N, Wang K. Qualitative analysis of Hopfield with delay, global and local results. Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, New York: 1995, 12, 1136–1139.

[7] Gopulsamy K, He X. Stability in asymmetric Hopfield net with transmission delay. Physica D, 1994, 76(2): 344–358.

[8] Zhang Y. Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks. International Journal of System Science, 1996, 27(2): 227–231.

[9] 陈亚军，等. 不对称时延 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性及收敛速度的估计. 电子学报，已录用.

[10] 梁学斌, 吴立德. Hopfeild 型神经网络的全局指数稳定性及其应用. 中国科学 (A 辑), 1995, 25(5): 523–532.

[11] Ye H, Michel A N, Wang K. Robust stability of nonlinear time-delay system with applications to neural netowrks. IEEE Trans. on Circuits and system, 1996, 43(7): 532–543.

STABILITY CONDITIONS OF ASYMMETRIC HOPFIELD NEURAL NETWORKS WITH TIME-DELAY AND ITS APPLICATION

Yang Yupu　　Chen Yajun*　　Xu Xiaoming

(*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

*(*Department of Physics, Sichuan Teachers College. Sichuan, Nanchong* 637002)

Abstract In this paper, the global asymptotic stability of equilibrium point for asymmetric Hopfield neural networks with time-delay is discussed, and the sufficient conditions for global asymptotic stability of the equilibrium point are obtained. Finally, the applications of these results in the design and the parameter selection of neural networks are illustrated.

Key words Neural networks, Time-delay, Global asymptotic stability

杨煜普：　男，1958 年生，博士，副教授，主要研究兴趣为神经网络理论与应用，智能控制.

陈亚军：　男，1965 年生，硕士，讲师，主要研究兴趣为神经网络理论与应用，智能控制.

许晓鸣：　男，1957 年生，教授，博士生导师，上海交通大学自动化系系主任，主要研究兴趣为神经网络理论与应用，智能控制以及先进制造技术.